QA
36
.E56
v.2B
pt.5

Heft 5

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN, GÖTTINGEN, HEIDELBERG, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SECHS BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK UND ALGEBRA, IN 2 TEILEN	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 3 TEILEN . . .	H. BURKHARDT † (1896–1914), W. WIRTINGER (1905–1912) IN WIEN, R. FRICKE IN BRAUNSCHWEIG UND E. HILB IN WÜRZBURG.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN . .	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG UND H. MOHRMANN IN BASEL.
— IV: MECHANIK, IN 4 TEILBÄNDEN.	F. KLEIN † (1896—1925) UND C. H. MÜLLER IN HANNOVER.
— V: PHYSIK, IN 3 TEILEN	A. SOMMERFELD IN MÜNCHEN.
— VI, 1: GEODÄSIE UND GEOPHYSIK .	PH. FURTWÄNGLER IN WIEN UND E. WIECHERT (1899–1905) IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE, IN 2 TEILBÄNDEN	K. SCHWARZSCHILD † (1904–1916) UND S. OPPENHEIM IN WIEN.

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

Neuere Werke aus dem Gebiete der Mathematik

Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission, hrsg. v. F. Klein. 5 Bde. Auch in 38 einz. käufl. Heften.

Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. 2 Folgen in 1 Bande.

Abhandlungen u. Vorträge aus d. Geb. d. Mathem., Naturwiss. u. Technik.

Heft 7: A. Lotze, Die Grundgleichungen der Mechanik, insbes. starrer Körper. Neu entwickelt mit Graßmanns Punktrechnung. [50 S.] gr. 8. 1922. Geh. n. ℳ 1.40
— 8: R. v. Mises, Naturwissenschaft und Technik der Gegenwart. Eine akademische Rede mit Zusätzen. [II u. 32 S.] gr. 8. 1922. Geh. n. ℳ —.90
— 9: H. Greinacher, Ionen und Elektronen. [58 S.] gr. 8. 1924. Geh. n. ℳ 1.60
— 10: A. Fraenkel, Vorlesungen über die Axiomatik der Mengenlehre. [In Vorb. 1926.]

Bachmann, L., Das Schachspiel u. seine historische Entwicklung, dargest. an der Spielführung der hervorragendsten Schachmeister insbesondere der Weltschachmeister. Mit 81 auserwählten Schachpartien, 20 Aufgaben und 8 Bildnissen. [IV u. 179 S.] gr. 8. 1924. Geh. n. ℳ 5.60, geb. n. ℳ 7.—

———— P., Die Arithmetik der quadratischen Formen. Herausg. von R. Haußner. (4. Teil der Zahlentheorie Abt. II.) Mit einem Titelbild u. 20 Textfig. [XXII u. 537 S.] gr. 8. 1923. Geh. n. ℳ 17.20, geb. n. ℳ 19.20

Bibliothek, Mathematisch-physikalische. Hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting. kl. 8. Kart. je n. ℳ 1.— Neue Bände:

50. H. Wieleitner, Der Gegenstand der Mathematik im Lichte ihrer Entwicklung. 1925.
51. H. Onnen, Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen. 1923.
52. W. Lietzmann u. V. Trier, Wo steckt der Fehler? 3. Aufl. 1923.
53. W. Lietzmann, Trugschlüsse. 3. Aufl. des I. Teiles von: Wo steckt der Fehler? 1923.
54. R. Rothe, Elementarmathematik und Technik. Eine Sammlung elementarmathemat. Aufgaben mit Beziehungen zur Technik. 1924.
55. J. Peters, Die mathem. und physikalischen Grundlagen der Musik. 1924.
56. K. Herold, Finanz-Mathematik. (Zinseszinsen-, Anleihe- und Kursrechnung.) 1924.
57 L. Peters, Vektoranalysis. 1924.
58. K. Grelling, Mengenlehre. 1924.
59. W. Zabel, Mathemat. Instrumente. I. Hilfsmittel u. Instrumente z. Rechnen. [U. d. Pr. 1926.]
60. — —. II. Hilfsmittel und Instrumente zum Zeichnen. [U. d. Pr. 1926.]
61. K. Fladt, Unendliche Reihen. 1925.
62. W. Ilberg, Drahtlose Telegraphie und Telephonie in ihren physikalischen Grundlagen. 1925.
63. O. Knopf, Mathematische Himmelskunde. 1925
64. A. Czwalina, Archimedes. 1925.
65 L. Peters, Die Determinanten. 1925.
66. W. Kramer, Einführung in die darstellende Geometrie. I. Senkrechte Projektion auf eine Tafel. [U. d. Pr. 1926.]
67. — —. II. [In Vorb. 1926.]

In Vorbereitung befinden sich 1926:

H. Behmann, Mathematik und Logik. — E. Fettweis, Rechnen der Naturvölker. — E. Günther, Optik. — A. Herrmann, Das Delische Problem. — W. König, Grundzüge der Meteorologie, ihre Beobachtungsmethoden und Instrumente. — J. Preuß, Scherzaufgaben und Probleme. — E. Wicke, Konforme Abbildungen. — M. Winkelmann, Der Kreisel.

Bieberbach, L., Lehrbuch der Funktionentheorie. Teil I. Elemente der Funktionentheorie. 2., verb. Aufl. Mit 80 Figuren. [VI u. 314 S.] gr. 8. 1923. Geh. n. ℳ 8.—, geb. n. ℳ 10.—, Teil II. Moderne Funktionentheorie. Mit 38 Fig. i. Text. [U. d. Pr. 1926.]

Birkemeier, W., Über den Bildungswert der Mathematik. Ein Beitrag z. philosoph. Pädagogik. (Wiss. u. Hyp. Bd. XXV.) [VI u. 191 S.] 8. 1923. Geb. n. ℳ 5.60

Borel, E., Die Elemente der Mathematik. Dtsch. v. P. Stäckel. I. Bd.: Arithmetik u. Algebra nebst d. Elementen d. Differentialrechn. 2. Aufl. Mit 56 Textfig. u. 3 Taf. [XVI u. 404 S.] 8. 1919. n. ℳ 9.60, geb. n. ℳ 12.—. II. Bd.: Geometrie. Mit 1 Einführung i. d. eb. Trigonom. 2. Aufl. Mit 442 Textfig. u. 2 Taf. [XVI u. 380 S.] 8. 1920. n. ℳ 8.40, geb. n. ℳ 10.60

Boutroux, P., Das Wissenschaftsideal der Mathematiker. Übersetzt von H. Pollaczek. (Wissenschaft und Hypothese. Bd. XXVIII.) [U. d. Pr. 1926.]

Czuber, E., Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Wissenschaft u. Hypothese. Bd. XXIV.) [VIII u. 343 S.] 8. 1923. Geb. n. ℳ 10.60

———— Mathematische Bevölkerungstheorie. Mit 71 Fig. i. Text. [XIV u. 357 S.] gr. 8. 1923. Geh. n. ℳ 8.40, geb. n. ℳ 10.60

Dingeldey, F., Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung. I. Teil: Aufgaben zur Anwendung der Differentialrechnung. 2. Aufl. Mit 99 Fig. [V u. 202 S.] gr. 8. 1921. Geh. n. ℳ 4.60, geb. n. ℳ 6.40. II. Teil: Aufgaben zur Anwendung der Integralrechnung. 3. Aufl. Mit 96 Fig. i. Text. [IV u. 387 S.] gr. 8. 1923. Geh. n. ℳ 10.—, geb. n. ℳ 12.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

ZWEITER BAND:
ANALYSIS

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/encyklopadiederm0000hbur

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN

ZWEITER BAND IN DREI TEILEN

ANALYSIS

REDIGIERT VON

H. BURKHARDT† (1898–1914), W. WIRTINGER IN WIEN (1905–1912),
R. FRICKE IN BRAUNSCHWEIG UND E. HILB IN WÜRZBURG

ZWEITER TEIL

LEIPZIG
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1901—1921

Inhaltsverzeichnis zu Band II, 2. Teil.

B. Analysis der komplexen Größen.

1. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen. Von W. F. Osgood in Cambridge, Mass.

Seite

Einleitende Bemerkungen 5

I. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Größe.

1. Die Bereiche T, B, T' 9
2. Funktionen eines komplexen Arguments; analytische Funktionen . . . 10
3. Der Cauchysche Integralsatz; das Residuum 14
4. Die Cauchysche Integralformel; isolierte singuläre Punkte. 16
5. Die konforme Abbildung im Kleinen 19
6. Gleichmäßige Konvergenz 20
7. Die Cauchy-Taylorsche Reihe nebst Anwendungen 22
8. Der Punkt $z = \infty$. 26
9. Der Laurentsche Satz; die rationalen Funktionen. 27
10. Mehrdeutige Funktionen; Schleifenwege 29
11. Die Riemannsche Fläche; das Verhalten einer mehrdeutigen Funktion im Kleinen 31
12. Fortsetzung; algebraische Funktionen 33
13. Die analytische Fortsetzung; endgültige Definition der analytischen Funktion; das analytische Gebilde 35
14. Geometrische Deutung durch ebene und Raumkurven. 43
15. Die Lagrangesche Reihe 44
16. Funktionalgleichungen 48
17. Bestimmte und Schleifenintegrale 50
18. Die Umkehrfunktion und die konforme Abbildung im Großen 52

II. Die geometrische Funktionentheorie.

19. Riemanns neue Grundlagen für die Funktionentheorie 53
20. Das Prinzip der Symmetrie; analytische Fortsetzung 57
21. Die konforme Abbildung analytisch begrenzter Bereiche auf den Kreis; geradlinige und Kreisbogenpolygone. 59
22. Die Riemannsche Fläche als definierendes Element; algebraischer Fall. 61
23. Die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche aufeinander; algebraischer Fall 64
24. Funktionen mit Transformationen in sich; periodische Funktionen . . . 65
25. Der Fundamentalbereich; zunächst der Bereich $\mathfrak{T}$; die Ecken 69
26. Fortsetzung; Funktionen auf $\mathfrak{T}$; Definition des Fundamentalbereiches . 71
27. Der algebraische Fall; symmetrische Riemannsche Flächen 73
28. Parameterdarstellung durch eine uniformisierende Variable 74
29. Der Picardsche Satz 76

III. Untersuchung der analytischen Funktionen mittels ihrer Darstellung durch unendliche Reihen und Produkte.

Seite

30. Weierstraß 76
31. Der Weierstraßsche Satz 77
32. Der Mittag-Lefflersche Satz 80
33. Verallgemeinerung der Sätze von Nr. 31 und 32 81
34. Funktionen mit vorgegebenem Definitionsbereich 82
35. Auf dem Konvergenzkreis gelegene singuläre Punkte, insbesondere Pole, und die Koeffizienten der Potenzreihe 83
36. Die Nullpunkte einer analytischen Funktion, insbesondere einer ganzen Funktion 84
37. Die Stärke des Unendlichwerdens einer ganzen Funktion, die Koeffizienten der Taylorschen Reihe und die Höhe der Funktion 85
38. Annäherungsformeln; Reihenentwickelungen nach Polynomen 87
39. Kettenbruchentwickelungen 90

IV. Analytische Funktionen mehrerer komplexen Größen.

40. Die Bereiche (T), (B), (T'); analytische Funktionen 97
41. Der Cauchysche Integralsatz; das Residuum 98
42. Die Cauchysche Integralformel; singuläre Punkte 100
43. Gleichmäßige Konvergenz; die Cauchy-Taylorsche Reihe 102
44. Implizite Funktionen 103
45. Der Weierstraßsche Satz und die Teilbarkeit im Kleinen 105
46. Die Parameterdarstellung im Kleinen; implizite Funktionen 106
47. Das analytische Gebilde 107
48. Einige Sätze über das Verhalten im Großen 111
49. Homogene Variable 112

2. Algebraische Funktionen und ihre Integrale. Von W. Wirtinger in Innsbruck, jetzt in Wien.

A. Allgemeines.

1. Definition 117
2. Die algebraische Funktion in der Umgebung einer einzelnen Stelle . . 118
3. Das algebraische Gebilde 119
4. Die Riemannsche Fläche 120
5. Zusammenhang und Geschlecht der Riemannschen Fläche 122
6. Zerschneidung der Riemannschen Fläche; Querschnitte 122
7. Spezialfälle und Normalformen 123
8. Funktionen am algebraischen Gebilde und der Riemannschen Fläche . 124
9. Der Körper der rationalen Funktionen, Transformation des Gebildes und die Riemannsche Klasse. Erhaltung von p 125
10. Bedeutung des Klassenbegriffes 126
11. Die Integrale der algebraischen Funktionen; ihre Perioden 127
12. Riemanns Problemstellung 129
13. Verallgemeinerung der Riemannschen Fläche 129
14. Die allgemeinsten Riemannschen Mannigfaltigkeiten 130
15. Potentiale und Funktionen auf der allgemeinen Riemannschen Fläche. 131
16. Die drei Gattungen von Integralen 132
17. Relationen zwischen den Perioden 133
18. Die transzendent normierten Integrale 134
19. Darstellung der Funktionen der Fläche durch die Integrale der drei Gattungen 135

B. Besondere Darstellungen und Funktionen.

20. Darstellung der Integranden als rationale Funktionen von x, y 136
21. Fortsetzung. Homogene Variable. Die Formen φ 137

Seite
22. Definition des Geschlechtes auf Grund der Formen φ 138
23. Die Theorie von Weierstraß 139
24. Die Fälle $p = 0, 1$ 141
25. Äquivalente Systeme von Stellen, Scharen von Stellen und Funktionen 142
26. Die algebraischen Kurven im Raume von q Dimensionen 143
27. Die Darstellung der algebraischen Funktionen an der Raumkurve . . 144
28. Die Normalkurve der φ 144
29. Spezialfunktionen und Spezialscharen 145
30. Normalformen 146
31. Die Moduln einer Klasse von algebraischen Gebilden 147
32. Vertauschung von Parameter und Argument 148
33. Integrale zweiter Gattung, Normalkombinationen 149
34. Fortsetzung, die Weierstraßschen Periodenrelationen 150
35. Die Reduktion der allgemeinsten algebraischen Integrale 151
36. Die Integration durch algebraische Funktionen und Logarithmen . . . 152
37. Kleins kanonische Kurven 153
38. Primfunktionen und Primformen 155
39. Fortsetzung 156
40. Wurzelfunktionen und -formen. Multiplikative Funktionen und Formen 157

C. Das Abelsche Theorem.

41. Das Abelsche Theorem 158
42. Das Abelsche Theorem für die drei Gattungen des Integrals; spätere Beweise 160
43. Die Differentialgleichungen des Abelschen Theorems 161
44. Die Umkehrung des Abelschen Theorems und die Erweiterung der Umkehrung 162
45. Anwendungen und Erweiterungen des Abelschen Theorems 163

D. Ergänzungen.

46. Die Abelschen Reduktionstheoreme 164
47. Das Problem der Transformation der Abelschen Integrale 165
48. Spezielle Reduktionsuntersuchungen 166
49. Binomische Integrale 167
50. Hyperelliptische Integrale 167

E. Korrespondenz und singuläre Gebilde.

51. Korrespondenzen auf dem algebraischen Gebilde 168
52. Die allgemeine Korrespondenztheorie von Hurwitz und die singulären Gebilde 169
53. Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich 171
54. Symmetrie und Realität 172

F. Mehrere Variable.

55. Algebraische Funktionen mehrerer Variablen 173
56. Die Geschlechtszahlen der Fläche 174
57. Untersuchungen nach transzendenter Richtung 174

3. Elliptische Funktionen. Mit Benutzung von Vorarbeiten und Ausarbeitungen der Herren J. Harkness in Montreal, Canada, und W. Wirtinger in Wien von R. Fricke in Braunschweig.

I. Ältere Theorie der elliptischen Integrale.

1. Definition und erstes Auftreten der elliptischen Integrale 181
2. Eulers Entdeckung der Additionstheoreme 183
3. Beziehungen zwischen Euler und Lagrange 185

Seite

4. A. M. Legrendres Bedeutung für die Theorie der elliptischen Funktionen 187
5. Legendres Normalintegrale 188
6. Legendres Gestalt der Additionstheoreme 189
7. Die Landensche Transformation und die numerische Berechnung der Integrale bei Legendre 190
8. Die vollständigen Integrale und die Legendresche Relation. Differentialgleichungen und Reihen 193
9. Die Vertauschung von Parameter und Argument bei Legendre 194
10. Reduktion höherer Integrale auf elliptische und Transformation dritter Ordnung 195

II. Die elliptischen Funktionen bei Abel, Jacobi und Gauß.

11. Die Umkehrung des Integrals erster Gattung und die doppelte Periodizität bei Abel 197
12. Die Multiplikation und die allgemeine Teilung der elliptischen Funktionen bei Abel 198
13. Die spezielle Teilung der elliptischen Funktionen bei Abel 200
14. Abels allgemeine Formeln für die Multiplikation der elliptischen Funktionen 201
15. Unendliche Doppelreihen und Doppelprodukte für die elliptischen Funktionen 202
16. Abels einfach unendliche Reihen und Produkte für die elliptischen Funktionen 203
17. Abels Transformation der elliptischen Funktionen 204
18. Abels Entdeckung der komplexen Multiplikation 205
19. Die weiteren Untersuchungen Abels. Das allgemeine Transformationsproblem 205
20. Jacobis erste Arbeiten 208
21. Die einführenden Abschnitte der „Fundamenta nova“ 209
22. Jacobis Behandlung der Transformationstheorie auf Grund der Umkehrfunktion 211
23. Die supplementären Transformationen und die Multiplikation 211
24. Die Differentialgleichung der Modulargleichung. Die arithmetischen Relationen zwischen K und K' sowie Λ und Λ' 212
25. Jacobis Darstellung der elliptischen Funktionen als Quotienten einfach unendlicher Produkte 213
26. Die Integrale zweiter und dritter Gattung bei Jacobi 215
27. Jacobis Thetafunktionen 216
28. Die Integrale zweiter und dritter Gattung ausgedrückt durch die Thetafunktion 216
29. Die elliptischen Funktionen selbst ausgedrückt durch die Funktionen Θ, H 217
30. Die fundamentalen Eigenschaften der Funktionen $H(u)$ und $\Theta(u)$ . . . 217
31. Die Reihenentwicklungen von $\Theta(u)$ und $H(u)$ 218
32. Die Theorie der elliptischen Funktionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet 219
33. Der Zusammenhang zwischen q und k^2 221
34. Gauß' Entwicklungen über das arithmetisch-geometrische Mittel 222
35. Gauß' Entwicklungen über die lemniskatische Funktion 225
36. Die allgemeinen elliptischen Funktionen bei Gauß 227
37. Multiplikation, Division und Transformation der elliptischen Funktionen bei Gauß 230

III. Die elliptischen Funktionen in der Zeit zwischen Abel und Riemann.

38. Das Periodenparallelogramm und die eindeutigen doppeltperiodischen Funktionen 232
39. Fortbildung der algebraischen Grundlage unter Cauchys Einfluß . . . 233
40. Hermites erste Arbeiten über elliptische Funktionen 235
41. Hermites Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung 236
42. Spätere Arbeiten Hermites über doppeltperiodische Funktionen 237

Seite
43. Hermites Arbeiten über die Transformationstheorie 238
44. Arbeiten Jacobis und seiner Schüler 240
45. Untersuchungen von Eisenstein 243

IV. Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen nach neueren Anschauungen.

46. Zweiblättrige Riemannsche Flächen mit vier Verzweigungspunkten; Verzweigungsform 247
47. Normalgestalten der Verzweigungsform 248
48. Die algebraischen Funktionen und Integrale der F_2 251
49. Gestalten der Normalintegrale 253
50 Abbildung der Fläche F_2 durch das Integral erster Gattung 254
51. Die Funktionen der Fläche F_2 in Abhängigkeit von u betrachtet. . . 257
52. Analytische Darstellungen für $\wp(u)$, $\wp'(u)$ und $\zeta(u)$ 259
53. Allgemeinste Zerschneidung der Fläche F_2 und lineare Transformation der Perioden 261
54. Independente Erklärung doppeltperiodischer Funktionen. Gruppentheoretische Auffassung 264
55. Die Weierstraßsche Funktion $\sigma(u)$ 268
56. Darstellung der doppeltperiodischen Funktionen durch $\sigma(u)$, $\zeta(u)$ usw. . 270
57. Darstellung des Integrals dritter Gattung durch die σ-Funktion. . . . 271
58. Die elliptischen Funktionen, betrachtet als Funktionen von drei Argumenten 272
59. Die Differentialgleichungen der Perioden 275
60. Kleins Prinzip der Stufenteilung 277
61. Die Wurzelfunktionen $\sqrt{\wp(u)-e_k}$ und die drei Weierstraßschen Funktionen $\sigma_k(u)$ 279
62. Produktdarstellungen für die Funktionen $\sigma_k(u)$ und für die Diskriminante Δ 280
63. Rückgang auf die Jacobischen Bezeichnungen 282
64. Lineare Transformation der Jacobischen Funktionen 283
65. Gegenüberstellung aller elliptischen Gebilde und aller algebraischen Gebilde des Geschlechtes 1 286
66. Numerische Berechnungen 291

V. Addition, Multiplikation, Division und allgemeine Transformation der elliptischen Funktionen.

67. Die Additionstheoreme 296
68. Die Multiplikationstheoreme 301
69. Die Divisionstheoreme 306
70. Die speziellen Teilungsgleichungen 313
71. Die Transformationstheorie der doppeltperiodischen Funktionen. . . . 316
72. Die Transformation n^{ten} Grades der Thetafunktionen. Die Thetafunktionen n^{ter} Ordnung 323
73. Die Modular- und Multiplikatorgleichungen 326

VI. Anwendungen der elliptischen Funktionen.

74. Anwendungen auf die Theorie der Kurven 328
75. Anwendungen auf die Zahlentheorie 331
76. Konforme Abbildungen, durch elliptische Funktionen vermittelt . . . 334
77. Ponceletsche Polygone 335
78. Das sphärische und das einfache Pendel 336
79. Dynamik starrer Körper. Kreiselbewegung 339
80 Die Lamésche Gleichung 341
81. Auftreten elliptischer Integrale in anderen Gebieten. 343
82. Sonstige Anwendungen der elliptischen Funktionen 345

4. Automorphe Funktionen mit Einschluß der elliptischen Modulfunktionen. Von R. Fricke in Braunschweig.

Seite

1. Begriff der automorphen Funktionen 351
2. Auftreten von Modulfunktionen in der Theorie der elliptischen Funktionen bei Gauß, Abel usw. 353
3. Riemanns Bedeutung für die Theorie der automorphen Funktionen . . 355
4. Selbständige Ausbildung des Begriffs der automorphen Funktionen . 356
5. Äquivalenz und Diskontinuitätsbereich bei einer Substitutionsgruppe . 360
6. Der Diskontinuitätsbereich der Modulgruppe 362
7. Projektiv-geometrische Auffassungen und Methoden. Beziehung zur nicht-euklidischen Geometrie 365
8. Allgemeines über die Gestalt ebener Diskontinuitätsbereiche in der ζ-Ebene 367
9. Ausführliche Polygontheorie der Hauptkreisgruppen in projektiver Darstellung 370
10. Transformations- und Invariantentheorie der Hauptkreispolygone . . . 372
11. Einteilungsprinzipien auf Grund der Bereichnetze 374
12. Arithmetische Definition der Gruppen 382
13. Untergruppen, speziell Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe . . . 386
14. Existenzbeweis der automorphen Funktionen 392
15. Klassifikation der automorphen Funktionen 395
16. Sonstige Funktionen der Riemannschen Fläche F_μ, die durch ζ uniformisiert werden. 396
17. Exkurs über homogene Variable und Formen auf Riemannschen Flächen 397
18. Die homogenen ζ-Substitutionen 401
19. Begriff der automorphen Formen. 402
20. Theorie der automorphen Formen für $p = 0$ 403
21. Automorphe Formen für Gebilde beliebiger Geschlechter 407
22. Die Poincaréschen Reihen. 409
23. Darstellung automorpher Formen durch Poincarésche Reihen. 411
24. Schottkys Produktentwicklung der Primform 414
25. Analytische Darstellungen für Modulformen. 415
26. Transformationstheorie, speziell der Modulfunktionen. Modulargleichungen 420
27. Fortsetzung: Modularkorrespondenzen, Multiplikatorgleichungen . . . 423
28. Klassenzahlrelationen 426
29. Transformation sonstiger automorpher Funktionen. 427
30. Algebraische Probleme bei ausgezeichneten Untergruppen, insbesondere innerhalb der Modulgruppe 428
31. Die Variabelen ζ und ζ_1, ζ_2 als polymorphe Funktionen und Formen auf der Riemannschen Fläche 432
32. Differentialgleichungen für polymorphe Funktionen und Formen . . . 435
33. Analytische Darstellungen für polymorphe Formen 438
34. Die polymorphen Formen H_1, H_2 als eindeutige Modulformen 439
35. Die homomorphen Formen und die Poincaréschen Zetareihen. 441
36. Fundamentaltheoreme über die Existenz der eindeutig umkehrbaren polymorphen Funktionen auf gegebenen Riemannschen Flächen . . . 445
37. Die Kontinuitätsmethode zum Beweise der Fundamenthaltheoreme . . 449
38. Die Methode des Bogenelementes beim Beweise des Grenzkreistheorems 452
39. Die Methode der Überlagerungsfläche zum Beweise aller Fundamentaltheoreme 454
40. Anwendungen der Modulfunktionen in der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen 461
41. Mehrdeutige automorphe Funktionen 464
42. Automorphe Funktionen mehrerer Veränderlichen 466

5. Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet. Von E. Hilb in Würzburg.

I. Integrationsmethoden.

Seite
1. Existenzbeweise 473
2. Verhalten der Lösungen bei einem geschlossenen Umlaufe der unabhängigen Veränderlichen um singuläre Punkte 475
3. Singuläre Stellen der Bestimmtheit 478
4. Singuläre Stellen, an denen sich nur ein Teil der Integrale bestimmt verhält. Normalintegrale 486
5. Asymptotische Darstellung von Integralen 489
6. Entwicklungen der Integrale in einem Kreisringe und in der Umgebung der allgemeinsten Unbestimmtheitsstelle 494
7. Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten und Differentialgleichungen des Fuchsschen Typus. 496
8. Die Monodromiegruppe. Abhängigkeit der Integrale von Parametern, welche in der Differentialgleichung auftreten 499
9. Geometrische Interpretation der projektiven Monodromiegruppe für Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Konforme Abbildung 505

II. Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen.

10. Reduzibilität 509
11. Art, Klasse und Familie 510
12. Assoziierte und adjungierte Differentialgleichungen 514

III. Bestimmung der Differentialgleichungen aus vorgegebenen Eigenschaften.

13. Vorgabe der Monodromiegruppe 517
14. Das Riemannsche Problem 518
15. Algebraisch integrierbare Differentialgleichungen 524
16. Umkehrprobleme 530
17. Festlegung der akzessorischen Parameter durch Eigenschaften des Fundamentalbereiches 533

IV. Spezielle Differentialgleichungen.

18. Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion. Historische Entwicklung des Integrationsproblems der linearen Differentialgleichungen 537
19. Verallgemeinerungen der hypergeometrischen Reihe 549
20. Differentialgleichungen für die Periodizitätsmoduln 553
21. Die Laplacesche Differentialgleichung 555
22. Die Laplacesche und Eulersche Transformierte 556
23. Differentialgleichungen des Fuchsschen Typus, deren Integrale in der Umgebung eines jeden Punktes einer Riemannschen Fläche vom Geschlechte 1 eindeutige Funktionen sind. 560

6. Nichtlineare Differentialgleichungen. Von E. Hilb in Würzburg.

I. Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Die Sätze von Fuchs und Painlevé 566
2. Differentialgleichungen ohne verschiebbare Verzweigungspunkte. . . . 568
3. Differentialgleichungen erster Ordnung, deren allgemeines Integral bei Umkreisung aller singulärer Stellen oder nur der verschiebbaren Verzweigungspunkte allein eine endliche Anzahl von Zweigen hat 573
4. Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral eine algebraische Funktion der Integrationskonstante ist 576

Seite

5. Untersuchung der Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes, in dessen Umgebung sich unendlich viele Zweige eines Integrales untereinander vertauschen. Grenzlösungen 582

II. Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung.

6. Abhängigkeit der Integrale von den Integrationskonstanten 585
7. Auftreten von verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen bei Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung 588
8. Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung ohne verschiebbare Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen 590
9. Eigenschaften der Painlevéschen Transzendenten. 599

7. Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen. Von A. Krazer in Karlsruhe und W. Wirtinger in Wien.

I. Das Jacobische Umkehrproblem in der Zeit vor Riemann.

1. Das Jacobische Umkehrproblem 609
2. Abelsche Funktionen 611
3. Jacobi. 611
4. Umkehrung eines einzelnen Abelschen Integrals 615
5. Göpel 618
6. Rosenhain 620
7. Weierstraß (ältere Arbeiten) 622
8. Hermite 627

II. Die Transformation der Perioden.

9. Transformationsproblem. 628
10. Zusammensetzung von Transformationen 630
11. Multiplikation und Division 632
12. Zusammensetzung einer linearen ganzzahligen Substitution aus einfachen 633
13. Reduktion nicht-linearer ganzzahliger Transformationen 635
14. Krazer-Prymsche Zusammensetzung einer Transformation aus elementaren 635

III. Die allgemeinen Thetafunktionen mit beliebigen Charakteristiken.

15. Allgemeine Thetafunktionen 636
16. Einführung der Charakteristiken 638
17. Thetafunktionen höherer Ordnung 641
18. Die Transformation der Thetafunktionen 643
19. Die ganzzahlige Transformation 645
20. Die lineare ganzzahlige Transformation 648
21. Zusammensetzung von Transformationsformeln 648

IV. Die allgemeinen Thetafunktionen mit halben Charakteristiken.

22. Thetafunktionen mit halben Charakteristiken 649
23. Periodencharakteristiken. 651
24. Thetacharakteristiken 653
25. Beziehungen zwischen Periodencharakteristiken und Thetacharakteristiken 654
26. Fundamentalsysteme von Periodencharakteristiken 657
27. Fundamentalsysteme von Thetacharakteristiken 659
28. Gruppen von Periodencharakteristiken 660
29. Systeme von Thetacharakteristiken 661
30. Änderung des Querschnittsystems einer Riemannschen Fläche. 662
31. Die Gruppe der mod. 2 inkongruenten Transformationen. 663
32. Monodromie der Verzweigungspunkte 665

Seite
33. Thetafunktionen höherer Ordnung mit halben Charakteristiken . . . 666
34. Thetarelationen Die algebraische Mannigfaltigkeit M_p 668
35. Additionstheoreme der Thetaquotienten. 671
36. Die Riemannsche Thetaformel 672
37. Das Additionstheorem der allgemeinen Thetafunktionen für $p \geqq 3$. . . 674
38. Weitere Folgerung aus der Riemannschen Thetaformel. 675

V. Die allgemeinen Thetafunktionen mit r^{tel} Charakteristiken.

39. Die Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ 676
40. Periodencharakteristiken $(\varepsilon)_r$ 678
41. Thetacharakteristiken $[\varepsilon]_r$ 680
42. Relationen zwischen den Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ 682
43. Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel. 683
44. Auftreten der Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ bei nicht ganzzahliger linearer Transformation der Thetafunktionen 684
45. Die Krazer-Prymsche Fundamentalformel für die Theorie der Thetafunktionen mit rationalen Charakteristiken 684

VI. Das Jacobische Umkehrproblem bei Riemann, Clebsch und Gordan und in den Vorlesungen von Weierstraß.

46. Riemann. 686
47. Clebsch und Gordan 692
48. Weierstraß (Vorlesungen) 698

VII. Die Abelschen Transzendenten 2. und 3. Gattung. Wurzelfunktionen und Wurzelformen. Lösungen des Umkehrproblems.

49. Die Abelschen Transzendenten 2. und 3. Gattung 707
50. Eigenschaften der Funktionen $Z_\alpha(\!(\omega)\!)$ und $P_{\alpha\beta}(\!(\omega)\!)$ 708
51. Darstellung der Abelschen Transzendenten 3. und 2. Gattung durch Thetafunktionen 709
52. Lösung des Umkehrproblems 710
53. Darstellung eines einzelnen Integrals 3. und 2. Gattung durch Thetafunktionen. 712
54. Thetaquotienten und Funktionen der Klasse 713
55. Zweite Form für die Lösung des Umkehrproblems. 715
56. Thetaquotienten und Wurzelfunktionen; deren Zuordnung zu den Periodencharakteristiken 716
57. Thetafunktionen und Wurzelformen; deren Zuordnung zu den Thetacharakteristiken 720
58. Die Ausnahmefälle 723
59. Algebraische Darstellung eines Quotienten von Thetafunktionen, deren Argumente Summen von je $p+1$ Integralen sind 724
60. Invariante Darstellung 725
61. Algebraische Darstellung eines Thetaquotienten, dessen Argumente Summen von je $n(2p-2)$ Integralen sind 728
62. Noethers Lösung des Umkehrproblems 730
63. Symmetrische Riemannsche Flächen. Realitätsverhältnisse der φ . . . 732
64. Kleins Theorie der Abelschen Funktionen 733
65. Die Prymschen Funktionen 736

VIII. Der Fall $p = 2$.

66. Charakteristikentheorie 743
67. Thetarelationen 744
68. Die Kummersche Fläche 747
69. Die Weddlesche Fläche. 751
70. Thetanullwerte. 753
71. Übergang von den Thetafunktionen zum algebraischen Gebilde. . . . 754

Seite

72. Anwendungen 755
73. Das Borchardtsche arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen 758

IX. Der hyperelliptische Fall.

74. Das Verschwinden der hyperelliptischen Thetafunktionen 760
75. Zuordnung der Wurzelfunktionen zu den Periodencharakteristiken . . 763
76. Zuordnung der Wurzelformen zu den Thetacharakteristiken 764
77. Darstellung von Thetaquotienten durch Wurzelfunktionen 766
78. Fortsetzung 768
79. Lösung des Jacobischen Umkehrproblems 770
80. Additionstheorem der hyperelliptischen Thetafunktionen 771
81. Verallgemeinerung der Rosenhainschen Differentialformeln 772
82. Anwendungen 772
83. Bestimmung von $d \log \vartheta(0)$ durch die Klassenmodulen im allgemeinen Falle 773
84. Integration der erhaltenen Gleichung im hyperelliptischen Fall . . . 774

X. Der Fall $p = 3$.

85. Charakteristikentheorie 775
86. Thetarelationen 776
87. Thetanullwerte 776
88. Riemann-Weber 777
89. Die Wurzelformen zweiter und dritter Dimension 779
90. Schottky-Frobenius 781

XI. Der Fall $p = 4$.

91. Noether 784
92. Schottky 786

XII. Kleins Sigmafunktionen.

93. Vorbemerkung 788
94. Hyperelliptische σ-Funktionen 790
95. Funktionen 1. Stufe 794
96. Funktionen 2. Stufe 797
97. Die Funktionen $X_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ 798
98. Die Borchardtschen Modulen 799
99. Auflösung der Gleichung 6. Grades 800
100. Der besondere Fall $p = 3$ in Kleins Theorie der Abelschen Funktionen 801
101. Wirtingers Lösung des Umkehrproblems im Falle $p = 3$ 803
102. Die Wiltheißschen Differentialgleichungen und die Reihenentwicklungen der σ-Funktionen 805
103. Weitere Differentialgleichungen im Gebiete der Thetafunktionen zweier Variablen 807

XIII. Erweitertes Umkehrproblem und Teilung.

104. Clebsch und Gordans erweitertes Umkehrproblem 808
105. Zur Geschichte des erweiterten Umkehrproblems 811
106. Lindemanns Verallgemeinerung des Jacobischen Umkehrproblems . . 813
107. Das Teilungsproblem bei Clebsch und Gordan 814
108. Zurückführung des allgemeinen Teilungsproblems auf das spezielle . 816
109 Reduktion des speziellen Teilungsproblems $M = 0$ 818
110. Monodromiegruppe der Teilungsgleichung 818
111. Zweiteilung 820

XIV. Periodische Funktionen mehrerer Veränderlichen.

112. Die allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktionen von p Veränderlichen 822
113. Die Riemann-Weierstraßschen Sätze 824

Seite
114. Riemannsche Matrizen 827
115. Darstellung der allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktionen durch Thetafunktionen 831
116. Jacobische Funktionen 834
117. Die Weierstraßschen mehrdeutigen Umkehrprobleme 836
118. Die Wirtingerschen Lösungssätze 836

XV. Reduzierbare Abelsche Integrale.

119. Allgemeine Sätze über reduzierbare Integrale 838
120. Reduktion Abelscher Integrale auf elliptische 840
121. Der spezielle Fall $p = 2$ 841
122. Reguläre Riemannsche Flächen 843
123. Schottkys Symmetralfunktionen 845
124. Wirtingers Thetafunktionen mit $3p$ Parametern 849

XVI. Multiplikabilität und Singularität.

125. Die prinzipale Transformation der Thetafunktionen mehrerer Veränderlichen 852
126. Die singulären Funktionen Humberts 855
127. Heckes Untersuchungen über 4-fach periodische Funktionen 857
128. Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen 863
129. Anwendungen der Thetafunktionen auf die Heckeschen Zetafunktionen 864
130. Die hyperelliptischen Flächen 870

Übersicht
über die im vorliegenden Bande II, 2. Teil zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

B. Analysis der komplexen Größen.

Heft 1. 27. XII. 1901.	1. Osgood: Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen, a) einer und b) mehrerer komplexen Größen. 2. Wirtinger: Algebraische Funktionen und ihre Integrale.
Heft 2 und 3. 29. XII. 1913.	3. Fricke: Elliptische Funktionen. 4. Fricke: Automorphe Funktionen mit Einschluß der elliptischen Modulfunktionen.
Heft 4. 5. I. 1915.	5. Hilb: Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet.
Heft 5. 15. V. 1921.	6. Hilb: Nichtlineare Differentialgleichungen. 7. Krazer und Wirtinger: Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen. Register zu Band II, 2. Teil. Inhaltsverzeichnis von Band II, 2. Teil.

II B 6. NICHTLINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.*)

Von

EMIL HILB

in Würzburg.

Inhaltsübersicht.

I. Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Die Sätze von *Fuchs* und *Painlevé*.
2. Differentialgleichungen ohne verschiebbare Verzweigungspunkte.
3. Differentialgleichungen erster Ordnung, deren allgemeines Integral bei Umkreisung aller singulärer Stellen oder nur der verschiebbaren Verzweigungspunkte allein eine endliche Anzahl von Zweigen hat.
4. Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral eine algebraische Funktion der Integrationskonstante ist.
5. Untersuchung der Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes, in dessen Umgebung sich unendlich viele Zweige eines Integrales untereinander vertauschen. Grenzlösungen.

II. Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung.

6. Abhängigkeit der Integrale von den Integrationskonstanten.
7. Auftreten von verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen bei Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung.
8. Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung ohne verschiebbare Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen.
9. Eigenschaften der *Painlevé*schen Transzendenten.

Literatur.

P. Boutroux, Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre. Paris 1908, mit einem Anhang von *P. Painlevé.* (Im folgenden zitiert: „*Boutroux,* Vorlesungen“ und „*Painlevé* bei *Boutroux.*“)

P. Fiorentini, Sulla teoria delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Batt. Giorn. 44 (1906), p. 25—88, p. 291—313.

*) Für die Mitwirkung bei der Korrektur dieses Referates und für eine große Anzahl von Verbesserungs- und Ergänzungsvorschlägen ist der Verfasser den Herren *J. Horn, M. Noether* und *L. Schlesinger* zum wärmsten Danke verpflichtet

A. R. Forsyth, Theory of differential equations Part. III. Ordinary equations not linear. Vol. II. III. Cambridge 1900.

J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Sammlung *Schubert,* L. Leipzig 1905.

L. Koenigsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig 1889.

P. Painlevé, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm 1895. Paris 1897. (Im folgenden zitiert: „*Painlevé,* Vorlesungen.")

—, Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles. Verhandlungen des dritten internationalen Math.-Kongresses in Heidelberg 1904. p. 86 f.

E. Picard, Traité d'Analyse, Bd. II und III. 1. Aufl. Paris 1893 u. 1896. 2. Aufl. ebenda 1905 und 1908.

L. Schlesinger, Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen. Sammlung *Schubert,* XIII. Leipzig. 1. Aufl. 1900. 2. Aufl. 1903.

Zur Ergänzung des vorliegenden Referates sind die folgenden Referate heranzuziehen:

II A 4a, *P. Painlevé,* Gewöhnliche Differentialgleichungen; Existenz der Lösungen. In diesem Referate ist die Frage der Existenzbeweise bei gewöhnlichen und singulären Anfangsbedingungen sowie die Theorie der singulären Integrale behandelt.

II A 4b, *E. Vessiot,* Gewöhnliche Differentialgleichungen; elementare Integrationsmethoden.

II B 5, *E. Hilb,* Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet.

III D 8, *H. Liebmann,* Geometrische Theorie der Differentialgleichungen.

Ferner sei, was die Behandlung der in der analytischen Mechanik einschließlich des Drei- und n-Körperproblems auftretenden Differentialgleichungen anbetrifft, auf die Referate IV 12 von *C. Müller* und IV 13 von *G. Prange* sowie auf das Referat VI 2, 12 von *Whittaker* verwiesen.

Im Referate II A 4a (*P. Painlevé*) wurden die Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen in der unmittelbaren Umgebung eines festen Wertes der komplexen unabhängigen Veränderlichen x untersucht, und zwar bei gewöhnlichen Anfangsbedingungen in Nr. **1—16**, bei gewöhnlichen singulären Anfangsbedingungen in Nr. **17—23** und bei außergewöhnlichen Anfangsbedingungen in Nr. **24—37**. In dem vorliegenden Referate wird nun das Verhalten der allgemeinen Lösungen bei beliebigen Wegen der unabhängigen Veränderlichen in der komplexen x-Ebene besprochen werden; die Hauptaufgabe wird aber in der Bestimmung und Untersuchung solcher nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen bestehen, deren allgemeine Lösungen einen möglichst einfachen funktionentheoretischen Charakter haben, z. B. eindeutige Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x sind oder sonst in bezug auf die Lage ihrer singulären Stellen und ihr Verhalten in der Umgebung derselben besonderen Forderungen genügen.

Um solche im Wesen der Aufgabe begründete Forderungen angeben zu können, müssen zunächst einige vorbereitende Bemerkungen über die singulären Stellen der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung gemacht werden. Es sei y eine in der Umgebung von x_0 analytische Lösung einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, und es sei auf einem von x_0 ausgehenden Wege l in der komplexen x-Ebene x_1 die erste singuläre Stelle, welche getroffen wird. Konvergieren dann y und seine $n-1$ ersten Ableitungen bei Annäherung an x_1 nach festen endlichen oder unendlich großen Werten, so hat man in x_1 eine Singularität von der Art, wie sie im Referat II A 4a (*P. Painlevé*) wenigstens für die einfachsten Fälle besprochen sind; wenn aber entweder y oder mindestens eine seiner $n-1$ ersten Ableitungen bei Annäherung an x_1 auf dem Wege l nach keinem bestimmten Wert konvergiert, so kennt man in x_1 weder gewöhnliche noch außergewöhnliche Anfangsbedingungen; x_1 ist dann für y eine Unbestimmtheitsstelle. Des weiteren unterscheidet man bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweierlei Arten von singulären Punkten der Lösungen, nämlich:

a) feste singuläre Stellen, das sind singuläre Stellen, welche von den Integrationskonstanten nicht abhängen;

b) verschiebbare singuläre Stellen, d. h. solche singuläre Stellen, welche durch Änderung der Integrationskonstanten verschoben werden können.

Die singulären Stellen der Lösungen von linearen Differentialgleichungen sind fest, vgl. das Ref. II B 5 (*E. Hilb*), Nr. 2. Einfache Beispiele von Differentialgleichungen erster Ordnung mit verschiebbaren singulären Punkten sind die folgenden:

$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$, diese hat als allgemeine Lösung $y = \frac{1}{x - x_0}$, also x_0 als verschiebbaren Pol,

$y\frac{dy}{dx} + x = 0$, diese hat als allgemeine Lösung $y = \sqrt{x_0^2 - x^2}$, also $\pm x_0$ als verschiebbare algebraische Verzweigungspunkte.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren allgemeine Lösung $y = ce^{\frac{1}{x - x_0}}$ ist, hat x_0 als verschiebbaren Unbestimmtheitspunkt. Während in den angeführten Beispielen die verschiebbaren singulären Punkte isoliert lagen, können bei algebraischen Differentialgleichungen dritter Ordnung, wie das Beispiel der Differentialgleichung für die polymorphen Funktionen zeigt, die verschiebbaren singulären Stellen eine analytische oder nichtanalytische Linie oder eine diskontinuierliche perfekte Punktmenge bilden (vgl. das Ref. II B 4 (*Fricke*)).

I. Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Die Sätze von Fuchs und Painlevé. Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung:

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{1}$$

in welcher $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ Polynome von y, eindeutige analytische Funktionen von x sind.

Die singulären Stellen der Differentialgleichung (1) sind dann (vgl. das Ref. II A 4a (*Painlevé*), Nr. **20, 21, 24—31**):

1. Die singulären Stellen der von x abhängigen Koeffizienten der Potenzen von y in den Polynomen P und Q, ferner allenfalls $x = \infty$.

2. Die Nullstellen x_0, y_0 von $Q(x, y)$, für welche $P(x, y)$ von Null verschieden ist. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $Q(x_0, y)$ verschwindet nur für isolierte Werte von $y = y_0$; dann besitzt die Lösung, welche für x_0 den Wert y_0 annimmt, in x_0 einen algebraischen Verzweigungspunkt. Die Werte x_0, für die dieses eintreten kann, erfüllen im allgemeinen zweifach ausgedehnte Bereiche der x-Ebene; innerhalb dieser Bereiche ist dann der algebraische Verzweigungspunkt x_0 verschiebbar.

b) $Q(x_0, y)$ verschwindet für x_0 unabhängig von dem Werte von y. Dann ist x_0 eine feste singuläre Stelle, und einfache Beispiele, wie etwa die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(x - x_0)^2},$$

deren allgemeines Integral $y = Ce^{-\frac{1}{x - x_0}}$ ist, zeigen, daß die allgemeine Lösung eine solche singuläre Stelle als Unbestimmtheitsstelle besitzen kann.

3. Die gemeinsamen Nullstellen x_0, y_0 von $P(x, y)$ und $Q(x, y)$.

4. Diejenigen singulären Stellen, welche man für $z = 0$ erhält, wenn man $z = \frac{1}{y}$ setzt.

Die in 1, 2b und 3 aufgezählten singulären Stellen sowie die entsprechenden, die von 4 herrühren, sind feste singuläre Stellen der Differentialgleichung; diese festen singulären Stellen sollen weiterhin mit ξ bezeichnet werden. In jedem Punkte x, der mit keinem ξ zusammenfällt, ist jede Lösung von (1), die daselbst einen bestimmten endlichen oder unendlichen Wert annimmt, algebroid. Diesen von *Fuchs*[1]) herrührenden Satz erweitert *Painlevé*[2]) zu dem folgenden

1) *L. Fuchs*, Über Differentialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, Berlin Ber. 1884, p. 699. Ges. Werke 2, p. 355. Die Be-

ersten Fundamentalsatz: *Die sämtlichen nicht algebraischen singulären Stellen eines Integrals von* (1) *sind unter den festen singulären Stellen* ξ *enthalten*, indem er zeigt, daß jede Lösung von (1) nach einem bestimmten endlichen oder unendlich großen Wert konvergiert, wenn sich x nach irgendeinem von den Punkten ξ verschiedenen Punkt x_0 auf einem Wege L bewegt, der durch keinen der Punkte ξ geht. Daraus folgt unmittelbar als Analogon zu dem bekannten Satze von *Picard* (vgl. das Ref. II B 1 (*Osgood*), Nr. 29) der Satz[3]): Sind in der Differentialgleichung (1) $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ auch rationale Funktionen von x und ist $y = \varphi(x)$ eine Lösung von (1), deren Umkehrfunktion $x = \psi(y)$ unendlich-vieldeutig ist, so hat die Gleichung $y(x) = A$ unendlich viele Wurzeln, wenn A eine feste Zahl ist, die nicht mit einem der aus der Differentialgleichung bestimmbaren, in endlicher Anzahl vorhandenen Ausnahmewerte zusammenfällt.

Das zweite Haupttheorem von *Painlevé* beschäftigt sich mit der analytischen Abhängigkeit eines Integrals von (1) von der Integrationskonstante. Man betrachte zwei von den ξ verschiedene Punkte x_0 und x_1; $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ sei das Integral von (1), welches in x_0 den Wert y_0 hat, und dieses Integral nehme in x_1 den Wert y_1 an, wenn x von x_0 nach x_1 auf einem bestimmten Wege L geht, der weder einen der Punkte ξ noch einen der bei Änderung von y_0 verschiebbaren Verzweigungspunkte enthält, so daß also L sich mit y_0 unter Umständen ändern muß. Dann sagt der zweite Fundamentalsatz von *Painlevé*[4]), daß y_1 *als Funktion von* y_0 *überall algebroid ist.* Dieser Satz gilt aber nur so lange[5]), als der Weg nicht durch das Ausweichen vor mit y_0 beweglichen Verzweigungspunkten gezwungen

merkung, daß bei nichtlinearen Differentialgleichungen verschiebbare Verzweigungspunkte auftreten, scheint zum ersten Mal explizite von *M. Hamburger*, J. f. Math. 83 (1877), p. 186 ausgesprochen worden zu sein.

2) *P. Painlevé*, Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, Thèse, Paris 1887, p. 38, abgedruckt Toulouse Ann. 1888; vgl. auch die in der Literaturübersicht erwähnten Vorlesungen von *P. Painlevé*, p. 23; ferner *E. Picard*, Traité II, p. 326.

3) *P. Painlevé*, Vorlesungen, p. 234. Vgl. auch *G. Remoundos*, Sur les zéros des intégrales d'une classe d'équations différentielles, Paris C. R. 147 (1908), p. 416 und Rom. 4. Math. Kongr. (1909) 2, p. 69.

4) *P. Painlevé*, Vorlesungen, p. 36.

5) Vgl. *L. Zoretti*, Sur les fonctions analytiques uniformes, J. de Math. (6) 1 (1905), p. 38, *P. Painlevé*, Anhang zu den in der Literaturübersicht aufgeführten Vorlesungen von *P. Boutroux* (fernerhin als „*Painlevé* bei *Boutroux*" bezeichnet), p. 141; *P. Boutroux*, Sur les singularités des équations différentielles rationnelles du premier ordre et du premier degré, J. de Math. (6) 6 (1910), p. 140.

wird, durch einen Punkt ξ zu gehen oder sich um einen oder mehrere Punkte ξ unendlich oft herumzuwinden. Es besitze etwa das Integral $y = \varphi(x, b, x_0)$ als Funktion von x p Zweige; verbindet man dann x_0 mit x_1 durch p Wege $L_1, \ldots, L_p$, die durch keinen der Punkte ξ und keinen der Verzweigungspunkte von $\varphi(x, b, x_0)$ gehen, derart daß man auf diesen p Wegen mit p verschiedenen Werten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ in x_1 ankommt, so sind die p Funktionen $\varphi_1(x_1, y_0, x_0)$, $\varphi_2(x_1, y_0, x_0)$, $\ldots, \varphi_p(x_1, y_0, x_0)$ als Funktionen von y_0 für $y_0 = b$ algebroid. Besitzt aber $\varphi(x, y_0, x_0)$ für zu b benachbarte Werte von y_0 noch andere Zweige, also etwa $\varphi_{p+1}(x, y_0, x_0)$, so kann $\varphi_{p+1}(x_1, y_0, x_0)$ die Stelle $y_0 = b$ als Unbestimmtheitsstelle besitzen.

Die beiden Fundamentaltheoreme von *Painlevé* gelten unverändert für algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$F(y', y, x) = 0, \tag{2}$$

wenn F ein Polynom von y' und y ist, dessen Koefffzienten analytische Funktionen von x sind.

2. Differentialgleichungen ohne verschiebbare Verzweigungspunkte. Damit das allgemeine Integral einer Differentialgleichung eindeutig sei, darf die Differentialgleichung überhaupt keine, also auch keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen; es entsteht so durch Verallgemeinerung die Aufgabe, alle Differentialgleichungen (1) und (2) zu bestimmen, welche keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen. Aus dem ersten Fundamentaltheorem folgt dann, daß alle singulären Stellen der Differentialgleichung (1), welche nicht mit den festen Punkten ξ zusammenfallen, Pole sein müssen. Damit nun die Differentialgleichung (1) keine verschiebbare singuläre Stelle des Typus 2a) besitzt, muß $Q(x, y)$ von y unabhängig, also (1) von der Form:

$$\frac{dy}{dx} = P(x, y) \tag{3}$$

sein, wobei $P(x, y)$ ein Polynom in y ist. Setzt man $y = \frac{1}{z}$, so erhält man:

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 P\left(x, \frac{1}{z}\right); \tag{4}$$

damit nun $z = 0$ kein Pol der rechten Seite von (4) sei, darf der Grad von P in bezug auf y Zwei nicht übersteigen. Die allgemeinste Differentialgleichung der Form (1) mit festen Verzweigungspunkten ist also[1]) die *Riccati*sche[6]) Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = A_0 + A_1 y + A_2 y^2, \tag{5}$$

6) Vgl. wegen dieser Bezeichnung das Ref. II A 4b (*Vessiot*), p. 241.

in welcher die A analytische Funktionen von x sind. Wie nun im Ref. II A 4b (*Vessiot*) p. 241 ausgeführt wurde, läßt sich das allgemeine Integral der *Riccati*schen Differentialgleichung als Funktion der Integrationskonstanten y_0 in der Form:

$$y = \frac{y_0 \varphi(x) + \psi(x)}{y_0 \chi(x) + \omega(x)} \tag{6}$$

darstellen. Diese Darstellung ergibt sich aber[7]) auch unmittelbar aus der Tatsache, daß die Differentialgleichung (5) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzt. Denn seien x_0 und x_1 zwei feste Punkte, die durch einen festen Weg L verbunden sind, der durch keinen Punkt ξ geht, dann gehört zu jedem Wert y_0 von y in x_0 ein ganz bestimmter endlicher oder unendlich großer Wert y_1, den y in x_1 annimmt. Es ist also, da (5) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte hat, nach dem zweiten Fundamentalsatz von *Painlevé*, y_1 eine rationale Funktion von y_0. Umgekehrt folgt ebenso, daß y_0 eine rationale Funktion von y_1 ist, so daß, wenn wir statt y_1 und x_1 allgemein y und x schreiben, y eine linear gebrochene Funktion von y_0 ist.

Petrowitch[8]) und *Malmquist*[8a]) untersuchen die Frage, wann die Differentialgleichung (1), in der $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ auch rationale Funktionen von x sind, einzelne eindeutige Integrale besitzen können. *Petrowitch* bedient sich bei der Untersuchung des schon oben erwähnten *Picard*schen Satzes aus der Funktionentheorie, *Malmquist* der von *Boutroux* (vgl. das Ref. II 15 (*Painlève*), p. 45 der franz. Enc.) gewonnenen Resultate über das Verhalten der Integrale bei Annäherung an singuläre Stellen. Nach *Malmquist* ist jedes eindeutige Integral von (1) eine rationale Funktion, sofern (1) keine *Riccati*sche Differentialgleichung ist.

Setzt man in (5) $y = -\frac{1}{A_2}\frac{u'}{u}$, so erhält man für u eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung; die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit das allgemeine Integral einer *Riccati*schen Differentialgleichung eine eindeutige Funktion sei, läßt sich somit auf eine Frage aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen zurückführen.

7) *H. Poincaré,* Sur un théorème de M. *Fuchs,* Acta Math. 7 (1885), p. 1. Vgl. auch *E. Picard,* Traité II, p. 329.

8) *M. Petrowitch,* Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques. Thèse, Paris 1894, p. 43; vgl. auch *E. Picard,* Traité III, p. 356.

8a) *J. Malmquist,* Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre, Acta math. 36 (1913), p. 310.

Wir wenden uns jetzt zu den algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung (2) und bezeichnen als Diskriminantengleichung diejenige Gleichung, welche man erhält, wenn man y' zwischen der Gleichung (2) und der Gleichung $\frac{\partial F(y', y, x)}{\partial y'} = 0$ eliminiert. Dann sind nach *Fuchs*[9]) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Differentialgleichung (2) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitze, die folgenden:

1. Die Gleichung (2) hat die Form:

$$y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \cdots + \psi_m = 0, \tag{7}$$

worin $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_m$ ganze rationale Funktionen von y mit von x abhängigen Koeffizienten von der Beschaffenheit bedeuten, daß ψ_k höchstens vom Grade $2k$ in bezug auf y ist.

2. Ist $y = \eta$ eine Wurzel der Diskriminantengleichung, für welche die durch (7) definierte algebraische Funktion y' von y sich verzweigt, so ist η ein Integral der Gleichung (7). In der y' als algebraische Funktion von y darstellenden *Riemann*schen Fläche hat y' in sämtlichen über $y = \eta$ liegenden Verzweigungsstellen den Wert $y' = \xi = \frac{d\eta}{dx}$.

3. Je α Blättern, welche sich in $y = \eta$, $y' = \xi = \frac{d\eta}{dx}$ verzweigen, entsprechen mindestens $\alpha - 1$ mit $y = \eta$ zusammenfallende Wurzeln der Gleichung:

$$F(\xi, y, x) = 0$$

mit der Unbekannten y.

4. Setzt man $w = \frac{1}{y}$, so müssen für die transformierte Differentialgleichung auch die Bedingungen 2. und 3. erfüllt sein.

Speziell ergibt sich[10]), daß das Geschlecht p der algebraischen Gleichung (7) zwischen y und y' nicht $(m-1)^2$ übersteigen darf.

Wir wenden uns jetzt zur Charakterisierung der Integrale derjenigen Differentialgleichungen (7), für welche die Bedingungen 1. bis 4. erfüllt sind.

Es sei

$$y = \varphi(x, y_0', y_0, x_0)$$

ein Integral von (7), welches in x_0 den Wert y_0, und dessen erste Ab-

9) *L. Fuchs*, l. c., Ges. Werke 2, p. 364. Bezüglich der Bedingung 4. vgl. *M. J. M. Hill* und *A. Berry*, On differential equations with fixed branch points, London M. S. Proc. (2) 9 (1911), p. 231.

10) *G. Wallenberg*, Beitrag zum Studium der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung. Zeitschr. Math. Phys. 35 (1890), p. 193, 257, 321, insb. p. 340.

leitung daselbst den Wert y_0' annimmt, so daß

$$F(y_0', y_0, x_0) = 0 \tag{8}$$

ist. Einen anderen mit keinem Punkte ξ zusammenfallenden Punkt x verbinden wir mit x_0 durch einen festen, durch keinen Punkt ξ gehenden Weg. Dann sind für irgendeinen Punkt (y_0, y_0') der durch (8) festgelegten *Riemann*schen Fläche die beiden Größen:

$$y = \varphi(x, y_0', y_0, x_0), \quad \frac{dy}{dx} = \varphi'(x, y_0', y_0, x_0) \tag{9}$$

eindeutige Funktionen von y_0 und y_0', also nach dem zweiten Fundamentalsatz von *Painlevé* rationale Funktionen von y_0 und y_0' und folglich in der Form darstellbar:

$$\begin{cases} y = \gamma_{m-1}(x, y_0, x_0) y_0'^{m-1} + \cdots + \gamma_0(x, y_0, x_0), \\ y' = \delta_{m-1}(x, y_0, x_0) y_0'^{m-1} + \cdots + \delta_0(x, y_0, x_0), \end{cases} \tag{10}$$

wobei die γ und δ rationale Funktionen von y_0 sind. Da man in den Gleichungen (10) x_0 und y_0 mit x und y vertauschen kann, so stellen[11]) diese Gleichungen eine birationale Beziehung zwischen den durch die Gleichungen

$$F(y_0', y_0, x_0) = 0 \tag{8a}$$

und

$$F(y', y, x) = 0 \tag{8b}$$

dargestellten *Riemann*schen Flächen dar; x_0 und x sind dabei als Parameter aufzufassen. Ist nun p bei unbestimmtem x das Geschlecht der in y und y' algebraischen, irreduzibeln Gleichung $F(y', y, x) = 0$, so sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. $p > 1$; dann gibt es nur eine endliche Anzahl birationaler Transformationen, die (8a) in (8b) überführen; dieselben lassen sich algebraisch berechnen (vgl. das Ref. II B 2 (*Wirtinger*), Nr. **31** und **53**). Jede dieser Transformationen liefert das allgemeine Integral von (2), da sie aus (9) hervorgeht, indem man auf y_0' und y_0 eine birationale Transformation anwendet, die (8a) in sich überführt. Das allgemeine Integral ist also in diesem Falle eine algebraische Funktion der Koeffizienten von y und y' in (2)[11a]).

2. $p = 1$; dann läßt sich die Differentialgleichung algebraisch auf die Differentialgleichung[12]):

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = A(x)dx,$$

11) *H. Poincaré*, l. c., p. 23.

11a) Vgl. auch bezüglich der Ableitung dieses Satzes *E. Picard*, Traité d'Analyse II (1. Auflage), p. 436 und III p. 83; *P. Painlevé*, Vorlesungen, p. 93.

12) *H. Poincaré*, l. c., p. 7; vgl. auch *G. Wallenberg*, l. c., Abschnitt III.

wobei k^2 eine Konstante ist[13]), oder auf eine *Riccati*sche Differentialgleichung zurückführen. Man zeigt dieses, indem man y und y' als rationale Funktionen eines Parameters t und eines Radikals

$$\Theta = \sqrt{t(t-1)(t-2)(t-g(x))}$$

ausdrückt und die Differentialgleichung, der t als Funktion von x genügt, so bestimmt, daß t und Θ keine beweglichen Verzweigungspunkte besitzen. Eine andere Ableitung dieses Resultates erhält man durch Heranziehung der Eigenschaften der birationalen Transformationen.[14])

3. $p = 0$; dann kann man y und y' als rationale Funktionen eines Parameters t darstellen[15]); indem man ausdrückt, daß y' die Ableitung von y ist, erhält man für t als Funktion von x eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades in der Ableitung, welche keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzt, also eine *Riccati*sche Differentialgleichung ist.

Besonders einfach werden die Resultate für algebraische Differentialgleichungen der Form:

$$F(y', y) = 0, \tag{11}$$

d. h. für die sogenannten *Briot* und *Bouquet*schen Differentialgleichungen[16]), welche x nicht explizit enthalten. Da diese Differentialgleichungen $x = \infty$ als einzigen festen singulären Punkt haben, so ist ihr allgemeines Integral, wenn keine verschiebbaren Verzweigungspunkte auftreten, eine eindeutige Funktion von x. In diesem Falle[17]) ist das allgemeine Integral von (11) entweder eine doppeltperiodische Funktion von x oder eine rationale Funktion von e^{kx}, wo k eine Konstante ist, oder eine rationale Funktion von x. Das Geschlecht p von (11) ist dabei notwendigerweise 1 oder 0.

---

13) *P. Painlevé,* Vorlesungen, p. 66f. und *L. Schlesinger,* Differentialgleichungen, p. 285f., p. 296f.

14) *H. Poincaré,* l. c., p. 21.

15) *L. Fuchs,* l. c., p. 365; *H. Poincaré,* l. c., p. 4.

16) *Briot* und *Bouquet,* Recherches sur les fonctions doublement périodiques, Paris C. R. 40 (1855), p. 342; Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques, Journ. de l'Éc. pol. 21 (cah. 36) (1856), p. 199.

17) Vgl. hierzu *Ch. Hermite,* Cours lithographié de l'Éc. pol. (1873); *L. Fuchs,* Sur une équation différentielle de la forme $f\left(u, \frac{du}{dx}\right) = 0$, Paris C. R. 93 (1881), p. 1063; Ges. Werke, p. 283; *W. Raschke,* Über die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung durch eindeutige Funktionen, Dissertation Heidelberg 1883, Acta math. 14, p. 31; *E. Picard,* Traité III, p. 61; *L. Schlesinger,* Differentialgleichungen, S. 271.

Petrowitch[18]) stellt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, daß die Integrale einer Differentialgleichung (2) keine mit den Anfangswerden verschiebbaren Nullstellen oder Pole besitzen.

Historische Bemerkungen. Die Bestimmung eindeutiger analytischer Funktionen, welche durch algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung definiert sind, geht auf die Arbeiten *Abels* und *Jacobis* über die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2) \tag{13}$$

zurück. Den Satz, daß jede eindeutige doppeltperiodische Funktion, welche im Endlichen nur Pole als singuläre Stellen besitzt, einer algebraischen Differentialgleichung (11) genügt, hat *Méray*[19]) ausgesprochen.

Briot und *Bouquet*, die ebenso wie *Méray* Schüler von *Liouville* sind, sowie *Weierstrass* in seinen Vorlesungen untersuchten dann diejenigen algebraischen Differentialgleichungen der Form (11), deren allgemeines Integral eine eindeutige Funktion von x ist. *Hermite*[17]) wies als erster auf die Bedeutung des Geschlechtes p der algebraischen Gleichung (11) für das Integrationsproblem hin. *Fuchs*[1]) bestimmte dann in Verallgemeinerung der Fragestellung von *Briot* und *Bouquet*[16]) alle algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung der Form (2) mit festen Verzweigungspunkten und integrierte dieselben im Falle $p = 0$ und $p = 1$. *Poincaré*[7]) zeigte, daß die von *Fuchs* aufgestellten Differentialgleichungen keine neuen Transzendenten ergeben, indem er nachwies, daß sie für $p > 1$ algebraisch integrierbar sind. *Briot* und *Bouquet* sowie *Fuchs* berücksichtigten jedoch nicht das an sich mögliche Auftreten von verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen; erst *Painlevé* füllte durch den in Nr. 1 besprochenen ersten Fundamentalsatz diese Lücke aus. In ähnlicher Weise setzte *Poincaré* den zweiten Fundamentalsatz von *Painlevé* unbewiesen als selbstverständlich voraus.

3. Differentialgleichungen erster Ordnung, deren allgemeines Integral bei Umkreisung aller singulärer Stellen oder nur der verschiebbaren Verzweigungspunkte allein eine endliche Anzahl von Zweigen besitzt. Nächst denjenigen Differentialgleichungen (1), deren allgemeines Integral eine eindeutige Funktion von x ist, bzw. deren allgemeines Integral keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzt, sind die einfachsten diejenigen, deren allgemeines Integral n Werte annimmt, oder deren allgemeines Integral die Eigenschaft hat, daß

18) *M. Petrowitch*, l. c., p. 23.

19) Vgl. *Briot* und *Bouquet*, l. c., p. 129.

sich bei Umläufen um die verschiebbaren singulären Stellen allein n Zweige untereinander vertauschen.

Wir behandeln zuerst die Frage nach den n-wertigen Integralen und machen zunächst die Voraussetzung, daß $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ genau n Zweige besitze, wenn y_0 nicht einer abzählbaren Menge E angehört, für die y auch weniger Zweige haben kann. Wir sagen in diesem Falle, das Integral von (1) sei *im allgemeinen* n-wertig.[20]) Gehört dann $y_0 = b$ der Menge E nicht an, so sind die symmetrischen Funktionen der n Zweige von y eindeutige Funktion von y_0 und x_0 und haben nach dem zweiten Fundamentalsatz von *Painlevé* als Funktionen von y_0 in b höchstens Pole. Es genügt also y der Gleichung:

$$(14) \qquad y^n + A_{n-1}(x, y_0, x_0)y^{n-1} + \cdots + A_0(x, y_0, x_0) = 0,$$

wobei die Funktionen A eindeutige analytische Funktionen von x_0 und y_0 sind. Alle singulären Stellen der Funktionen A in bezug auf y_0, welche nicht Pole sind, gehören der abzählbaren Menge E an, und es besitzen daher die Funktionen A, wenn sie in bezug auf y_0 überhaupt singuläre Stellen außer Polen haben, mindestens einen *isolierten* wesentlich singulären Punkt. Dies ist aber unmöglich. Denn vertauscht man x mit x_0, so erhält man:

$$(15) \qquad y_0^n + A_{n-1}(x_0, y, x)y_0^{n-1} + \cdots + A_0(x_0, y, x) = 0,$$

so daß zu einem festen Wertesystem von x, y n Werte y_0 gehören, was, wie man leicht zeigt, im Widerspruch steht mit dem Satz von *Weierstraß* über das Verhalten einer eindeutigen Funktion in der Umgebung einer isolierten wesentlichen singulären Stelle (vgl. das Ref. II B 1 (*Osgood*), Nr. 4). Die Funktionen $A(x, y_0, x_0)$ sind also rationale Funktionen von y_0 und eindeutige Funktionen von x und x_0. Umgekehrt ist das Bestehen von (14) dafür hinreichend, daß jedes Integral von (1) höchstens n Zweige besitzt.

Eine analoge Betrachtung hat man anzustellen, wenn das Integral die Eigenschaft haben soll, daß im allgemeinen (im obigen Sinn) sich genau n seiner Zweige vertauschen, wenn x Umläufe um die verschiebbaren singulären Stellen allein macht. Man kann sich dabei

---

20) In den früheren Arbeiten von *P. Painlevé*, Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre, Ann. de l'Éc. norm. sup. (3) 8 (1891) und 9 (1892), und in den „Vorlesungen" benützt *Painlevé* für das Folgende das als zweiten Fundamentalsatz bezeichnete Theorem in der offenbar ungenauen Form, daß allgemein $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ als Funktion von y_0 nur algebraische Singularitäten besitzen kann. Richtig dargestellt sind dagegen die Verhältnisse bei *P. Boutroux*, Vorlesungen, p. 19, und speziell in der dort veröffentlichten Note von *Painlevé*, p. 145.

die Punkte ξ durch eine Linie verbunden denken, die nicht überschritten werden darf.[21]) Zweckmäßiger[22]) aber ist es, festzusetzen, daß x dann und nur dann auf einer geschlossenen Kurve C keinen Umlauf um einen Punkt ξ gemacht hat, wenn die Kurve C in einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne diesen Punkt ξ zu treffen.

Wie man auch diese Festsetzung treffen mag, so genügt y einer Gleichung (14), in der die Funktionen A rationale Funktionen von y_0 sind, aber als Funktionen von x die Punkte ξ als Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen besitzen können. Entsprechend gilt für die Differentialgleichung (2) der folgende Satz: Wenn das allgemeine Integral y von (2) die Eigenschaft hat, daß sich im *allgemeinen* genau n seiner Zweige bei Umläufen um die verschiebbaren singulären Stellen allein vertauschen, so genügt y der Gleichung:

$$(16)\quad y^n + A_{n-1}(x, y_0', y_0, x_0)y^{n-1} + \cdots + A_0(x, y_0', y_0, x_0) = 0,$$

in der die Funktionen A rationale Funktionen von y_0 und y_0' sind, während sie als Funktionen von x die festen Punkte ξ als Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen besitzen können. Umgekehrt besitzt ein Integral, das einer Gleichung der Form (16) genügt, die Eigenschaft, daß sich höchstens n seiner Zweige vertauschen, wenn x Umläufe um die verschiebbaren singulären Stellen allein macht.

Alle diese Fragen werden viel komplizierter, wenn man die Voraussetzung fallen läßt, daß nur bei abzählbar vielen Integralen an die Stelle von n eine kleinere Zahl treten kann. Einfache Beispiele[23]) zeigen, daß dann schon bei der Differentialgleichung (1) y eine transzendente Funktion von y_0 sein kann, obschon jedes Integral nur einen oder zwei Zweige besitzt. Dagegen geht aus dem in Nr. 4 zu besprechenden Theorem von *Malmquist* der Satz hervor, daß in dem Falle, in dem $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ auch rational von x abhängen, y eine algebraische Funktion von y_0 ist, wenn kein Integral mehr als n Zweige hat. *Painlevé*[24]) führt den Beweis hierfür auf funktionentheoretische Sätze zurück, die zum Teil selbst noch unbewiesen sind, zum Teil erst noch einer schärferen Fassung bedürfen. Aus den Untersuchungen von *Boutroux*[25]) über das Verhalten der Inte-

21) Diese Festsetzung findet sich bei *P. Painlevé*, l. c., Ann. de l'Éc. norm. sup. (3) 8 (1891), p. 34, und in den Vorlesungen von *P. Painlevé*, p. 42.

22) *P. Painlevé* bei *Boutroux*, p. 147, 159.

23) *P. Painlevé* bei *Boutroux*, p. 160.

24) *P. Painlevé* bei *Boutroux*, p. 164, vgl. auch *L. Zoretti*, l. c. Anm. 6), p. 39.

25) *P. Boutroux*, Sur les singularités des équations différentielles rationnelles du premier ordre et du premier degré, J. de Math. (6) 6 (1910), p. 137, insbes. p. 141.

grale in der Umgebung der festen singulären Stellen (vgl. Nr. 5) ergibt sich außerdem der entsprechende Satz in ziemlich umfassenden Fällen.

4. Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral eine algebraische Funktion der Integrationskonstante ist. Es seien in der Differentialgleichung (1) P und Q Polynome in bezug auf y vom Grade ν, beziehungsweise $\nu - 2$.

Ist dann das allgemeine Integral von (1) eine algebraische Funktion von x, so genügt es nach *Fuchs*[26]) einer Gleichung der Form:

$$R(y, x) = C,$$

wo R eine rationale Funktion von y ist. Wir nehmen nun entsprechend (14) allgemeiner an, es werde das allgemeine Integral der Differentialgleichung durch die bei allgemeinen x und x_0 irreduzible Gleichung:

$$(17) \qquad y^n + R_{n-1}(x, y_0, x_0)y^{n-1} + \cdots + R_0(x, y_0, x_0) = 0$$

gegeben, wobei die Funktionen R in bezug auf y_0 rationale Funktionen sind und in der x oder x_0-Ebene mit Ausnahme der Punkte ξ nur Pole besitzen. Vertauscht man x mit x_0, y mit y_0, so ergibt sich, daß die Funktionen $R(x_0, y, x)$ in bezug auf y höchstens vom Grade n sind, und als symmetrische Funktionen der n Werte, welche y_0 in x_0 annimmt, von y und x unabhängige Werte besitzen. Ist also $R_\varrho(x, y_0, x_0)$ einer der Koeffizienten von (17), welcher y_0 enthält, so genügt[27]) das allgemeine Integral einer Gleichung der Form:

$$(18) \qquad R_\varrho(x_0, y, x) = C.$$

Da (17) irreduzibel ist, so muß (17) mit (18) identisch sein, wenn wir (18) nach Wegschaffen des Nenners in der Form:

$$(19) \qquad y^n + \frac{\lambda_{n-1}(x) + C\mu_{n-1}(x)}{\lambda(x) + C\mu(x)} y^{n-1} + \cdots + \frac{\lambda_0(x) + C\mu_0(x)}{\lambda(x) + C\mu(x)} = 0$$

schreiben. Man kann durch eine lineare Substitution stets erreichen, daß in (19) der letzte Koeffizient C enthält. Setzt man dann:

$$(20) \qquad \frac{\lambda_0(x) + C\mu_0(x)}{\lambda(x) + C\mu(x)} = u(x),$$

26) *L. Fuchs,* Über eine Form, in welche sich das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung bringen läßt, wenn dasselbe algebraisch ist, Berlin Ber. (1884), p. 1171, Ges. Werke 2, p. 373, insb. p. 378.

27) *P. Painlevé,* Sur les intégrales des équations différentielles du premier ordre, possédant un nombre limité de valeurs, Paris C. R. 114 (1892), p. 107; Vorlesungen, p. 43 und 143; *P. Boutroux,* Vorlesungen, p. 20; *P. Painlevé* bei *Boutroux,* p. 149.

so ergibt sich durch Elimination von C für $u(x)$ eine *Riccati*sche Differentialgleichung:

$$\frac{du}{dx} = G(x)u^2(x) + H(x)u(x) + K(x); \tag{21}$$

statt der Gleichung (17) erhält man dann:

$$\begin{cases} y^n + (A_{n-1}(x) + uB_{n-1}(x))y^{n-1} + \cdots \\ \quad + (A_1(x) + uB_1(x))y + u = 0 \end{cases} \tag{22}$$

oder

$$u = -\frac{y^n + A_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + A_1(x)y}{B_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + B_1(x)y + 1} = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}. \tag{23}$$

Wenn also das allgemeine Integral von (1) einer Gleichung der Form (17) genügt, so läßt sich (1) durch eine Transformation der Form (23) in eine *Riccati*sche Differentialgleichung (21) überführen. Die Funktionen A, B, G, H und K ergeben sich durch rationale Operationen aus den Koeffizienten der gegebenen Differentialgleichung (1) und ihren Ableitungen.

Malmquist[88a]) behandelt direkt die Frage, wann die Differentialgleichung (1), deren rechte Seite eine rationale Funktion von x und y ist, ein nichtalgebraisches Integral mit einer endlichen Anzahl von Zweigen besitzt. Zu diesem Zwecke untersucht er ein System von Differentialgleichungen, dem die aus diesen Zweigen gebildeten elementaren symmetrischen Funktionen genügen und kommt zu dem schönen Satz: Besitzt eine solche Differentialgleichung (1) ein nichtalgebraisches Integral mit endlich vielen Zweigen, so läßt sie sich durch eine Transformation der Form (23) in eine *Riccati*sche Differentialgleichung überführen.

Um nun durch eine endliche Anzahl algebraischer Operationen zu entscheiden, wann sich eine vorgegebene Differentialgleichung (1), deren rechte Seite eine rationale Funktion von x und y ist, in eine *Riccati*sche Differentialgleichung durch eine Transformation (23) überführen läßt, hat man eine obere Schranke für die Zahl n zu bestimmen. Um eine solche zu erhalten, führt man in (23) für u den durch (20) gegebenen Wert ein und erhält:

$$C = \frac{p_1(x,y)}{q_1(x,y)}, \tag{24}$$

wobei p_1 und q_1 teilerfremde Polynome von y des Grades n sind, aber im Gegensatz zu p und q im allgemeinen nicht in algebraischer Weise von x abhängen. Durch Differentiation nach x erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q_1\frac{\partial p_1}{\partial x} - p_1\frac{\partial q_1}{\partial x}}{p_1\frac{\partial q_1}{\partial y} - q_1\frac{\partial p_1}{\partial y}} = \frac{p_2(x,y)}{q_2(x,y)}, \tag{25}$$

wobei man zeigen kann[27a]), daß $p_2(x, y)$ tatsächlich vom Grade $2n$ ist. Hat nun $p_2(x, y)$ mit $q_2(x, y)$ keinen Faktor der Form $y - \Theta(x)$ gemeinsam, so ergibt sich:

$$2n = \nu, \tag{26}$$

und man erhält die Funktionen A, B, G, H, K, indem man die Koeffizienten von y in $P(x, y)$ und $p_2(x, y)$ sowie in $Q(x, y)$ und $q_2(x, y)$ einander gleichsetzt. Haben jedoch $p_2(x, y)$, $q_2(x, y)$ einen Faktor $y - \Theta(x)$ gemeinsam, so genügt $y = \Theta(x)$ der Differentialgleichung (1). Der zu diesem Integrale gehörige Wert C_0 von C heißt ein „ausgezeichneter Wert" von C; $y = \Theta(x)$ ist eine mehrfache Wurzel von (24) und genügt der Gleichung $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, ist also eine algebraische Funktion von x, und ebenso ist das entsprechende Integral der *Riccati*schen Differentialgleichung eine algebraische Funktion. Gibt es nun nicht mehr als zwei ausgezeichnete Werte von C, so kann man durch eine endliche Anzahl von algebraischen Operationen die gestellte Frage entscheiden. Gibt es aber mehr als zwei ausgezeichnete Werte von C, so ist das allgemeine Integral der *Riccati*schen Differentialgleichung und damit das allgemeine Integral von (1), sofern es einer Gleichung der Form (17) genügt, eine algebraische Funktion von x. Ist daher das allgemeine Integral von (1) *keine* algebraische Funktion von x, so kann man durch eine endliche Anzahl algebraischer Operationen entscheiden, ob dasselbe einer Gleichung der Form (17) genügt. Weit schwieriger und überhaupt noch nicht völlig gelöst ist dagegen die Frage, wann das allgemeine Integral einer vorgegebenen Differentialgleichung (1) eine algebraische Funktion ist, also eine Gleichung der Form (24) befriedigt, wo p_1 und q_1 auch rationale Funktionen von x sind. Die Hauptschwierigkeit für eine Bestimmung einer oberen Schranke von n rührt daher, daß auch jede rationale Funktion von $\frac{p_1(x, y)}{q_1(x, y)}$ einen konstanten Wert hat, und man bisher kein allgemeines Kriterium dafür kennt, daß (24) irreduzibel ist. Immerhin gelingt es, aus der Differentialgleichung selbst Beziehungen zwischen der Ordnung, der Klasse und dem Geschlechte der Kurven des Büschels

$$p_1(x, y) - C q_1(x, y) = 0$$

aufzustellen und so in gewissen Fällen die gestellte Aufgabe zu lösen.[28])

27a) *P. Painlevé,* Vorlesungen p. 144.

28) *G. Darboux,* Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré, Bull. sc. math. (2) 2 (1878), p. 60 (vgl. zu dieser Arbeit das Ref. II 16 (*Vessiot*) der franz. Encyklop., p. 72); *P. Painlevé,* Sur les intégrales algébriques des équations différentielles du premier ordre,

A. Korkine, P. Painlevé, A. Cahen[29]) beschäftigen sich umgekehrt mit der Aufgabe, alle Differentialgleichungen (1) zu bestimmen, deren allgemeines Integral einer Gleichung der Form (17) genügt.

Wir wenden uns nun zu der Differentialgleichung (2), von der wir annehmen, daß ihre linke Seite auch rational von x abhängt, und daß ihr allgemeines Integral einer Gleichung der Form (16) genügt, wobei die Funktionen A rationale Funktionen von y_0' und y_0 sind und als Funktionen von x und x_0 nur die festen Stellen ξ als Unbestimmtheitsstellen und Verzweigungspunkte besitzen. Vertauscht man x mit x_0, y mit y_0, so ergibt sich ähnlich wie bei (18) für das allgemeine Integral von (2) eine Gleichung der Form:

$$r(x_0, y', y, x) = \bar{r}(y, x) = C, \tag{27}$$

wobei r als Funktion von x nur in den Punkten ξ Unbestimmtheitsstellen und Verzweigungspunkte haben kann. Man kann nun stets[30]) eine zweite Funktion, etwa

$$\frac{\partial r(x_0, y', y, x)}{\partial x_0} = \bar{r}_1(y, x) = C_1 \tag{27a}$$

wählen, so daß C und C_1 durch eine x_0 als Parameter enthaltende algebraische Gleichung:

$$\sigma(C, C_1) = 0, \tag{28}$$

die bei allgemeinem x_0 vom Geschlecht ω sei, verbunden sind, und daß alle Integrale der Form (27), also speziell die Funktionen $A(x_0, y', y, x)$ sich rational durch r und $\frac{dr}{dx_0}$ ausdrücken lassen. Setzt man dann:

$$u = r(x, y_0', y_0, x_0), \qquad u' = \frac{dr(x, y_0', y_0, x_0)}{dx}, \tag{29}$$

Paris C. R. 110 (1890), p. 945; Bericht über die Preisarbeiten von *L. Autonne* und *P. Painlevé*, Paris C. R. 111 (1890), p. 1021. — Die Arbeit von *L. Autonne* ist unter dem Titel Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré, Journ. de l'Éc. pol. 61 (1891), p. 35; 62 (1892), p. 47, Ann. univ. Lyon III 1 (1892) veröffentlicht; vgl. ferner die Arbeiten des gleichen Verfassers Journ. de l'Éc. pol. 63 (1893), p. 79; 64 (1894), p. 1, (2) 2 (1897), p. 51; 3, p. 1. Die diesbezüglichen Untersuchungen von *P. Painlevé* finden sich in der unter [20]) zitierten Arbeit, insbes. Ann. de l'Éc. norm. sup. 9, p. 288; ferner in den Vorlesungen, p. 173. Vgl. ferner *H. Poincaré*, Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré, Paris C. R. 112 (1891), p. 761, Pal. Rend. 5 (1891), p. 161 und 11 (1897), p. 193.

29) *A. Korkine*, Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre, Paris C. R. 122 (1896), p. 1183; Math. Ann. 48 (1896), p. 317; *P. Painlevé*, Paris C. R. 122 (1896), p. 1319; Toulouse Ann. 10 G (1896); Vorlesungen, p. 151; *A. Cahen*, Sur la formation explicite des équations différentielles du premier ordre, Thèse Paris 1899, Toulouse Ann. (2) 1, p. 239; vgl. auch Paris C. R. 127 (1898), p. 1196.

30) *P. Painlevé*, l. c., Ann. de l'Éc. norm. (3) 8, p 41; Vorlesungen, p. 78.

so folgt aus (28) nach Vertauschung von x_0 mit x, daß sich die Differentialgleichung unter den obigen Voraussetzungen auf algebraischem Wege in die algebraische Differentialgleichung:

$$\sigma(u, u') = 0 \tag{30}$$

überführen läßt, welche im allgemeinen x explizite enthält, aber keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzt. Haben die algebraischen Gleichungen (2) und (28) das gleiche Geschlecht und ist dieses > 0, so hat die Differentialgleichung (2) nur feste Verzweigungspunkte.[31])

Um nun die Frage zu entscheiden, wann umgekehrt das allgemeine Integral einer gegebenen Differentialgleichung (2) eine Gleichung der Form (16) befriedigt[32]), ohne daß n vorgegeben sei, hat man drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Geschlecht der noch unbekannten algebraischen Gleichung (28) $\geqq 2$, 1 oder 0 ist. Nach den Transformationsgleichungen (27) und (27a) entspricht jedem zu der Gleichung (28) gehörigen *Abel*schen Integrale erster Gattung $\int \frac{Q_i(C, C_1)\, dC}{\sigma'_{C_1}}$ ein zu der algebraischen Gleichung $F(y', y, x) = 0$ gehöriges *Abel*sches Integral erster Gattung. Ist p das Geschlecht von $F(y', y, x) = 0$ bei allgemeinem x, das als Parameter aufzufassen ist, so läßt sich dieses letztere Integral linear aus p Integralen $\int \frac{P_j(y', y, x)}{F'_{y'}}\, dy$ zusammensetzen vermittelst Koeffizienten λ_j, die analytische Funktionen von x sind, so daß also

$$\frac{Q(C, C_1)}{\sigma'_{C_1}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = \frac{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p P_p}{F'_{y'}}$$

ist. Die nach y' aufgelöste Differentialgleichung (2)

$$dy - f(y, x)\, dx = 0$$

hat nun $\frac{\partial \bar{r}}{\partial y}$ und damit $\frac{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_p P_p}{F'_{y'}}$ als Multiplikator, und es entsteht die Aufgabe, die Funktionen λ_j entsprechend zu bestimmen. Man erhält auf diese Weise ein System von linearen homogenen Relationen zwischen den Größen λ_j und $\frac{d\lambda_j}{dx}$. Besitzt dieses System zwei wesentlich verschiedene Lösungssysteme λ_j, μ_j, so genügt das allgemeine Integral von (2) tatsächlich einer Gleichung der Form:

$$\frac{\lambda_1 P_1(y', y, x) + \cdots + \lambda_p P_p(y', y, x)}{\mu_1 P_1(y', y, x) + \cdots + \mu_p P_p(y', y, x)} = C,$$

und das Geschlecht ω von (28) ist $\geqq 2$.

31) *P. Painlevé,* l. c., Ann. de l'Éc. norm. (3) 8, p. 211; Vorlesungen, p. 120.

32) *P. Painlevé,* l. c., Ann. de l'Éc. norm. (3) 8, p. 201; 9, p. 283; ferner: Sur les intégrales des équations du premier ordre qui n'admettent qu'un nombre fini de valeurs, Paris C. R. 114 (1892), p. 280; Vorlesungen, p. 111, 155.

Existiert nur ein einziges Lösungssystem, so läßt sich die Frage auf die entsprechende für eine *Briot* und *Bouquet*sche Differentialgleichung zurückführen; auf die Schwierigkeiten, welche bei der Beantwortung dieser Frage für diese letztere auftreten, soll weiter unten eingegangen werden.

Existiert kein gemeinschaftliches Lösungssystem, so bleibt zu untersuchen, ob nicht eine algebraische Gleichung der Form (28) vom Geschlechte 0 existiert, und diese Untersuchung geht ziemlich analog wie oben für den Fall der Differentialgleichung (1). Existiert nämlich kein oder nur ein ausgezeichneter Wert C, so läßt sich für n eine obere Schranke angeben. Existieren zwei ausgezeichnete Werte, so läßt sich entweder ebenfalls eine obere Schranke für n angeben, oder es läßt sich die Frage auf die entsprechende bei einer *Briot* und *Bouquet*schen Differentialgleichung zurückführen; existieren mehr als zwei ausgezeichnete Werte, so ist das allgemeine Integral von (2) algebraisch, und es entstehen dieselben Schwierigkeiten wie bei der Differentialgleichung (1).

Indem wir uns nun speziell zu den *Briot* und *Bouquet*schen Differentialgleichungen wenden, wollen wir kurz die Eigenschaften ihrer Integrale ableiten, wenn das allgemeine Integral bei Umläufen um die verschiebbaren singulären Stellen n Werte annimmt[33]). Da diese Differentialgleichungen nur $x = \infty$ als festen singulären Punkt besitzen, so ist in diesem Fall das allgemeine Integral n-wertig und genügt einer Gleichung der Form:

$$y^n + A_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + A_1(x)y + A_0(x) = 0, \tag{31}$$

wo die A eindeutige Funktionen von x sind. Aus (11) ergibt sich x als *Abel*sches Integral:

$$x = \int f(y)dy = J(y), \tag{32}$$

und die Funktionen $A(x)$ dürfen sich nicht ändern, wenn man x um eine Periode ω dieses Integrals vermehrt. Es sind dann folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1. $J(y)$ hat keine Periode; dann ist x eine m-wertige Funktion von y, genügt also einer algebraischen Gleichung $G(x, y) = 0$ vom

33) *Briot* und *Bouquet*, l. c., p. 205; vgl. auch *E. Phragmén*, Zur Theorie der Differentialgleichungen von *Briot* und *Bouquet*, Stockh. Öfv. 48 (1891), p. 623 und *P. Koebe*, Über diejenigen analytischen Funktionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Mathematische Abhandlungen *H. A. Schwarz* zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet 1914, p. 209. Die folgende Darstellung schließt sich an die von *P. Painlevé*, Vorlesungen, p. 130 gegebene an.

Grade m in x, vom Grade n in y, wobei m der Grad der irreduziblen algebraischen Gleichung (11) in bezug auf y' ist.

2. $J(y)$ hat nur eine Periode ω; dann ist $u = e^{\frac{2\pi i}{\omega}x} = \varphi(y)$ eine m-wertige Funktion von y. Damit nun φ keine wesentlichen singulären Stellen besitze, muß $J(y)$ ein Integral erster oder dritter Gattung sein. Ferner müssen die zu den Polen von $f(y)$ bzw. zu $y = \infty$ gehörigen Residuen α untereinander, und die nicht zu den logarithmischen Stellen gehörigen Perioden mit $2\pi i\alpha$ rationale Verhältnisse haben. y ist dann eine algebraische Funktion von u.

3. $J(y)$ hat zwei Perioden; ihr Verhältnis muß komplex sein, da die eindeutigen Funktionen $A(x)$ diese Größen als Perioden besitzen. Das Integral y ist dann eine algebraische Funktion von $u = \mathrm{sn}_{k^2} gx$, wo g und k geeignete Konstanten sind. Setzt man

$$dx = \frac{du}{g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = f(y)dy,$$

so folgt, daß J ein Integral erster Gattung sein muß, das nur zwei Perioden besitzen darf.

Es entsteht nun umgekehrt die Frage, wann eine vorgegebene *Briot* und *Bouquet*sche Differentialgleichung sich in der angegebenen Form integrieren läßt. Während sich im ersten Falle leicht eine obere Schranke für n angeben, also die Frage durch eine endliche Anzahl algebraischer Operationen entscheiden läßt, ist die Frage im zweiten Fall außerordentlich schwierig, wenn nicht alle Perioden, die nicht zu logarithmischen Unstetigkeitsstellen von $J(y)$ gehören, von vorneherein verschwinden, was sicher der Fall ist, wenn das Geschlecht der Gleichung (11) Null ist. Schon im Falle $p = 1$ kommt man auf zahlentheoretische Schwierigkeiten[34]), und Analoges gilt im allgemeinen im dritten Falle, sobald $p > 1$ ist.

5. Untersuchung der Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes, in dessen Umgebung sich unendlich viele Zweige eines Integrales untereinander vertauschen. Grenzlösungen. Es handelt sich im folgenden um die von *P. Boutroux*[35]) in Angriff genommene Aufgabe, die Gesamtheit der Zweige eines Integrals von (1),

34) Vgl. das Ref. II B 3 (*Fricke*), p. 343, Anm. 436, 437.

35) *P. Boutroux*, Sur une classe d'équations différentielles à intégrales multiformes, Paris C. R. 138 (1904), p. 1479; 139 (1904), p. 258; ferner Paris C. R. 147 (1908), p. 1390; 148 (1909), p. 25, 274, 613; außerdem Vorlesungen und Équations différentielles et fonctions multiformes, Pal. Rend. 29 (1910), p. 265; Sur les singularités des équations différentielles rationnelles du premier ordre et du premier degré, J. de Math. (6) 6 (1910), p. 137.

die in der Umgebung einer festen singulären Stelle zusammenhängen, zu betrachten und den „Mechanismus" festzustellen, nach welchem ihre Vertauschungen vor sich gehen. Wir greifen von allen möglichen von *Boutroux* untersuchten Typen den einfachsten heraus, bei dem die Differentialgleichung in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ die Form[36]) hat:

$$(33) \qquad y\frac{dy}{dx} = \alpha x + \beta y + \mu[a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + \cdots].$$

Dabei ist μ ein von *Boutroux* eingeführter Parameter, der von 0 nach 1 wächst. Für $\mu = 0$ ist das allgemeine Integral in der Form[37]):

$$(34) \qquad y = xw$$

darstellbar, wobei

$$Cx = (w - w_1)^{\frac{1}{\lambda_1}}(w - w_2)^{\frac{1}{\lambda_2}} = \frac{1}{w - w_2}\left(\frac{w - w_1}{w - w_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}$$

ist. Dabei sind w_1 und w_2 Wurzeln der Gleichung:

$$-2w^2 + \beta w + \alpha = 0,$$

ferner ist C eine Konstante und

$$\lambda_1 = -2 + \frac{\beta}{2w_1}, \quad \lambda_2 = -2 + \frac{\beta}{2w_2}, \quad \text{also } \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = -1.$$

Von den neun möglichen Fällen greifen wir den heraus, in welchem λ_1 und λ_2 komplex sind und der reelle Teil von $\frac{1}{\lambda_1}$, also auch von λ_1 positiv ist. Nehmen wir ferner beispielshalber an, daß der reelle Teil von $\frac{1}{\lambda_1}$ zwischen 1 und 2 liegt, dann nimmt y in $x = 0$ zwei Serien von Werten an:

a) $$\ldots C^{-1}e^{\frac{-2i\pi}{\lambda_1}}, \quad C^{-1}, \quad C^{-1}e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1}}, \ldots$$

die entsprechenden Zweige sind in $x = 0$ analytisch, wir bezeichnen sie mit $\ldots, y_{-1}, y_0, y_1 \cdots$;

b) $$\ldots 0, \quad 0, \quad 0 \ldots,$$

die entsprechenden Zweige vertauschen sich bei Umläufen um $x = 0$, wir bezeichnen sie mit $\ldots, \bar{y}_{-1}, \bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots$.

Die verschiebbaren Verzweigungspunkte sind $Cx = -\frac{1}{w_2}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}$,

---

36) Auf diese Form läßt sich die Differentialgleichung (1) stets bringen, wenn $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$, $\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} \neq 0$ ist. *P. Boutroux*, Vorlesungen, Kap. IV, nennt einen solchen Punkt *Briot* und *Bouquet*schen Punkt. Wir nehmen noch $\alpha \neq 0$ an.

37) *P. Boutroux*, Vorlesungen, p. 67, 70.

ist also x_0 einer von ihnen, so sind die anderen

$$\ldots, x_{-1} = x_0 e^{\frac{-2i\pi}{\lambda_1}}, \quad x_1 = x_0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1}}, \quad x_2 = x_1 e^{\frac{2\pi i}{\lambda_1}}, \ldots.$$

Beschreibt dann x von 0 ausgehend eine Schleife um x_0 bzw. x_1 usf., so geht y_0 in $\bar{y}_0$ bzw. y_1 in $\bar{y}_1$ über usf. Verbindet man daher $x = 0$ mit $x = \infty$ durch eine Gerade, die durch keinen der Punkte x_j geht, und konstruiert eine ∞-blättrige *Riemann*sche Fläche, deren Blätter längs dieses Schnittes zusammenhängen, so besitzt y in jedem dieser Blätter einen einzigen Verzweigungspunkt x_j, in dem zwei Zweige y_j und $\bar{y}_j$ zusammenhängen. Nachdem *Boutroux* dann bei allgemeinem, zwischen 0 und 1 gelegenem Werte von μ das Verhalten der „Charakteristiken", d. h. nach *Boutroux* das Verhalten eines Zweiges des Integrals längs einer geraden Linie, die von einem festen Punkt ausgeht, in welchem der betreffende Zweig einen bestimmten Anfangswert hat, in der Umgebung von $x = 0$ näher untersucht hat, zeigt er durch stetigen Übergang von $\mu = 0$ zu $\mu = 1$, daß auch für $\mu = 1$ das gleiche Schema für die Vertauschung der Zweige in der Umgebung von $x = 0$ gilt. Entsprechend untersucht *Boutroux* alle bei Differentialgleichungen (1) vorkommenden Singularitäten und gewinnt so einen sehr allgemeinen Satz[38]), aus dem sich die in Nr. 3 angegebenen Schlußfolgerungen ziehen lassen. Ähnliche Stetigkeitsbetrachtungen lassen sich auch bei der Frage der Vertauschung der Zweige bei Umläufen um mehrere singuläre Punkte anwenden.

Wir betrachten nun wieder die Integrale in der ganzen komplexen x-Ebene und nehmen an, ein Integral von (1) besitze unendlich viele Zweige. Dann kann man aus diesem Integral ein neues Integral, eine sogenannte Grenzlösung[39]), die in gewisser Hinsicht eine Verallgemeinerung der sogenannten Grenzzykeln aus der Theorie der reellen Integralkurven (vgl. das Ref. III D 8 (*Liebmann*), Nr. 6) darstellt, in folgender Weise ableiten:

Es sei x_1 keiner der Punkte ξ, es seien ferner $y_1(x_1), y_2(x_1), \ldots$ die Werte der verschiedenen Zweige von $y(x)$ in x_1, z ein Grenzwert dieser Größen, $y(x, x_1, z)$ das Integral von (1), das in x_1 den Wert z annimmt. Dann liegen für jeden von den Punkten ξ verschiedenen Punkt x_2 in beliebiger Nähe des auf irgendeinem Wege erhaltenen Wertes $y(x_2, x_1, z)$ von $y(x, x_1, z)$ unendlich viele der Werte $y_1(x_2)$,

38) *P. Boutroux,* l. c., J. de Math. (6) 6, p. 139, 140.

39) *P. Boutroux,* Fonctions multiformes à une infinité de branches, Ann. Éc. norm. (3) 22 (1905), p. 441 f.; Vorlesungen, p. 25.

$y_2(x_2), \ldots$; man hat dann in $y(x, x_1, z)$ eine Grenzlösung. *J. Slepian*[40]) zeigt durch Anwendung eines von *Birkhoff* gegebenen Verfahrens, daß es stets Folgen von Integralen gibt, die die Grenzlösungen jedes ihrer Glieder enthalten, und von denen jedes Glied eine Grenzlösung eines der Folge angehörenden Integrals ist. Eine solche Folge nennt *Slepian* ein zyklisches System.

II. Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung.

6. Abhängigkeit der Integrale von den Integrationskonstanten. (Vgl. hierzu auch das Ref. II A 4b (*Vessiot*), Nr. **32** und den entsprechenden Artikel der franz. Enc. II 16, Nr. **36**.) Es sei die linke Seite der Differentialgleichung:

$$F(y'', y', y, x) = 0 \tag{35}$$

ein Polynom in y, y' und y'', analytisch in x, und das allgemeine Integral von (35) sei zunächst eine rationale Funktion der Integrationskonstanten y_0, y_0', y_0'', die durch die Gleichung:

$$F(y_0'', y_0', y_0, x_0) = 0 \tag{36}$$

verbunden sind. Ist also y ein Integral von (35), für welches

$$y(x_0) = y_0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = y_0', \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} = y_0''$$

ist, und setzen wir

$$\begin{gathered} y = \varphi(x, y_0'', y_0', y_0, x_0), \quad \frac{dy}{dx} = y' = \varphi'(x, y_0'', y_0', y_0, x_0), \\ \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \varphi''(x, y_0'', y_0', y_0, x_0), \end{gathered} \tag{37}$$

so sind φ, φ' und φ'' rationale Funktionen von y_0, y_0', y_0''. Durch Vertauschung von x mit x_0 folgt:

$$\begin{gathered} y_0 = \varphi(x_0, y'', y', y, x), \quad y_0' = \varphi'(x_0, y'', y', y, x), \\ y_0'' = \varphi''(x_0, y'', y', y, x). \end{gathered} \tag{38}$$

Die Gleichungen (37) und (38) stellen also eine birationale Beziehung zwischen den Flächen (35) und (36) dar, in deren Gleichungen x und x_0 als Parameter aufzufassen sind. Daraus ergibt sich für die von x abhängigen Koeffizienten der in (37) auftretenden Funktionen φ, φ' und φ'' ein System algebraischer Bedingungsgleichungen, die unter den gemachten Voraussetzungen miteinander verträglich sein müssen. Besitzt nun dieses System nur eine endliche Anzahl von Lösungen, gibt es also nur endlich viele birationale Transformationen,

40) *J. Slepian*, The functions defined by differential equations of the first order, Trans. of Am. Math. Soc. 16 (1915), p. 71.

welche die durch (36) definierte algebraische Fläche in sich überführen, so erhält man alle birationalen Transformationen, die (35) in (36) überführen, auf algebraische Weise aus den Koeffizienten von (35) und jede dieser birationalen Transformationen stellt das allgemeine Integral der Differentialgleichung dar. In der Tat lassen sich alle birationalen Transformationen, die (35) in (36) überführen, aus einer von ihnen, also etwa aus (37) ableiten, indem man auf y_0, y_0', y_0'' birationale Transformationen anwendet, die (36) in sich überführen, also keinen Parameter enthalten. Bleibt aber durch das obige Gleichungssystem ein Teil der von x abhängigen Koeffizienten der φ unbestimmt, so gibt es eine kontinuierliche, algebraisch von den Parametern abhängende Gruppe birationaler Transformationen, welche die algebraische Fläche (36) in sich überführen. Die Flächen von dieser Beschaffenheit lassen sich aber alle bestimmen (vgl. das Ref. III C 6b (*Castelnuovo* und *Enriques*), Nr. **39**), und aus ihren speziellen Eigenschaften folgt, daß sich die Differentialgleichung (35) dann entweder auf algebraischem Wege integrieren oder auf Quadraturen oder eine *Riccati*sche Differentialgleichung oder eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung zurückführen läßt.

Der Fall, daß F die Veränderliche x nicht explizit enthält, ferner derjenige, in dem die durch (35) dargestellte Fläche eine hyperelliptische oder ihr Flächengeschlecht (vgl. das Ref. II B 2 (*Wirtinger*), Nr. **56** und **57**) $\omega > 1$ ist, wurde von *Picard*[41]) behandelt; eine Behandlung des allgemeinen Falles findet sich bei *Painlevé*.[42])

Umgekehrt kann man, wenn das Flächengeschlecht ω von F größer ist als 1, vermittels der Doppelintegrale erster Art analog wie in Nr. **4** durch eine endliche Anzahl von algebraischen Prozessen entscheiden, ob das allgemeine Integral einer vorgegebenen Differentialgleichung (35) rational von y_0, y_0', y_0'' abhängt. In ähnlicher Weise kann man die allenfalls vorhandenen totalen Differentiale erster Art ausnützen; besitzt aber die algebraische Fläche weder Doppelintegrale

41) *E. Picard,* Sur une classe d'équations différentielles, Paris C. R. 104 (1887), p. 41; Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables, J. de Math. (4) 5 (1889), p. 263, 294; ferner: Sur une classe d'équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, Paris C. R. 110 (1890), p. 877. In dieser letzteren Arbeit untersucht *Picard* unter der Voraussetzung, daß das allgemeine Integral eine eindeutige Funktion von x ist, Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung, welche x nicht explizite enthalten.

42) *P. Painlevé,* Sur les équations différentielles d'ordre supérieur dont l'intégrale n'admet qu'un nombre donné de déterminations, Paris C. R. 116 (1893), p. 173; Sur les surfaces algébriques qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles, Paris C. R. 121 (1895), p. 318; Vorlesungen, p. 360.

erster Art noch totale Differentiale erster Art, so ist es außerordentlich schwierig, die Frage zu entscheiden.[43])

Hängt das allgemeine Integral von (35) algebraisch von den durch (36) verbundenen Werten y_0, y_0', y_0'' ab, so läßt[44]) sich (35) durch eine algebraische Transformation:

$$y^n + \varrho_{n-1}(u'', u', u, x)y^{n-1} + \cdots + \varrho_0(u'', u', u, x) = 0, \tag{39}$$

in der die ϱ rationale Funktionen von u, u', u'' sind, in eine Differentialgleichung:

$$G(u'', u', u, x) = 0 \tag{40}$$

überführen, deren allgemeines Integral eine rationale Funktion von u_0, u_0', u_0'' ist. Dabei ist G ein Polynom in u'', u' und u, dessen Koeffizienten sich algebraisch aus denen von (35) berechnen lassen.

Die umgekehrte Frage, wann das allgemeine Integral von (35) eine algebraische Funktion von y_0 und y_0' ist, hängt auf das engste mit dem Flächengeschlecht von G zusammen, ist aber im übrigen sehr schwierig zu beantworten.

Ähnliche Verhältnisse wie bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung herrschen bei Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung, deren allgemeines Integral eine algebraische Funktion der Integrationskonstanten ist.

Wir wenden uns jetzt zu dem Fall, wo das allgemeine Integral von (35) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte oder Unbestimmtheitsstellen besitzt. Dann sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Das allgemeine Integral hängt algebraisch von zwei geeignet gewählten Integrationskonstanten ab. Dieser Fall läßt sich unmittelbar auf den eben behandelten zurückführen.

2. Das allgemeine Integral ist bei geeignet gewählten Integrationskonstanten eine algebraische Funktion der einen Integrationskonstanten, aber eine transzendente Funktion der anderen, und bei keiner Wahl der Integrationskonstanten eine algebraische Funktion von beiden. Dann ist das allgemeine Integral nach *Painlevé*[45]) eine „semitranszen-

43) *P. Painlevé,* Vorlesungen, p. 383.

44) *P. Painlevé,* Sur les transformations simplement rationnelles des surfaces, Paris C. R. 110 (1890), p. 226; Sur les équations différentielles d'ordre supérieur, dont l'intégrale n'admet qu'un nombre fini de déterminations, Paris C. R. 116 (1893), p. 88.

45) *P. Painlevé,* Sur les transcendantes définies par les équations différentielles du second ordre, Paris C. R. 116 (1893), p. 566; Sur les équations du second ordre à points critiques fixes et sur la correspondence univoque entre deux surfaces, Paris C. R. 117 (1893), p. 611. Es finden sich hier auch Kriterien,

dente“ Funktion der Integrationskonstanten und genügt einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung mit festen Verzweigungspunkten, welche algebraisch von einem Parameter abhängt, gehört also in die Gruppe der im ersten Abschnitt behandelten Funktionen.

3. Das allgemeine Integral ist eine transzendente Funktion der beiden Integrationskonstanten, wie man auch diese wählen mag. Dann ist die Differentialgleichung in dem von *Painlevé*[46]) vom Standpunkte der Funktionentheorie aus festgelegten Sinne irreduzibel.

Ein einfaches Beispiel[47]) einer Differentialgleichung, deren allgemeines Integral eine transzendente Funktion der beiden Integrationskonstanten ist, ist:

$$y'' = y'^2 \frac{3y^2 - 2y(x-1) + x}{2y(y-1)(y-x)} + y'\left[\frac{1}{x-y} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right] + \frac{1}{2x(x-1)} \frac{y(y-1)}{y-x} + X(x)\sqrt{y(y-1)(y-x)}, \tag{41}$$

wobei $X(x)$ eine algebraische Funktion von x ist. Das allgemeine Integral von (41) ist:

$$y = \varphi_x(u), \tag{42}$$

wo

$$y = \varphi_x(\xi)$$

die durch

$$\xi = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-x)}}$$

definierte elliptische Funktion ist, während $u(x)$ das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2x-1}{x(x-1)} \frac{du}{dx} + \frac{u}{4x(x-1)} = X(x)$$

bedeutet.

7. Auftreten von verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen bei Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung. Die Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung können, wie schon in der Einleitung an Beispielen gezeigt wurde, Unbestimmtheitsstellen besitzen, die mit den Anfangswerten der Integrale verschiebbar

um zu erkennen, ob das allgemeine Integral einer vorgegebenen Differentialgleichung eine „semitranszendente“ Funktion der Konstanten ist.

46) *P. Painlevé,* Vorlesungen, p. 487; Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, S. M. F. Bull. 18 (1900), p. 243.

47) *E. Picard,* Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables, J. de Math. (4) 5 (1889), p. 299; *P. Painlevé,* Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, Paris C. R. 117 (1893), p. 686; Vorlesungen, p. 501.

sind. Doch müssen, damit dieses eintreten kann, die Koeffizienten der Differentialgleichung, wie *Painlevé*[48]) zuerst bemerkte, gewisse Bedingungen erfüllen. Um dieses für die Differentialgleichung zweiter Ordnung näher auszuführen, betrachten wir die Differentialgleichung:

$$y'' = \frac{P(y', y, x)}{Q(y', y, x)} = R(y', y, x), \tag{43}$$

in welcher P und Q ganze rationale Funktionen von y, y' und x sind, und denken uns durch eine vorhergegangene lineare gebrochene Transformation erreicht, daß $y = \infty$ ein gewöhnlicher Punkt der Differentialgleichung sei[49]), und daß, wenn p der Grad von P, q der Grad von Q in bezug auf y' ist, $p \geqq q + 2$ sei. Dann hat man vier Fälle zu unterscheiden:

1. Es ist $p > q + 2$, und es gibt keine Funktion $y = G(x)$, so daß die rechte Seite von (43) für $y = G(x)$ bei beliebigem y' einen Pol hat[49a]). Dann besitzt das allgemeine Integral von (43) keine verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen, d. h. nähert sich x irgendeinem von den festen singulären Stellen von (43) verschiedenen Punkte x_0, so nähern sich y und y' bestimmten endlichen oder unendlich großen Werten.

2. Es gibt eine Funktion $y = G(x)$, so daß die rechte Seite von (43) für $y = G(x)$ unabhängig von y' einen Pol hat, aber es ist $p > q + 2$. Dann kann es mit den Anfangswerten verschiebbare Punkte x_0 geben, so daß y' bei Annäherung an x_0 nach keinem bestimmten Werte konvergiert, d. h. daß y' in x_0 eine Unbestimmtheitsstelle besitzt; y nähert sich dagegen unbegrenzt einem der Werte von $G(x_0)$.

3. Es ist $p = q + 2$, aber es existiert keine Funktion $y = G(x)$. Dann kann y in einem Punkte x_0 eine verschiebbare Unbestimmtheitsstelle besitzen, y' konvergiert dagegen bei Annäherung an x_0 nach ∞.

48) *P. Painlevé,* Sur les singularités essentielles des équations différentielles d'ordre supérieur, Paris C. R. 116 (1893), p. 362; Sur les transcendantes définies par les équations différentielles du second ordre, Paris C. R. 116 (1893), p. 566; Vorlesungen, p. 394, speziell auch p. 413.

49) Setzt man in der Differentialgleichung (43) $y = \frac{1}{z}$, so daß (43) übergeht in $z'' = \frac{P_1(z', z, x)}{Q_1(z', z, x)}$, so soll $Q_1(z', 0, x)$ nicht identisch verschwinden, ferner sollen $P_1(0, 0, x)$, $Q_1(0, 0, x)$ nicht beide identisch verschwinden.

49a) Ist $y = \infty$ kein gewöhnlicher Punkt, und ist nach der Transformation $y = \frac{1}{z}$, $Q_1(z', 0, x) \equiv 0$, so ist $y = \infty$ auch als eine Funktion $y = G(x)$ anzusehen.

4. Es ist $p = q + 2$, und es existieren Funktionen $y = G(x)$ Dann können y und y' verschiebbare Unbestimmtheitsstellen besitzen; ist x_0 eine solche, so konvergiert bei Annäherung an x_0 der kleinere der absoluten Beträge von $\frac{1}{y'}$ und $y - G(x)$ nach Null.

Das allgemeine Integral von (43) kann also nur dann verschiebbare Unbestimmtheitsstellen besitzen, wenn wenigstens eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:

1. Es ist $p = q + 2$.

2. Es existiert eine Funktion $G(x)$, daß $Q(y', G(x), x)$ für jeden Wert von y' identisch verschwindet.

Painlevé[50]) stellt ferner den Satz auf, daß das allgemeine Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die algebraisch in x, y, y' und y'' ist, keine singuläre Linie besitzen kann; es ist auch unwahrscheinlich, daß die verschiebbaren singulären Punkte eine perfekte diskontinierliche Menge bilden können.

Ähnliche Bedingungen für das Auftreten verschiebbarer Unbestimmtheitsstellen lassen sich bei Systemen algebraischer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung angeben. Aus diesen Bedingungen folgert *Painlevé*[51]), daß man bei jedem Systeme algebraischer Differentialgleichungen durch Einführung einer geeigneten unabhängigen Veränderlichen das Auftreten verschiebbarer Unbestimmtheitsstellen verhindern kann; steht aber wie bei den in der Mechanik auftretenden Differentialgleichungen die Wahl der unabhängigen Veränderlichen nicht mehr frei, so kann man von einem reellen System algebraischer Differentialgleichungen zu einem anderen System durch eine algebraische Transformation unter Beibehaltung der unabhängigen Veränderlichen so übergehen, daß das neue System keine verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen besitzt.

8. Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung ohne verschiebbare Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen. Um die Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung aufzustellen, deren allgemeines Integral eine eindeutige Funktion von x ist, wird man nach dem von *Fuchs* bei Differentialgleichungen erster Ordnung angewendeten Verfahren zunächst versuchen, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufzustellen, daß jedes Integral in der Umgebung der festen singulären Stellen sowie in der Umgebung irgendeines Punktes, in dem dasselbe ebenso wie seine Ableitungen bestimmte

50) Vgl. die oben[48]) zitierten Arbeiten.

51) *P. Painlevé,* Vorlesungen, p. 429; Sur les singularités essentielles des équations différentielles, Paris C. R. 133 (1901), p. 910.

endliche oder unendliche Werte annimmt, eindeutig ist. *Picard*[52]) sagt in diesem Falle, das allgemeine Integral sei „à apparence uniforme". Damit nun die Differentialgleichung (43) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitze, muß sie von der Form:

$$y'' = L(x, y)y'^2 + M(x, y)y' + N(x, y) \tag{45}$$

sein, wobei die Funktionen L, M, N rationale Funktionen von y, analytische Funktionen von x sind. Daraus folgt aber[53]), daß für (45) jede der beiden Bedingungen, welche für das Auftreten von verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen notwendig, aber nicht hinreichend waren, erfüllt ist, so daß man jedenfalls mit der Möglichkeit des Auftretens solcher verschiebbarer Unbestimmtheitsstellen rechnen muß. Dasselbe gilt entsprechend für die Differentialgleichungen:

$$F(y'', y', y, x) = 0, \tag{46}$$

wo F ein Polynom von y, y', y'' mit in x analytischen Koeffizienten ist. In vielen Fällen schränkt aber die Ausschließung verschiebbarer Verzweigungspunkte die Differentialgleichung oder das System gewöhnlicher Differentialgleichungen so ein, daß die Integration vermittels bekannter Funktionen in expliziter Form gelingt und man sich nachträglich von dem Fehlen verschiebbarer Unbestimmtheitsstellen überzeugen kann. Dieses trifft in dem von *S. Kowalevski*[54]) behandelten Fall der Bewegung eines unsymmetrischen Kreisels von spezieller Massenverteilung zu, ebenso für die von *Picard*[55]), *Mittag-Leffler*[56]), *Painlevé*[57]), *Fransen*[58]), *Wallenberg*[59]) und *Forsyth*[60]) untersuchten

52) *E. Picard,* Théorie des fonctions algébriques de deux variables, J. de Math. (4) 5 (1889), p. 278; Remarques sur les équations différentielles, Acta Math. 17 (1893), p. 297.

53) *P. Painlevé,* Vorlesungen, p. 462 Fußnote.

54) *S. Kowalevski,* Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta math. 12 (1889), p. 177; ferner: Sur une propriété d'un système d'équations différentielles, qui définit la rotation d'un corps autour d'un point fixe, Acta Math. 14 (1890), p. 81.

55) *E. Picard,* Sur une proprieté de fonctions uniformes d'une variable, Paris C. R. 91 (1880), p. 1058; ferner l. c., J. de Math. (4) 5, p. 263.

56) *G. Mittag-Leffler,* Sur une équation différentielle du second ordre, Paris C. R. 117 (1893), p. 92; Sur l'intégration de l'équation différentielle

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y',$$

Acta Math. 18 (1894), p. 233.

57) *P. Painlevé,* Sur les équations du second degré dont l'intégrale générale est uniforme, Paris C. R. 117 (1893), p. 211.

58) *A. E. Fransen,* Stockh. Oefv. 52 (1895), p. 223.

59) *G. Wallenberg,* Über nicht lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, J. f. Math. 119 (1898), p. 87; Über eine Klasse nicht

Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche x nicht explizit enthalten oder, wie in der ersten Arbeit von *Wallenberg*, homogen in x, y, y' und y'' sind.

Um also die Gesamtheit der Differentialgleichungen (45) ohne verschiebbare Unbestimmtheitsstellen zu erhalten, müssen an Stelle der in dem letzten Abschnitt betrachteten hinreichenden Bedingungen, welche das Auftreten verschiebbarer Unbestimmtheitsstellen verhindern, notwendige Bedingungen treten. *Painlevé*[61]) erhält diese auf folgende Weise: Soll die Differentialgleichung (45) weder verschiebbare Verzweigungungspunkte noch verschiebbare Unbestimmtheitsstellen besitzen, so muß dieses auch für die Differentialgleichung der Fall sein, welche sich aus (45) ergibt, wenn man

$$x = x_0 + \alpha X \tag{47}$$

setzt und α nach Null konvergieren läßt[62]), also für die Differentialgleichung:

$$y'' = L(x_0, y)y'^2 = l(y)y'^2. \tag{48}$$

Die Differentialgleichung (48) heißt die „vereinfachte Differentialgleichung" von (45). Da sie x nicht explizit enthält, so muß ihr allgemeines Integral eine eindeutige Funktion von x sein.

Zunächst ergibt sich, daß $l(y)$ nur einfache Pole mit reellen rationalen Residuen besitzen darf, und es läßt sich daher die Aufgabe, alle Differentialgleichungen (48) zu bestimmen, auf das von *Briot* und *Bouquet*[16]) gelöste Problem zurückzuführen, alle Differentialgleichungen:

$$y'^{\nu} = \varrho(y) \tag{49}$$

zu bestimmen, in denen ϱ eine rationale Funktion, und deren allgegemeines Integral eindeutig ist; ν ist dabei der kleinste gemeinschaftliche Nenner der Residuen von $l(y)$. Man erhält so neun elementare Funktionen $l(y)$ und, indem man die darin auftretenden Konstanten durch Funktionen von x ersetzt, neun mögliche Ausdrücke für $L(x, y)$.

---

linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, J. f. Math. 120 (1899), p. 113.

60) *A. R. Forsyth,* Theory of differential equations, Part III.

61) *P. Painlevé,* Sur les équations du second ordre à points critiques fixes, Paris C. R. 126 (1898), p. 1185; ferner: p. 1329, 1697; 127 p. 541, 945; 129 (1899), p. 750, 949; 130 (1900), p. 767, 879, 1112; speziell: Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, S. M. F. Bull. 28 (1900), p. 201; Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme, Acta Math. 25 (1902), p. 1.

62) Bezüglich der Anwendbarkeit dieser Methode auf andere Probleme vgl. *P. Painlevé,* Sur les systèmes différentiels à intégrale générale uniforme, Paris C. R. 131 (1900), p. 497.

Vermittels derselben Methode zeigt dann *Painlevé* zunächst, daß die in y rationalen Funktionen M und N dieselben Pole besitzen müssen wie L, und daß diese Pole einfache sein müssen. Die Transformation $y = \frac{1}{z}$ liefert dann Schranken für den Grad von L und M. Durch Weiterführung der Diskussion unter wiederholter Anwendung des *Painlevé*schen Kunstgriffes[63]) erhält man dann nach *Gambier*[64]), der eine Lücke bei *Painlevé* ausfüllte, eine Tabelle (T) von 50 Differentialgleichungen der Form:

$$y'' = F(y', y, x),$$

wobei F rational in y und y' ist. Alle Differentialgleichungen:

(43a) $$Y'' = R(Y', Y, X),$$

in denen R eine rationale Funktion von Y und Y', analytisch in X ist, und welche weder verschiebbare Verzweigungspunkte noch Unbestimmtheitsstellen besitzen sollen, gehen aus dieser Tabelle durch die Transformation:

(50) $$y = \frac{l(X)\,Y + m(X)}{p(X)\,Y + q(X)}, \quad x = \varphi(X)$$

hervor, wenn l, m, p, q, φ analytische Funktionen von X sind. Daraus folgt dann der Satz: Wenn eine Differentialgleichung (43) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen hat, so läßt sie sich entweder auf eine lineare Differentialgleichung zweiter, dritter oder vierter Ordnung oder auf eine durch Quadraturen, elliptische Funktionen und deren Ausartungen integrierbare Differentialgleichung zurückführen oder sie läßt sich durch eine Transformation der Form (50) in eine der sechs Differentialgleichungen:

I. $y'' = 6y^2 + x,$

II. $y'' = 2y^3 + xy + \alpha,$

III. $y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{x} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y},$

IV. $y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3y^3}{2} + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y},$

63) Vgl. hierzu auch *P. Boutroux*, Recherches sur les transcendantes de *M. Painlevé*, Ann. de l'Éc. norm. sup. (3) 31 (1914), p. 109.

64) *B. Gambier*, Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme, Paris C. R. 142 (1906), p. 266; ferner p. 1403, 1497; 143, p. 741; 144 (1907) p. 827, 962; Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes, Thèse, Paris 1909 und Acta Math. 33 (1909), p. 1; *P. Painlevé*, Sur les équations du second ordre à points critiques fixes, Paris C. R. 143 (1906), p. 1111.

$$\text{V.}\quad y'' = y'^2\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right) - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1},$$

$$\text{VI.}\quad y'' = \frac{y'^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) - y'\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right) + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right]$$

transformieren, in denen α, β, γ und δ Konstanten sind.

Die so gewonnenen Bedingungen sind aber auch hinreichend. Natürlich liegt bei denjenigen Fällen, die sich nicht explizit integrieren lassen, also bei den Differentialgleichungen I—VI, die Hauptschwierigkeit des Beweises in dem Nachweis der Unmöglichkeit des Auftretens von verschiebbaren Unbestimmtheitsstellen. Für die Differentialgleichung I führt *Painlevé*[65]) diesen Nachweis vermittels einer Methode, die sich unmittelbar auf die anderen Fälle übertragen läßt.[66]) Weitere Ausführungen über die Eigenschaften der durch die Differentialgleichungen I—VI definierten Funktionen, welche man als die *Painlevé*schen Transzendenten bezeichnen kann, folgen in dem nächsten Abschnitt.

Um andererseits zu erkennen, wann eine vorgegebene Differentialgleichung der Form (43) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte oder Unbestimmtheitsstellen hat, muß man versuchen, die gegebene Differentialgleichung durch eine Transformation (50) in eine in der Tabelle (T) von *Gambier* vorkommende Differentialgleichung überzuführen. Doch ist es nach *Gambier*[67]) für diesen Zweck vorteilhafter, eine umfassendere Tabelle (Θ) heranzuziehen, welche gestattet, die Funktionen l, m, p, q, φ aus den Koeffizienten der gegebenen Differentialgleichung auf algebraischem Wege zu berechnen.

Ist in der rechten Seite von (43) R rational in y', algebraisch in y, so läßt sich (43) in der Form:

$$y'' = \varrho(y', y, u, x) \tag{51}$$

darstellen, wobei ϱ rational in y, y' und u ist, und y und u durch eine algebraische Gleichung:

$$H(u, y, x) = 0 \tag{52}$$

65) *P. Painlevé,* l. c., S. M. F. Bull. 29 (1900), p. 231; vgl. auch *J. Horn,* Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung 1905, p. 380.

66) *P. Painlevé,* l. c., Paris C. R. 143 (1906), p. 1113; vgl. auch *W. Golubev,* Zur Theorie der Gleichungen von *Painlevé,* Mosk. Math. Samml. 28 (1912), p. 323 (russisch).

67) *B. Gambier,* l. c., p. 19.

verbunden sind, die analytisch in x ist. Damit dann (51) keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitze, muß das Geschlecht der algebraischen Gleichung (52), in der x wieder als Parameter aufzufassen ist, 0 oder 1 sein. Ist das Geschlecht 0, so haben wir den oben behandelten Fall, ist das Geschlecht 1, so muß man die Differentialgleichung (43) durch eine elementare algebraische Transformation in eine der von *Painlevé*[68]) aufgestellten drei Typen überführen können, die durch bekannte Funktionen integrierbar sind, und von denen die ersten beiden keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen, während dieses für die dritte:

$$(53)\qquad y'' = \frac{y'^2}{2}\left[\frac{6y^2 - \frac{g_2}{2}}{4y^3 - g_2 y - g_3} + \frac{\alpha}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}\right] + q(x)y' + r(x)\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3},$$

in der g_2, g_3 und α Konstanten sind, nur der Fall ist, wenn die transzendente Bedingung erfüllt ist, daß $\frac{2\pi i}{\alpha}$ eine Periode von $\wp(u, g_2, g_3)$ ist.

Die Fälle, in denen y'' eine algebraische Funktion[69]) von y und y' ist, sind noch nicht einer erschöpfenden Diskussion unterworfen.

Es kann übrigens bei Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung vorkommen, daß das allgemeine Integral eindeutig ist, während ein singuläres Integral feste Verzweigungspunkte hat, und es lassen sich ferner Beispiele angeben, in denen das allgemeine Integral eindeutig ist oder nur feste, das singuläre Integral aber verschiebbare Verzweigungspunkte hat.[70]) Als bemerkenswert sei noch hervorgehoben, daß bei Systemen von höherer als der zweiten Ordnung es vorkommen kann, daß eine besondere Klasse von Lösungssystemen verschiebbare Unbestimmtheitsstellen besitzt, während dieses für das allgemeine Lösungssystem nicht der Fall ist.[71])

Bei der Frage, wann die Differentialgleichung:

$$(54)\qquad y''' = R(y'', y', y, x),$$

68) *P. Painlevé,* Acta Math. 25, p. 48.

69) *P. Painlevé,* l. c., Acta Math. 25, p. 65; vgl. *J. Chazy,* Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, Paris C. R. 148 (1909), p. 1381.

70) *J. Chazy,* Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale a ses points critiques fixes, Thèse, Paris 1910, p. 43; Acta Math. 34 (1911), p. 317, insbes. p. 360; vgl. auch *J. Chazy,* Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, Paris C. R. 148 (1909), p. 157; *B. Gambier,* Sur les intégrales singulières de certaines équations différentielles algébriques, Paris C. R. 149 (1909), p. 21.

71) *P. Painlevé,* Vorlesungen, p. 432.

in der R rational in y'' und y', algebraisch in y, analytisch in x ist, keine verschiebbaren Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen besitzt, hat man wie oben die „vereinfachte Differentialgleichung" zu bilden und zu untersuchen, wann das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung eine eindeutige Funktion von x ist. Die vereinfachte Differentialgleichung muß[72]) die Form:

$$(55) \qquad y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y,z)y''y' + c(y,z)y'^3$$

besitzen, wo n eine ganze von 0 und -1 verschiedene Zahl oder ∞ ist, wo ferner $b(y,z)$ und $c(y,z)$ rationale Funktionen zweier Variabeln y und z sind, die eindeutige Funktionen von x sein sollen und durch eine algebraische Gleichung $f(y,z) = 0$ vom Geschlecht p verbunden sind. *Painlevé* gibt die Lösung dieser Aufgabe an, die *Chazy*[73]) und *Garnier*[74]) im einzelnen durchführen. Ist $n = -2$, so muß $b(y,z)$ identisch verschwinden, die Integrale sind die polymorphen Funktionen (vgl. das Ref. II B 4 (*Fricke*), Nr. 32). Ist $n \neq -2$, so darf p nur die Werte 0 und 1 besitzen. In diesem Falle lassen sich die Integrale als Ausartungen der polymorphen Funktionen darstellen, genauer ausgedrückt, durch rationale Funktionen, Exponentialfunktionen, elliptische Funktionen, Logarithmen, die *Weierstraß*schen ζ- und σ-Funktionen und die Kombinationen dieser Funktionen. *Chazy*[75]) gewinnt überdies, von den vereinfachten Differentialgleichungen ausgehend, eine große Anzahl von Typen nicht vereinfachter Differentialgleichungen ohne verschiebbare Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen, ohne jedoch bisher genau feststellen zu können, ob eine dieser Differentialgleichungen auf wesentlich neue transzendente Funktionen führt. Was nun die Differentialgleichungen von höherer als der dritten Ordnung ohne verschiebbare Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen anbetrifft, so genügt die Methode von *Painlevé*, um notwendige

72) *P. Painlevé*, Acta Math. 25, p. 69, S. M. F. Bull. 29, p. 256.

73) *J. Chazy*, Sur les équations différentielles du troisième ordre à points critiques fixes, Paris C. R. 145 (1907), p. 305, 1263. Ferner Thèse und Acta Math. 34 (1911), p. 317.

74) *R. Garnier*, Sur les équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale est uniforme, Paris C. R. 145 (1907), p. 308; 147 (1908), p. 915; Sur les équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur, Thèse 1911, Ann. de l'Éc. norm. (3) 29 (1912), p. 1.

75) *J. Chazy*, Thèse, p. 17; ferner: Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme et admet des singularités essentielles mobiles, Paris C. R. 149 (1909), p. 563; 150 (1910), p. 456; Sur une équation différentielle du troisième ordre qui a ses points critiques fixes, Paris C. R. 151 (1910), p. 203.

Bedingungen hierfür aufzustellen. Speziell gilt der Satz[76]): Soll das allgemeine Integral der Differentialgleichung:

$$y^{(n)} = P(y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x), \tag{56}$$

in welcher P ein Polynom in $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ ist, keine verschiebbaren Verzweigungsstellen und Unbestimmtheitsstellen besitzen, so darf das Gewicht von P $n+1$ nicht überschreiten, wenn man y das Gewicht 1, $y^{(k)}$ das Gewicht $k+1$ gibt. Hingegen ist die Frage nach hinreichenden Bedingungen eine außerordentlich schwierige, und zwar wachsen die Schwierigkeiten mit der Ordnung der Gleichung.

Es ist daher von großer Bedeutung, daß die Theorie der linearen Differentialgleichungen auf Systeme nichtlinearer Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung führt, die keine verschiebbaren Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen besitzen. Wie nämlich in dem Referat II B 5 (*Hilb*), p. 504 ausgeführt wurde[77]), führt die neuerdings auch als *Schlesinger*sches Problem bezeichnete Frage, wann die Monodromiegruppe eines schlechthin kanonischen Differentialsystems von einer als Parameter aufgefaßten singulären Stelle a_λ unabhängig sei, auf ein von *Schlesinger* angegebenes Differentialsystem zweiten Grades:

$$(57)\quad \begin{cases} \dfrac{dA_{ik}^{(\lambda)}}{da_\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sum_{\nu \neq \lambda} \frac{A_{ip}^{(\lambda)} A_{pk}^{(\nu)} - A_{ip}^{(\nu)} A_{pk}^{(\lambda)}}{a_\lambda - a_\nu}, & \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}, \\ \dfrac{dA_{ik}^{(\nu)}}{da_\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{A_{ip}^{(\lambda)} A_{pk}^{(\nu)} - A_{ip}^{(\nu)} A_{pk}^{(\lambda)}}{a_\nu - a_\lambda}, & \text{wenn } \nu = 1, 2, \ldots \sigma, \text{ außer } \nu = \lambda, \end{cases}$$

das keine mit den Anfangswerten verschiebbaren Verzweigungspunkte und Unbestimmtheitsstellen hat, und dessen allgemeine Lösung in der Form:

$$\mathbf{A}_{ik}^{(\nu)} = E_{ik}^{(\nu)}\left(A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}\right)$$

darstellbar ist, wo die $\mathbf{A}_{ik}^{(\nu)}$ Konstante, die $E_{ik}^{(\nu)}$ ganze transzendente Funktionen der A, aber im allgemeinen mehrdeutige Funktionen von a_λ sind.

Bildet man entsprechend den früheren Ausführungen das „vereinfachte System" von (57), so ist dasselbe durch *Abel*sche Funktionen und *Theta*funktionen integrierbar.[78]) Wie *Schlesinger* mir mit-

76) *J. Chazy*, Sur la limitation du degré des coefficients des équations différentielles algébriques à points critiques fixes, Paris C. R. 155 (1912), p. 132.

77) Vgl. auch die dort angegebene Literatur.

78) *R. Garnier*, Sur les simplifiés d'une classe de systèmes différentiels dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Paris C. R. 153 (1911), p. 1449; Sur une classe de systèmes *Abel*iens déduits de la théorie des équations différentielles linéaires, Paris C. R. 160 (1915), p. 331, ferner Thèse, p. 90.

teilt, wird hierdurch eine von *Riemann*[79]) gemachte Andeutung bestätigt.

Speziell führte die Frage, wann eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den singulären Stellen der Bestimmtheit 0, 1, t und ∞ sowie dem Nebenpunkte λ eine Monodromiegruppe besitzt, die von t unabhängig ist, *R. Fuchs*, dessen erste Arbeit denen von *Schlesinger* unmittelbar vorherging, zuerst auf die Gleichung VI mit t als unabhängiger, λ als abhängiger Veränderlichen. Man erhält also die Integrale von VI in der Form:

$$\varphi_1(\lambda', \lambda, t) = c_1, \quad \varphi_2(\lambda', \lambda, t) = c_2$$

aus der Bedingung, daß die Substitutionen der Monodromiegruppe von dem Parameter unabhängig sind. Umgekehrt erhält *Garnier*[79a]) aus seinen in Nr. 9 zu besprechenden Untersuchungen über das Verhalten der Integrale von VI in der Umgebung der singulären Stellen für diesen Fall einen neuen Beweis für die Lösbarkeit des *Riemann*schen Problems.

Die Differentialgleichungen I bis V entstehen nun nach *Painlevé*[80]) aus VI durch wiederholten Grenzübergang, dem ein Zusammenfallen von singulären Stellen der linearen Differentialgleichung entspricht.[81]) *Garnier*[82]) untersucht speziell auch die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_0^m{}_h a_h x^h + \sum_0^\nu{}_j \left[\frac{\frac{3}{4}}{(x-\lambda_j)^2} + \frac{\varrho_j}{x-\lambda_j} \right] y \tag{58}$$

mit einer einzigen Unbestimmtheitsstelle im Unendlichen und den scheinbar singulären Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$, in der die a, λ und ϱ analytische Funktionen von n Parametern $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sind, während die Monodromiegruppe von den Größen t unabhängig ist. Es ergibt sich, daß die symmetrischen Funktionen der λ als Funktionen eines dieser

79) *B. Riemann*, Ges. Werke, Fragment 21 (1876), 2. Aufl., p. 386.

79a) *R. Garnier*, Sur une méthode nouvelle pour résoudre le problème de Riemann, Paris C. R. 163 (1916), p. 198.

80) *P. Painlevé* l. c., Paris C. R. 143 (1906), p. 1114.

81) *R. Garnier*, Thèse, p. 51; ferner: Sur les limites des substitutions du groupe d'une équation linéaire du second ordre, Paris C. R. 154 (1912), p. 1208, 1335; Sur la représentation des intégrales des équations irréductibles du second ordre à points critiques fixes au moyen de la théorie des équations linéaires, Paris C. R. 155 (1912), p. 137; 159 (1914), p. 795, 1096. Vgl. auch *R. Fuchs*, Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer Unbestimmtheitsstelle, Sitzber. der Berl. Math. Ges. (13) 24. Juni 1914.

82) *R. Garnier*, Sur les équations différentielles linéaires et les transcendantes uniformes du second ordre, Paris C. R. 148 (1909), p. 1308; 149, p. 23; Thèse, p. 39.

Parameter t einer gewöhnlichen Differentialgleichung genügen und nur dann keine verschiebbaren Verzweigungspunkte besitzen können, wenn $m \leqq 4$ ist.

9. Eigenschaften der Painlevéschen Transzendenten. Die allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen I, II und IV sind meromorphe Funktionen, die der Differentialgleichungen III, V und VI sind im allgemeinen unendlich vieldeutige Funktionen und zwar sind für die Integrale von III und V 0 und ∞, für die von VI 0, 1 und ∞ Unbestimmtheitsstellen und Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung[82a]). Ersetzt man in III und V x durch e^X, so sind auch die Integrale von III und V meromorphe Funktionen von X. *Garnier*[83]) untersucht das Verhalten der Integrale von VI in der Umgebung der singulären Stellen 0, 1 und ∞ vermittelst der Methode der successiven Approximationen. Die erste Approximation in der Umgebung von $x = 0$ zeigt, daß man $\lg \frac{x}{x_0} = X$ als unabhängige Veränderliche einzuführen hat. *Garnier* erhält so zwei verschiedene Arten von Entwicklungen, welche bei genügend kleinem $|x_0|$ in der X-Ebene innerhalb von Sektoren konvergieren, die sich vom Koordinatenanfangspunkt in das Unendliche erstrecken. Man kann dann für jedes Integral von VI die ganze Halbebene der X mit negativem reellen Teile, nach Ausschluß der imaginären Achse durch zwei beliebig kleine Sektoren, in eine endliche Anzahl von Sektoren zerlegen, die sich stets teilweise überdecken und abwechselnd zu den beiden Arten von Entwicklungen gehören.

Das allgemeine Integral von I ist eine „wesentlich transzendente" Funktion der beiden Integrationskonstanten[84]), also ist die Differentialgleichung nach einem in Nr. 7 angeführten Satze in dem von *Painlevé* festgesetzten Sinne vom funktionentheoretischen Standpunkte aus irreduzibel. Das gleiche ergibt sich für alle anderen Differentialgleichungen unmittelbar daraus, daß sie auseinander durch wiederholte Grenzübergänge hervorgehen. Aber auch vom formalen Standpunkte aus sind die Differentialgleichungen III, IV, V, VI bei allgemeinen

82a) *B. Gambier,* Thèse, p. 4.

83) *R. Garnier,* Étude de l'intégrale générale de l'équation VI de M. *Painlevé* dans le voisinage de ses singularités transcendentes, Paris C. R. 162 (1916), p. 939; 163, p. 8, 118. Die Methode und Ergebnisse der hier einschlägigen Arbeiten von *R. Fuchs,* Über die analytische Natur der Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit festen kritischen Punkten, Math. Ann. 75 (1914), p. 469; Gött. Nachr. 20, Dez. 1913 sind, wie *Garnier* l. c. richtig bemerkt, nicht einwandfrei.

84) *P. Painlevé,* S. M. F. Bull. 28 (1900), p. 240.

Werten der Parameter unter Zugrundelegung der schärfsten Definition, nämlich der von *J. Drach* gegebenen, irreduzibel[85]) (vgl. hierzu das Ref. II 16 der franz. Enc. (*Vessiot*), p. 155 und 170), I und II besitzen jedoch, da sie y' nicht enthalten, einen bekannten letzten Multiplikator, gehören aber vom Standpunkt der formalen Irreduzibilität zur selben Klasse wie die allgemeinste Differentialgleichung:

$$y'' = R(y, x),$$

in der R eine rationale Funktion von y und x ist.

Setzt man[86]) in I:

$$y = -\frac{d^2 \lg u}{dx^2}, \tag{60}$$

so ist u eine ganze transzendente Funktion der Ordnung[87]) $\frac{5}{2}$ und des Geschlechtes 2 und genügt einer algebraischen Differentialgleichung dritter Ordnung. *Borel*[88]) weist auf den Zusammenhang der linken Seite dieser Differentialgleichung dritter Ordnung mit den Invarianten gewisser binärer Formen hin. Analog kann man das allgemeine Integral[86]) y von II durch zwei ganze transzendente Funktionen u_1 und u_2, welche Lösungen je einer algebraischen Differentialgleichung dritter Ordnung sind, in der Form:

$$y = \frac{u_2'}{u_2} - \frac{u_1'}{u_1} \tag{61}$$

darstellen. Die ganzen transzendenten Funktionen u_1 und u_2 haben dabei die Ordnung und das Geschlecht 3. Entsprechend läßt sich das allgemeine Integral von IV durch ganze transzendente Funktionen des Geschlechtes und der Ordnung 4 darstellen. Die ganzen transzendenten Funktionen, durch welche das allgemeine Integral von III und V sich darstellen läßt, nachdem x durch e^x ersetzt wurde, haben dagegen unendlich hohes Geschlecht.[89]).

85) *P. Painlevé,* Sur l'irréductibilité des transcendantes uniformes, Paris C. R. 135 (1902), p. 411; ferner p. 641, 757, 1020.

86) *P. Painlevé,* l. c., Acta math. 25, p. 14.

87) *P. Boutroux,* Sur la croissance des fonctions entières, Paris C. R. 134 (1902), p. 153; Sur quelques propriétés des fonctions entières, Acta Math. 28 (1904), p. 174; *P. Painlevé,* Remarques sur la communication précédente, Paris C. R. 134 (1902), p. 155.

88) *E. Borel,* Remarques sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, Paris C. R. 138 (1904), p. 337; vgl. auch *J. Chazy,* Sur les équations différentielles déduites de certains invariants des formes, Paris C. R. 150 (1910), p. 1104; Thèse, p. 65.

89) *P. Boutroux,* Sur les fonctions entières de genre infini, Paris C. R. 134 (1902), p. 519; Acta Math. 28, p. 202.

Ein tieferes Eindringen in den Bau der zu I gehörigen *Painlevé*schen Transzendenten gestattet die Bemerkung von *Boutroux*[90]), daß diese Transzendenten sich nach einer einfachen algebraischen Transformation „asymptotisch" wie doppeltperiodische Funktionen verhalten und also zu diesen Funktionen in einem ähnlichen Verhältnisse stehen, wie die *Bessel*schen Funktionen für große Werte von $|x|$ zum Sinus. Genauer wird die Bedeutung dieses Verhaltens weiter unten auseinandergesetzt. Setzt man in der Differentialgleichung:

$$y'' = 6y^2 - 6x^\mu, \tag{62}$$

welche für $\mu = 1$ sich nur unwesentlich von I unterscheidet,

$$y = x^{\frac{\mu}{2}} Y, \quad X = \frac{4}{\mu+4} x^{\frac{\mu+4}{4}}, \tag{63}$$

so erhält man

$$Y'' = 6Y^2 - 6 - \frac{5\mu}{\mu+4}\frac{Y'}{X} + \frac{4\mu(2-\mu)}{(\mu+4)^2}\frac{Y}{X^2}, \tag{64}$$

eine Differentialgleichung, die sich für große Werte von X asymptotisch verhält wie die Differentialgleichung:

$$Z'' = 6Z^2 - 6, \tag{65}$$

deren allgemeines Integral sich aus

$$Z'^2 = 4Z^3 - 12Z + D \tag{66}$$

als

$$Z = \wp_D(X + C) \tag{67}$$

ergibt. Entsprechend kann man die Differentialgleichung für $\mathrm{sn}(X)$ mit den durch die Differentialgleichung II definierten Transzendenten in Verbindung bringen.[91])

Es sei nun ε eine beliebig kleine Größe, $X_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, Y ein Integral von (64), welches für x_0 den Wert η annimmt und für welches $Y' = \eta'$ ist. Setzt man dann $\eta'^2 - 4\eta^3 + 12\eta = D$, so sei $\wp_{0D}$ das Integral von (66), das in X_0 den Wert η annimmt. Dann ist innerhalb eines X_0 enthaltenden, zu $\wp_{0D}$ gehörigen Periodenparallelogramms

$$|Y - \wp_{0D}| < \varepsilon,$$

mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung eines innerhalb dieses Periodenparallelogramms gelegenen Punktes X_1, in welchem Y unendlich wird wie $\frac{1}{(X-X_1)^2}$, aber bei allgemeinem μ einen Verzwei-

90) *P. Boutroux,* Recherches sur les transcendantes de *M. Painlevé* et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre, Ann. de l'Éc. norm. (3) 30 (1913), p. 255; 31 (1914), p. 99.

91) *P. Boutroux,* l. c., Ann. de l'Éc. norm. (3) 31, p. 100; vgl. auch p. 104.

gungspunkt unendlich hoher Ordnung hat.[92]) Es tritt dann für Y an die Stelle des Periodenparallelogramms ein offenes Kurvenviereck, das sich mit abnehmendem ε einem Periodenparallelogramm unbegrenzt nähert. Man kann nun die ganze Ebene mit solchen von „Periodenlinien" gebildeten Periodenvierecken derart überdecken, daß das ins Auge gefaßte Y in jedem dieser Periodenvierecke nur eine einzige isolierte singuläre Stelle hat. Für $\mu = 1$ besitzt Y in X_1 einen Pol zweiter Ordnung, also hat auch y in dem entsprechenden Punkte x_1 einen solchen, und es läßt sich y in der Form:

$$y = \frac{1}{(x-x_1)^3} + \frac{3x_1}{5}(x-x_1)^2 + (x-x_1)^3 + c_1(x-x_1)^4 + \cdots$$

darstellen, wo die folgenden Koeffizienten Funktionen von x_1 und c_1 sind. *Boutroux* nennt c_1 den Parameter des Integrals im Pole x_1. Da also für $\mu = 1$ das Periodenviereck geschlossen ist, so folgt unmittelbar, daß in diesem Falle Y und also auch y meromorphe Funktionen sind.

Der Wert von D ändert sich aber beim Übergang von einem Periodenviereck zum anderen derart, daß, wenn X auf einem beliebigen Radiusvektor in das Unendliche geht, D im allgemeinen unbestimmt bleibt, und man nur aussagen kann, daß D unterhalb einer endlichen Schranke bleibt. Geht man jedoch längs einer Periodenlinie in das Unendliche, so konvergiert D nach einem der Werte, für welche das Integral

$$\int \sqrt{4Y^3 - 12Y + D}\, dY$$

eine verschwindende Periode hat. Geht die Periodenlinie von einem singulären Punkte aus, also für $\mu = 1$ von einem Pole, so nennt sie *Boutroux* eine Linie der Unendlichkeitsstellen, für $\mu = 1$ eine Pollinie. Bewegt sich X im Falle $\mu = 1$ längs einer Pollinie in das Unendliche, so konvergiert auch der Parameter c_1 nach einer bestimmten Grenze. In der x-Ebene verlaufen die Pollinien asymptotisch zu Parallelen der Geraden OA_1, OA_3 bezüglich OA_2, OA_5 usf.

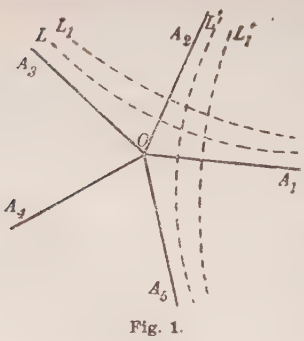

Fig. 1.

Ein Integral von (62) für $\mu = 1$ ist nun bestimmt, wenn man einen Pol x_1 und den zugehörigen Parameter c_1 kennt. Ist x_2 ein zweiter Pol, so ist x_2 eine Funktion $\varphi(x_1, c_1)$ von x_1 und c_1. Wird $\varphi(x_1, c_1)$ für ein Wertsystem x_1, c_1 unendlich, so heißt das Integral

92) *P. Boutroux*, l. c., 30, p. 307.

verstümmelt, „tronqué“. Es gibt nun stets fünf verstümmelte Integrale, welche in einem Punkte x_1, der auf keiner der fünf Halbgeraden $OA_1, \ldots, OA_5$ liegt, einen Pol haben, und ferner gibt es eine Pollinie, die z. B. asymptotisch zu zwei Parallelen der Halbachsen, etwa zu OA_5 und OA_2, vom Unendlichen zum Unendlichen derart geht, daß auf jedem Wege, der rechts dieser Linie in das Unendliche geht, eines dieser fünf verstümmelten Integrale nach Multiplikation mit $x^{-\frac{1}{2}}$ nach ± 1 konvergiert. Links der Pollinie ist das Integral nicht verstümmelt, d. h. die Verteilung der Pole für große Werte von $|x|$ ist normal. Das Integral heißt in diesem speziellen Falle in der Richtung OA_1 verstümmelt. Sei c_a der Wert von c_1, für welchen das Integral in der Richtung OA_1 verstümmelt ist, dann ist c_a eine eindeutige Funktion von x_1, welche die Rückwärtsverlängerung von OA_1 von einem bestimmten Punkte $\bar{A}_1$ bis $-\infty$ als singuläre Linie, aber sonst keine Singularitäten besitzt. Es gibt nun genau fünf dreifach verstümmelte Integrale, von denen also jedes nach drei Richtungen, also etwa nach OA_5, OA_1 und OA_2 verstümmelt ist. Ein solches nach den erwähnten drei Richtungen verstümmeltes Integral hat also für genügend große Werte von $|x|$ nur Pole im Winkel A_3OA_4.

Geht man von der Theorie dieser verstümmelten Integrale aus, so kann man ohne weitere Rechnung eine systematische Theorie der durch I definierten meromorphen Funktionen aufbauen[93]), und in analoger Weise kann man die durch II und IV definierten *Painlevé*schen Transzendenten behandeln.

93) *P. Boutroux*, l. c., 31. p. 131.

(Abgeschlossen im November 1916.)

II B 7. ABELSCHE FUNKTIONEN UND ALLGEMEINE THETAFUNKTIONEN.

Von

A. KRAZER in Karlsruhe und **W. WIRTINGER** in Wien.

Inhaltsübersicht.

I. Das Jacobische Umkehrproblem in der Zeit vor Riemann.

1. Das *Jacobi*sche Umkehrproblem.
2. *Abel*sche Funktionen.
3. *Jacobi*.
4. Umkehrung eines einzelnen *Abel*schen Integrals.
5. *Göpel*.
6. *Rosenhain*.
7. *Weierstraß* (ältere Arbeiten).
8. *Hermite*.

II. Die Transformation der Perioden.

9. Transformationsproblem.
10. Zusammensetzung von Transformationen.
11. Multiplikation und Division.
12. Zusammensetzung einer linearen ganzzahligen Transformation aus einfachen.
13. Reduktion nichtlinearer ganzzahliger Transformationen.
14. *Krazer-Prym*sche Zusammmensetzung einer Transformation aus elementaren.

III. Die allgemeinen Thetafunktionen mit beliebigen Charakteristiken.

15. Allgemeine Thetafunktionen.
16. Einführung der Charakteristiken.
17. Thetafunktionen höherer Ordnung.
18. Die Transformation der Thetafunktionen.
19. Die ganzzahlige Transformation.
20. Die lineare ganzzahlige Transformation.
21. Zusammensetzung von Transformationsformeln.

IV. Die allgemeinen Thetafunktionen mit halben Charakteristiken.

22. Thetafunktionen mit halben Charakteristiken.
23. Periodencharakteristiken.
24. Thetacharakteristiken.
25. Beziehungen zwischen Periodencharakteristiken und Thetacharakteristiken.
26. Fundamentalsysteme von Periodencharakteristiken.

27. Fundamentalsysteme von Thetacharakteristiken.
28. Gruppen von Periodencharakteristiken.
29. Systeme von Thetacharakteristiken.
30. Änderung des Querschnittsystems einer *Riemann*schen Fläche.
31. Die Gruppe der mod. 2 inkongruenten Transformationen.
32. Monodromie der Verzweigungspunkte.
33. Thetafunktionen höherer Ordnung mit halben Charakteristiken.
34. Thetarelationen. Die algebraische Mannigfaltigkeit M_p.
35. Additionstheoreme der Thetaquotienten.
36. Die *Riemann*sche Thetaformel.
37. Das Additionstheorem der allgemeinen Thetafunktionen für $p \geqq 3$.
38. Weitere Folgerung aus der *Riemann*schen Thetaformel.

V. Die allgemeinen Thetafunktionen mit r^{tel} Charakteristiken.

39. Die Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$.
40. Periodencharakteristiken $(\varepsilon)_r$.
41. Thetacharakteristiken $[\varepsilon]_r$.
42. Relationen zwischen den Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$.
43. Verallgemeinerung der *Riemann*schen Thetaformel.
44. Auftreten der Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ bei nicht ganzzahliger linearer Transformation der Thetafunktionen.
45. Die *Krazer-Prym*sche Fundamentalformel für die Theorie der Thetafunktionen mit rationalen Charakteristiken.

VI. Das Jacobische Umkehrproblem bei Riemann, Clebsch und Gordan und in den Vorlesungen von Weierstraß.

46. *Riemann*.
47. *Clebsch* und *Gordan*.
48. *Weierstraß* (Vorlesungen).

VII. Die Abelschen Transzendenten 2. und 3. Gattung. Wurzelfunktionen und Wurzelformen. Lösungen des Umkehrproblems.

49. Die *Abel*schen Transzendenten 2. und 3. Gattung.
50. Eigenschaften der Funktionen $Z_\alpha(\!(w)\!)$ und $P_{\alpha\beta}(\!(w)\!)$.
51. Darstellung der *Abel*schen Transzendenten 3. und 2. Gattung durch Thetafunktionen.
52. Lösung des Umkehrproblems.
53. Darstellung eines einzelnen Integrals 3. und 2. Gattung durch Thetafunktionen.
54. Thetaquotienten und Funktionen der Klasse.
55. Zweite Form für die Lösung des Umkehrproblems.
56. Thetaquotienten und Wurzelfunktionen; deren Zuordnung zu den Periodencharakteristiken.
57. Thetafunktionen und Wurzelformen; deren Zuordnung zu den Thetacharakteristiken.
58. Die Ausnahmefälle.
59. Algebraische Darstellung eines Quotienten von Thetafunktionen, deren Argumente Summen von je $p+1$ Integralen sind.
60. Invariante Darstellung.

61. Algebraische Darstellung eines Thetaquotienten, dessen Argumente Summen von je $n(2p-2)$ Integralen sind.
62. *Noether*s Lösung des Umkehrproblems.
63. Symmetrische *Riemann*sche Flächen. Realitätsverhältnisse der φ.
64. *Klein*s Theorie der *Abel*schen Funktionen.
65. Die *Prym*schen Funktionen.

VIII. Der Fall $p = 2$.

66. Charakteristikentheorie.
67. Thetarelationen.
68. Die *Kummer*sche Fläche.
69. Die *Weddle*sche Fläche.
70. Thetanullwerte.
71. Übergang von den Thetafunktionen zum algebraischen Gebilde.
72. Anwendungen.
73. Das *Borchardt*sche arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen.

IX. Der hyperelliptische Fall.

74. Das Verschwinden der hyperelliptischen Thetafunktionen.
75. Zuordnung der Wurzelfunktionen zu den Periodencharakteristiken.
76. Zuordnung der Wurzelformen zu den Thetacharakteristiken.
77. Darstellung von Thetaquotienten durch Wurzelfunktionen.
78. Fortsetzung.
79. Lösung des *Jacobi*schen Umkehrproblems.
80. Additionstheorem der hyperelliptischen Thetafunktionen.
81. Verallgemeinerung der *Rosenhain*schen Differentialformeln.
82. Anwendungen.
83. Bestimmung von $d \log \vartheta(0)$ durch die Klassenmodulen im allgemeinen Falle.
84. Integration der erhaltenen Gleichung im hyperelliptischen Falle.

X. Der Fall $p = 3$.

85. Charakteristikentheorie.
86. Thetarelationen.
87. Thetanullwerte.
88. *Riemann-Weber.*
89. Die Wurzelformen zweiter und dritter Dimension.
90. *Schottky-Frobenius.*

XI. Der Fall $p = 4$.

91. *Noether.*
92. *Schottky.*

XII. Kleins Sigmafunktionen.

93. Vorbemerkung.
94. Hyperelliptische σ-Funktionen.
95. Funktionen 1. Stufe.
96. Funktionen 2. Stufe.
97. Die Funktionen $X_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$.
98. Die *Borchardt*schen Modulen.
99. Auflösung der Gleichung 6. Grades.
100. Der besondere Fall $p = 3$ in *Klein*s Theorie der *Abel*schen Funktionen.
101. *Wirtinger*s Lösung des Umkehrproblems im Falle $p = 3$.

102. Die *Wiltheiß*schen Differentialgleichungen und die Reihenentwicklungen der σ-Funktionen.
103. Weitere Differentialgleichungen im Gebiete der Thetafunktionen zweier Veränderlichen.

XIII. Erweitertes Umkehrproblem und Teilung.

104. *Clebsch* und *Gordan*s erweitertes Umkehrproblem.
105. Zur Geschichte des erweiterten Umkehrproblems.
106. *Lindemann*s Verallgemeinerung des *Jacobi*schen Umkehrproblems.
107. Das Teilungsproblem bei *Clebsch* und *Gordan*.
108. Zurückführung des allgemeinen Teilungsproblems auf das spezielle.
109. Reduktion des speziellen Teilungsproblems.
110. Monodromiegruppe der Teilungsgleichung.
111. Zweiteilung.

XIV. Periodische Funktionen mehrerer Veränderlichen.

112. Die allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktionen von p Veränderlichen.
113. Die *Riemann-Weierstraß*schen Sätze.
114. *Riemann*sche Matrizen.
115. Darstellung der allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktionen durch Thetafunktionen.
116. *Jacobi*sche Funktionen.
117. Die *Weierstraß*schen mehrdeutigen Umkehrprobleme.
118. Die *Wirtinger*schen Lösungssätze.

XV. Reduzierbare Abelsche Integrale.

119. Allgemeine Sätze über reduzierbare *Abel*sche Integrale.
120. Reduktion *Abel*scher Integrale auf elliptische.
121. Der spezielle Fall $p = 2$.
122. Reguläre *Riemann*sche Flächen.
123. *Schottky*s Symmetralfunktionen.
124. *Wirtinger*s Thetafunktionen mit $3p$ Parametern.

XVI. Multiplikabilität und Singularität.

125. Die prinzipale Transformation der Thetafunktionen mehrerer Veränderlichen.
126. Die singulären Funktionen *Humberts*.
127. *Heckes* Untersuchungen über 4-fach periodische Funktionen.
128. Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen.
129. Anwendungen der Thetafunktionen auf die *Hecke*schen Zetafunktionen.
130. Die hyperelliptischen Flächen.

Literatur.

Gesammelte Werke.

Abel, Oeuvres complètes; Nouv. Ed. par Sylow et Lie. 2 Tomes. Christiania 1881.
Borchardt, Gesammelte Werke; herausg. von *Hettner*. Berlin 1888.
Brioschi, Opere matematiche. 5 Tomi. Milano 1901—1909.

Cayley, The collected mathematical papers. 13 Vol. and 1 Suppl. Cambridge 1889—1898.

Christoffel, Gesammelte mathematische Abhandlungen; herausg. von *Maurer.* 2 Bde. Leipzig u. Berlin 1910.

Clifford, Mathematical papers; ed. by *Tucker.* London 1882.

Fuchs, Gesammelte mathematische Werke; herausg. von *Fuchs* und *Schlesinger.* 3 Bde. Berlin 1904—1909.

Hermite, Oeuvres; publ. par *Picard.* Tome 1—3. Paris 1905—1912.

Hesse, Gesammelte Werke. München 1897.

Jacobi, Gesammelte Werke; herausg. von *Borchardt, Weierstraß* u. a. 7 Bde. Berlin 1881—1891.

Riemann, Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß; herausg. von *Weber.* Leipzig 1876, 2. Aufl. 1892.

—, Nachträge; herausg. von *Noether* und *Wirtinger.* Leipzig 1902.

Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen. 2 Bde. Berlin 1890.

Smith, The collected mathematical papers; ed. by *Glaisher.* 2 Vol. Oxford 1894.

Weierstraß, Mathematische Werke. Bd. 1—6. Berlin 1894—1915.

Lehrbücher.

Appell et *Goursat,* Théorie des fonctions algébriques et de leurs integrales. Paris 1895. („Fonct. algébr.")

Baker, Abels theorem and the allied theory including the theory of the Theta-functions. Cambridge 1897. („A. Th.")

Briot, Théorie des fonctions abéliennes. Paris 1879.

Clebsch und *Gordan,* Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig 1866. („A. F.")

Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig 1903. („Thetaf.")

Landfriedt, Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen (Samml. Schubert). Leipzig 1902.

Neumann, C., Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. Leipzig 1865, 2. Aufl. 1884. („Riem. Th.")

Stahl, H., Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig 1896. („A. F.")

Tikhomandritzky, Éléments de la théorie des intégrales abéliennes. Nouv. Ed. St. Pétersbourg 1911.

Vorlesungen.

Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearb. von *Lindemann.* 1. Bd. Leipzig 1876.

Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Ausgearb. u. vervollst. von *Fricke.* 2 Bde. Leipzig 1890 u. 1892.

—, Riemannsche Flächen. Vorlesungen W.-S. 1891/92 und S.-S. 1892. Göttingen 1892 u. 1893; neuer Abdruck Leipzig 1906. („R. Fl.")

Riemann, Vorlesungen über die allgemeine Theorie der Integrale algebraischer Differentialien. W.-S. 1861/2. Ges. math. W. Nachtr. 1902. („Vorl.")

Weierstraß, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten, bearb. von *Hettner* und *Knoblauch.* Math. W. 4 (1902). („Vorl.")

Monographien.

Baker, An Introduction to the theory of multiply periodic functions. Cambridge 1907.

Hudson, Kummer's quartic surface. Cambridge 1905.

Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870 („Traité.").
Klein, Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Leipzig 1882. („Riem. Th.")
Krause, Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Leipzig 1886. („Transf.")
Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemannschen Thetaformel. Leipzig 1882. („$p = 2$")
Krazer und *Prym,* Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunktionen. Leipzig 1892. („N. G.")
Neumann, C., Die Umkehrung der Abelschen Integrale. Halle 1863.
Prym, Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882. („Riem. Thetaf.")
Prym und *Rost,* Theorie der Prym'schen Funktionen erster Ordnung im Anschluß an die Schöpfungen Riemann's. 1911.
Schottky, Abriß einer Theorie der Abelschen Functionen von drei Variabeln. Leipzig 1880. („Abr.")
Thomae, Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhainschen Functionen gebraucht werden. Halle 1876. („Formeln.")
—, Über eine spezielle Klasse Abelscher Functionen. Halle 1877.
—, Über eine spezielle Klasse Abelscher Functionen vom Geschlecht 3. Halle 1879.
Weber, Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin 1876. („$p = 3$.")
Wirtinger, Untersuchungen über Thetafunktionen. Leipzig 1896. („Thetaf.")

I. Das Jacobische Umkehrproblem in der Zeit vor Riemann.

1. Das Jacobische Umkehrproblem. Es bedeute G ein algebraisches Gebilde von einer Dimension, das ist die Gesamtheit aller Wertepaare zweier durch eine algebraische Gleichung miteinander verknüpften komplexen Veränderlichen. Wir wollen uns G zunächst durch eine mehrblättrige *Riemann*sche Fläche T dargestellt denken, werden es im weiteren Verlaufe aber auch als allgemeine *Riemann*sche Mannigfaltigkeit oder auch als Kurve in einem Gebiete von zwei oder mehr Dimensionen unserer Anschauung zugrunde legen (vgl. II B 2).

Die *Riemann*sche Fläche T sei durch p Querschnittpaare a_ν, b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots p)$ und p Linien c_ν in eine einfach zusammenhängende T' verwandelt und es mögen $u_1(z), u_2(z), \ldots u_p(z)$ p linearunabhängige Integrale 1. Gattung bezeichnen, deren Integrationskonstanten durch die Angabe der Integralwerte an einer bestimmten Stelle von T' festgelegt seien.

Bezeichnen dann $z_1^0, z_2^0, \ldots z_p^0$ und $z_1, z_2, \ldots z_p$ zwei Systeme von je p Stellen der *Riemann*schen Fläche, so sind die Werte der p Summen

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{p} \int_{z_\nu^0}^{z_\nu} du_\mu = \sum_{\nu=1}^{p} (u_\mu(z_\nu) - u_\mu(z_\nu^0)), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p)$$

solange die Integrale alle in T' erstreckt sind, unabhängig von den Integrationswegen, aber auch, wie die rechte Seite zeigt, unabhängig von der Zuordnung der oberen zu den unteren Grenzen.

Werden die z (dasselbe gilt für die z^0, die wir uns aber, um die Vorstellung nicht zu verwirren, jetzt als fest gegeben denken wollen) nicht mehr auf T' beschränkt, sondern wird ihnen freie Bewegung in der ursprünglichen *Riemann*schen Fläche T gestattet, so gehören zu den nämlichen Stellen $z_1, z_2, \ldots z_p$ je nach den durchlaufenen Integrationswegen unendlich viele verschiedene Werte der Integralsummen (1). Bezeichnet man nämlich mit $\omega_{1\alpha}, \omega_{2\alpha}, \ldots \omega_{p\alpha} (\alpha = 1, 2, \ldots 2p)$ die $2p$ Periodizitätsmodulen der Integrale $u_1, u_2, \ldots u_p$ an den $2p$ Querschnitten a, b, so geht bei irgendeiner Veränderung der Integrationswege, wenn man zunächst die Bedingung festhält, daß die Integrationswege in den p verschiedenen Gleichungen die nämlichen sein sollen, das ursprüngliche Wertesystem $w_1, w_2, \ldots w_p$ in ein Wertesystem

$$(2) \quad w_1' = w_1 + \sum_{\alpha=1}^{2p} m_\alpha \omega_{1\alpha}, \; w_2' = w_2 + \sum_{\alpha=1}^{2p} m_\alpha \omega_{2\alpha}, \ldots \; w_p' = w_p + \sum_{\alpha=1}^{2p} m_\alpha \omega_{p\alpha}$$

über, wo die m ganze Zahlen bezeichnen. Nennt man zwei solche Wertesysteme $(w) = w_1, w_2, \ldots w_p$ und $(w') = w_1', w_2', \ldots w_p'$ einander kongruent,

$$(3) \qquad (w') \equiv (w),$$

so kann man durch passende Abänderung der Integrationswege an Stelle von (w) alle dazu kongruenten Wertesysteme erzeugen und zwar jedes von ihnen auf mannigfache Art.

Man wird dabei noch bemerken, daß die Bedingung der Gleichheit der Integrationswege in den verschiedenen Gleichungen von (1) nicht eine für das Auftreten kongruenter Wertesysteme notwendige ist, was man schon daraus erkennt, daß eine einzelne der p Integralsummen ihrem Werte nach ungeändert bleibt, wenn man z. B. in ihr die Integrationswege zweier der Variablen z dadurch abändert, daß man diese den gleichen geschlossenen Integrationsweg in entgegengesetzter Richtung durchlaufen läßt.

Das *Jacobi*sche Umkehrproblem verlangt, aus den Kongruenzen

$$(4) \qquad \sum_{\nu=1}^{p} \int_{z_\nu^0}^{z_\nu} du_\mu \equiv w_u \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p)$$

bei gegebenen Stellen $z_1^0, z_2^0, \ldots z_p^0$ und gegebenen Werten $w_1, w_2, \ldots w_p$ die Stellen $z_1, z_2, \ldots z_p$ zu bestimmen. Dabei sind die auf der linken Seite stehenden Integrale als in der einfach zusammenhängenden Fläche T' erstreckt gedacht, es ist aber nach dem Vorigen nicht nur jede Änderung in der Zuordnung der unteren Grenzen zu den oberen, sondern auch jede solche Abänderung der Integrationswege gestattet, welche die Kongruenzen (4) bestehen läßt.

Man kann das *Jacobi*sche Umkehrproblem auch dahin aussprechen, daß das System der p Differentialgleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{p} du_\mu(z_\nu) = dw_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{5}$$

bei gegebenen Anfangsbedingungen zu integrieren sei; in dieser Form erscheint das Problem insbesondere bei *Weierstraß* (s. Nr. 7 u. 48).

2. Abelsche Funktionen. Die rationalen symmetrischen Funktionen der p Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ erweisen sich als Funktionen von $w_1, w_2, \ldots w_p$ betrachtet im allgemeinen, d. h. von gewissen Ausnahmewerten der w abgesehen, als einwertige meromorphe Funktionen dieser p Veränderlichen; als solche werden sie *Abel*sche Funktionen genannt.

Etwas allgemeiner nennt man auch eine algebraische symmetrische Funktion der p Punkte z eine *Abel*sche Funktion der w, wenn sie eine einwertige Funktion dieser Größen ist.[1])

Aus der Vielwertigkeit der Integrale $u_1, u_2, \ldots u_p$ folgt sofort, daß jede *Abel*sche Funktion eine $2p$-fach periodische Funktion von $w_1, w_2, \ldots w_p$ ist, deren Periodensysteme die $2p$ Systeme $\omega_{1\alpha}, \omega_{2\alpha}, \ldots \omega_{p\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots 2p)$ der Periodizitätsmodulen der Integrale u an den Querschnitten a, b der *Riemann*schen Fläche T' sind.

Über die weiteren Eigenschaften der *Abel*schen Funktionen s. Nr. 113.

3. Jacobi. *Jacobi* hat von zwei verschiedenen Gesichtspunkten ausgehend das Problem einer Verallgemeinerung der elliptischen Funktionen in Angriff genommen.

In seiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand, vom Jahre 1832, geht *Jacobi*[2]) von der Bemerkung aus, daß aus dem *Euler*schen Theorem, nach welchem die Summe zweier elliptischer Integrale erster

1) So bei *Weierstraß* [„Vorl." Math. W. 4 (1902), p. 462] und jetzt allgemein; spezieller nennt *Riemann* [„Vorl." Ges. math. W. Nachtr. (1902), p. 10] *Abel*sche Funktionen die Wurzeln $\sqrt[n-2]{\varphi}^{m-2}(s, z)$ aus den in $p-1$ Punkten der *Riemann*schen Fläche 0^2 werdenden Funktionen $\varphi(s, z)$.

2) J. f. Math. 9 (1832), p. 394 = Ges. W. 2 (1882), p. 5.

Gattung stets gleich ist einem einzelnen solchen Integrale, dessen obere Grenze eine algebraische Funktion der oberen Grenzen jener ist (II B 3, Nr. 2), für die inverse Funktion ein algebraisches Additionstheorem folge, und frägt, in dem *Abel*schen Theorem die Verallgemeinerung jenes *Euler*schen erkennend, welches die inversen Funktionen der hier auftretenden Integrale seien und was für diese das *Abel*sche Theorem aussage.[3]) Das Ergebnis seiner Untersuchungen legt *Jacobi* in dem folgenden „Theorema generale" nieder.

Man setze, indem X ein Polynom $2m-1^{\text{ten}}$ oder $2m^{\text{ten}}$ Grades in x bezeichnet,

$$\Phi_k(x) = \int_0^x \frac{x^k dx}{\sqrt{X}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots m-2) \tag{6}$$

und fasse auf Grund der $m-1$ Gleichungen

$$u_k = \Phi_k(x_0) + \Phi_k(x_1) + \cdots + \Phi_k(x_{m-2}) \quad (k = 0, 1, 2 \ldots m-2) \tag{7}$$

die x umgekehrt als Funktionen der u auf, setze also

$$x_k = \lambda_k(u_0, u_1, \ldots u_{m-2}); \tag{8}$$

dann lassen zich die Funktionen

$$\lambda_k(u_0 + u_0', u_1 + u_1', \ldots u_{m-2} + u'_{m-2})$$

algebraisch ausdrücken durch die $2(m-1)$ Funktionen

$$\lambda_k(u_0, u_1, \ldots u_{m-2})$$

und

$$\lambda_k(u_0', u_1', \ldots u'_{m-2}).$$

In seiner zweiten Arbeit, vom Jahre 1834, legt *Jacobi*[4]) den Grund zur Untersuchung mehrfach periodischer Funktionen überhaupt. Wenn eine Funktion einer Veränderlichen zwei Perioden besitzt, so kann auf Grund der Tatsache, daß beim Vorhandensein mehrerer Perioden auch jede ganzzahlige lineare Kombination dieser wieder eine Periode ist, das Verhältnis der beiden Perioden nicht reell sein, da sonst, wenn es rational wäre, die beiden Perioden sich auf eine einzige reduzieren ließen, wenn es aber irrational wäre, sie eine unendlich kleine Periode nach sich ziehen würden (II B 1, Nr. 24). Wären nun weiter drei Perioden vorhanden, so würden diese, wie *Jacobi* auf die gleiche Weise dartut, unter allen Umständen sich ent-

3) Hier gibt *Jacobi* dem *Abel*schen Theorem zum erstenmal diesen Namen und schlägt für die darin auftretenden Integrale den Namen „transcendentes Abelianae" vor, wobei er allerdings nur jene speziellen Integrale heraushebt, die man heute hyperelliptische nennt. Der Name der *Abel*schen Transzendenten ist später auf die Umkehrfunktionen übergegangen.

4) J. f. Math. 13 (1835), p. 55 = Ges. W. 2 (1882), p. 23; *Ostwalds* Klass. Nr. 64 (II B 2, Nr. 43).

weder auf weniger reduzieren lassen, oder aber eine unendlich kleine Periode nach sich ziehen. Das Vorkommen unendlich kleiner Perioden aber bezeichnet *Jacobi* als absurd und er erklärt daher die periodischen Funktionen einer Veränderlichen mit den einfach periodischen und den doppeltperiodischen mit nichtreellem Periodenverhältnis für erschöpft, Funktionen einer Veränderlichen mit drei oder mehr Perioden aber für unmöglich.

Da nun eine Funktion $x = \lambda(u)$, welche durch Umkehrung eines hyperelliptischen Integrals 1. Ordnung

$$u = \int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}} \tag{9}$$

entsteht, d. h. eines solchen, bei dem das Polynom X vom 5^{ten} oder 6^{ten} Grade ist, wie *Jacobi* durch Entwicklung des Integranden nach trigonometrischen Funktionen in Verbindung mit dem *Abel*schen Theorem dartut, vier unabhängige Perioden besitzt (die durch Umkehrung eines hyperelliptischen Integrals beliebiger Ordnung entstehende $2m - 2$, wenn X vom $2m - 1^{\text{ten}}$ oder $2m^{\text{ten}}$ Grade ist)[5]), eine Funktion einer Veränderlichen aber schon mit drei unabhängigen Perioden im Vorigen als absurd abgewiesen wurde, so konnte eine solche Umkehrfunktion für *Jacobi* nicht in Betracht kommen. Das hyperelliptische Integral hat eben, wie *Jacobi* mit aller Schärfe hervorhebt, eine so starke Vielfachheit von Werten, daß sich, bei gegebenen Grenzen, unter ihnen immer einer befindet, der einem willkürlich vorgeschriebenen Werte beliebig nahe kommt.

Der gegen die Funktion $x = \lambda(u)$ gemachte Einwurf trifft nicht mehr die Funktionen der beiden Veränderlichen x und y, wenn man x, y aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{X}} &= u, \\ \int_a^x \frac{(\alpha' + \beta' x)\,dx}{\sqrt{X}} + \int_b^y \frac{(\alpha' + \beta' x)\,dx}{\sqrt{X}} &= u' \end{aligned} \tag{10}$$

definiert, in denen a, b, α, β, α', β' Konstanten bezeichnen. Dabei denkt sich *Jacobi* die Werte je zweier zwischen den nämlichen Grenzen erstreckter, durch Werte α, β und α', β' unterschiedener Integrale in

5) Auf diese mehrfache Periodizität der inversen Funktion eines hyperelliptischen Integrals hat zuerst, und zwar längst vor *Jacobi*, *Abel* in einer schon vor seiner Reise (1825) verfaßten Abhandlung hingewiesen [Œuv. Nouv. Ed. 2 (1881), p. 40].

der Weise miteinander verknüpft, daß er den Wert des Integrals zunächst bei unbestimmt gelassenen α, β auf irgendeine der möglichen Weisen festgesetzt denkt und aus diesem Integralwerte, der linear von α und β abhängt, die speziellen Werten α, β entsprechenden durch Einsetzen dieser ermittelt. Diese Vorschrift, die später, als man die Vorstellung von der Integration im komplexen Gebiete gewonnen hatte[6]), in der Gestalt ausgesprochen wurde, daß die Integrale auf gleichem Wege zu erstrecken seien, hat zur Folge, daß bei gegebenen x, y neben einem Wertepaare u, u' nur Wertepaare von der Form

$$u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + m_4\omega_4,$$
$$u' + m_1\omega_1' + m_2\omega_2' + m_3\omega_3' + m_4\omega_4'$$

auftreten, wo die ω, ω' Konstante, die m aber ganze Zahlen bezeichnen, die für die beiden Ausdrücke die gleichen sind.[7]) Die symmetrischen Funktionen von x und y sind jetzt einwertige Funktionen der beiden Veränderlichen u, u', welche bei solchen Änderungen von u, u' ungeändert bleiben. Diese Art der Periodizität hat aber nichts Absurdes mehr, da die ganzen Zahlen m nicht so bestimmt werden können, daß beide Werte u, u' gleichzeitig zwei willkürlich vorgegebenen Werten so nahe kommen, als man will.

Aus dem Vorstehenden erhellt, daß *Jacobi* das nach ihm benannte Umkehrproblem für den speziellen Fall der hyperelliptischen Funktionen, aber bereits bei beliebigem Geschlecht p erstmals 1832 aufgestellt hat und daß er dabei durch das *Abel*sche Theorem darauf hingewiesen wurde, daß die Einführung von p Summen von je p Integralen notwendig sei, wenn man die Analogie mit den trigonometrischen und elliptischen Funktionen wahren wolle. 1834 ist er sodann zu

6) Diese Vorstellung war 1834 *Jacobi* noch fremd; sie findet sich bei ihm erstmals in dem 1847 geschriebenen Aufsatz: Zur Geschichte der elliptischen und *Abel*schen Transcendenten [s. Ges. W. 2 (1882), p. 516]; näheres darüber bei *Krazer*, Bibl. math. 10_3 (1909/10), p. 250. In dem genannten Aufsatze wendet *Jacobi* auch zum ersten Male für die gleichzeitigen Änderungen der beiden Variablen u, u' den später allgemein üblichen Namen „Simultanperioden" an, der aber schon 1844 von *Hermite* in einem Briefe an *Jacobi* benutzt worden war [*Hermite*, J. f. Math. 32 (1846), p. 293 = Œuv. 1 (1905), p. 30; *Jacobi*, Ges. W. 2 (1882), p. 107].

7) Dadurch wird der von *Eisenstein* [J. f. Math. 27 (1844), p. 189; auch J. de Math. 10 (1845), p. 449] erhobenen Forderung, daß man jedem der unendlich vielen Werte, die u infolge der Vielwertigkeit der Integrale annehmen kann, einen ganz bestimmten Wert von u' zuordne, genügt, und *Jacobi* hat daher den Einwand *Eisensteins* gegen seinen Ansatz mit Recht zurückgewiesen [Petersb. Bull. 2 (1843), p. 96 = J. f. Math. 30 (1846), p. 184 = Ges. W. 2 (1882), p. 86].

demselben Gedanken durch die Untersuchung mehrfach periodischer Funktionen geführt worden.[8])

4. Umkehrung eines einzelnen Abelschen Integrals. Gegen die *Jacobi*sche Behauptung der Absurdität von Funktionen einer Veränderlichen mit mehr als zwei Perioden hat schon *Göpel*[9]) Einspruch erhoben; es ist aber weder aus dem, was *Göpel* sagt, zu entnehmen, wie er sich die dreifach periodischen Funktionen einer Veränderlichen gedacht hat, noch ist *Jacobi*[10]) bei der Zurückweisung des *Göpel*schen Einwurfs sachlich auf diesen eingegangen. Und doch hatte *Göpel* insofern recht, als der *Jacobi*sche Satz von der Unmöglichkeit drei- und mehrfach periodischer Funktionen einer Veränderlichen seine Gültigkeit verliert, sobald man unendlich vielwertige Funktionen zuläßt[11]), und unter Zuziehung solcher Funktionen kann man auch beim einzelnen hyperelliptischen Integral die obere Grenze x recht wohl als Funktion $x = \lambda(u)$ des Integralwertes u ansprechen.

Die Natur dieser außerhalb des Gesichtskreises von *Jacobi* liegenden Funktion $x = \lambda(u)$ wurde erst in der *Riemann*schen Abhandlung über die *Abel*schen Funktionen 1857 durch Heranziehung der konformen Abbildung der *Riemann*schen Fläche durch ein Integral 1. Gattung (IIB2, Nr. 31) erschlossen und ist zum erstenmal mit voller Klarheit

---

8) Die Vermutung *Schlesingers* [Bibl. math. 6_3 (1905), p. 88], *Jacobi* habe doch wohl nicht durch das *Abel*sche Theorem, sondern durch die Erkenntnis von der Unmöglichkeit der Umkehrung eines einzelnen hyperelliptischen Integrals den ersten Anstoß zur Aufstellung seines Umkehrproblems erhalten, eine Vermutung, welche allerdings darin eine Stütze findet, daß *Jacobi* schon 1828 in einem Briefe an *Crelle* [J. f. Math. 3 (1828), p. 310 = Ges. W. 1 (1881), p. 262] die Unmöglichkeit von mehr als zwei Perioden bei einer Funktion von einer Veränderlichen erwähnt hat, wird durch die Mitteilungen *Gundelfingers* [Bibl. math. 9_3 (1908/9), p. 211] aus den *Jacobi*schen Vorlesungen vom Jahre 1835/6 widerlegt.

9) J. f. Math. 35 (1847), p. 302 Anm.; *Ostwalds* Klass. Nr. 67, p. 36.

10) *Jacobis* Ges. W. 2 (1882), p. 516. Es ist, wie *Weber* in den Anmerkungen zu *Ostwalds* Klass. Nr. 64, p. 37 sagt, schwer jetzt noch festzustellen, welche Vorstellung *Jacobi* über diesen Punkt hatte. Wohl spricht er in dem in Anm. 8 genannten Briefe an *Crelle* von „analytischen" Funktionen, hat aber weder diesen Begriff dort erläutert noch auch diese Einschränkung, wenn er sie überhaupt als solche empfand, in der Abhandlung von 1834 wiederholt. *Hermite* spricht Paris C. R. 58 (1864), p. 206 seine Überzeugung aus, daß *Jacobi* nur an eindeutige Funktionen gedacht habe.

11) Vgl. dazu *Casorati*, Paris C. R. 57 (1863), p. 1018 und 58 (1864), p. 127 und 204, Ist. Lomb. Rend. 16_2 (1883), p. 815; 15_2 (1882), p. 623; 18_2 (1885) p. 879; dann Les fonctions d'une seule variable et à un nombre quelconque de périodes, Milano 1885 = Acta math. 8 (1886), p. 345; siehe auch Anm. 318.

von *Prym*[12]) auseinandergesetzt worden. Danach wird durch ein einzelnes Integral 1. Gattung vom Geschlecht p die einfach zusammenhängende Fläche T', in der die *Abel*schen Integrale eindeutig dargestellt sind, oder, mit anderen Worten, in der ein Zweig jedes Integrals abgesondert ist, auf ein p-blättriges durch $2p-2$ einfache Verzweigungspunkte zusammenhängendes endliches Flächenstück abgebildet, das von p Parallelogrammen begrenzt ist. Dieses Flächenstück wird bei Veränderung des Argumentes u um Perioden, also bei Heranziehung weiterer Zweige des Integrals, mit sich selbst kongruent wiederholt und diese Wiederholungen bedecken, sobald $p>1$ ist, im allgemeinen die Ebene unendlich oft. Die Abbildung der *Riemann*schen Fläche T, in welcher das Integral mit allen seinen Zweigen ausgebreitet ist, ist also im allgemeinen unendlich vielblättrig und die durch Umkehrung des Integrals entstehende Funktion ist eine unendlich vielwertige $2p$-fach periodische Funktion der einen Veränderlichen u, die in der Umgebung jedes einzelnen Punktes dieser unendlich vielblättrigen Fläche den Charakter einer analytischen Funktion hat, aber nicht zur Bestimmung der Integralgrenze x aus dem Integralwerte u dienen kann, da die unendlich vielen Werte $u+\sum_{\alpha=1}^{2p} m_\alpha \omega_\alpha$ (wo die ω die $2p$ Perioden, die m ganze Zahlen bezeichnen), für welche x einen gegebenen Wert annimmt, zwar abzählbar sind, die ganze u-Ebene aber überall dicht bedecken.

In besonderen Fällen bekommt die Fläche, in welcher das *Abel*sche Integral mit allen seinen Zweigen ausgebreitet ist, nur eine endliche Anzahl von Blättern und die Umkehrung des Integrals wird dann dementsprechend durch eine Funktion von endlicher Wertezahl gegeben. Es tritt dies dann ein, wenn alle $2p$ Perioden ω_α linear und ganzzahlig durch zwei (mit nichtreellem Verhältnis) darstellbar sind. Das gegebene Integral ist in diesem Falle algebraisch auf ein elliptisches Integral reduzierbar (vgl. Nr. **120**), die Umkehrung eines einzelnen Integrals führt also hier nicht über die bekannten Funktionen hinaus.

Die anschließende Frage, wann p' Summen von je p' Integralen 1. Gattung von einem Geschlecht $p>p'$ eine endlich vielwertige Umkehrung zulassen, ist in der Literatur bisher nicht behandelt worden. Ihre Erledigung kann aber mit Hilfe der Theorie der allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktionen (s. Nr. **112** f.) geschehen.

Die oben genannte p-blättrige, von p Parallelogrammen begrenzte Fläche, auf welche die *Riemann*sche Fläche T' durch einen Zweig des

12) Wien. Denkschr. 24 (1865), II, p. 16; 2. Ausg. 1885.

Integrals 1. Gattung u abgebildet wird, hat je nach der Wahl der Querschnitte und den Werten der Periodizitätsmodulen ganz verschiedene Gestalten. Bezeichnet man mit A_ν^-, B_ν^-, A_ν^+, B_ν^+ das ν^{te} Parallelogramm, so daß A_ν^+ aus A_ν^- und B_ν^+ aus B_ν^- durch Parallelverschiebung um den Periodizitätsmodul von u am Querschnitte a_ν bzw. b_ν hervorgeht (*Klein*[13]) nennt ein System von 4 solchen Linien einen parallelogrammatischen Rahmen), so können neben der im Falle $p=2$ durch die Fig. 1 dargestellten Form der Abbildungsfläche wesentlich andere auftreten. Legt man z. B. den Querschnitt b_2 durch die beiden Punkte, in denen der Integrand von u verschwindet (Kreuzungspunkte von u), so erhält, wie *Klein* angibt, sowohl B_2^- wie B_2^+ zwei Rückkehrpunkte und es entsteht die in Fig. 2 angegebene Gestalt der Abbildungsfläche, welche man als Differenz zweier Parallelogramme bezeichnen kann. Daß eine einblättrige Abbildungsfläche, etwa bei allgemeinem p ein Parallelogramm, aus welchem $p-1$ Parallelogramme ausgeschnitten sind, auftreten kann, hat auch *Riemann*[14]) bemerkt. Die beiden Grenzlinien A_2^- und A_2^+ können infolge des Verschwindens des Periodizitätsmoduls am Querschnitte a_2 zusammenrücken; es entsteht dann das Parallelogramm mit 2 Schlitzen, wie es schon *Thomae*[15]) angegeben hat. Schieben sich A_2^- und A_2^+ übereinander, so entsteht wieder eine der Fig. 1 ähnliche. Über andere Gestalten dieser parallelo-

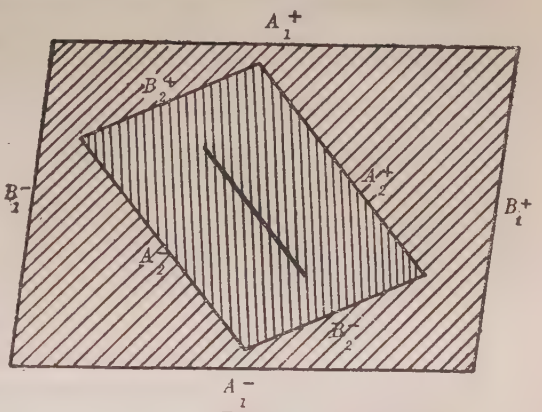

Fig. 1.

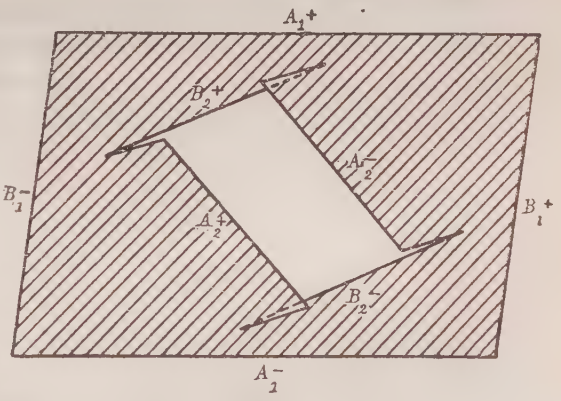

Fig. 2.

13) „Riem. Fl.“ I, p. 70 f.
14) *Riemanns* Ges. math. W. Nachtr. (1902), p. 103.
15) „Formeln“ p. 21 und Leipz. Ber. 52 (1900), p. 110.

grammatischen Rahmen bei *Klein* und bei *Haupt*[16]), der auch die allgemeinsten Möglichkeiten der Periodizitätsmodulen eines Integrals 1. Gattung diskutiert hat.

Wirtinger[17]) hat gezeigt, daß bei passender Zerschneidung der *Riemann*schen Fläche T die Abbildungsfläche aus einer endlichen Anzahl von konvexen, geradlinig begrenzten Polygonen (vgl. II B 4, Nr. 9) bestehen kann, deren jedes in seinem Innern einen Verzweigungspunkt enthält. Für den Fall $p = 2$ läßt sich auf solche Weise ferner ein in bestimmter Weise normiertes, einfaches, geradlinig begrenztes Sechseck mit seiner zentrisch-symmetrischen Wiederholung erhalten, dessen Inneres von Verzweigungspunkten frei ist.

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Umkehrung eines einzelnen Integrals 2. oder 3. Gattung behandeln; dann erstrecken sich die Bereiche ins Unendliche und man erhält z. B. ein endliches Parallelogramm an einer unbegrenzten Ebene (Integral 2. Gattung) oder an einem ins Unendliche sich erstreckenden Parallelstreifen (Integral 3. Gattung) hängend oder aus diesem Gebilde ausgeschnitten.[13])

Durch das Integral 2. Gattung mit nur einem Unendlichkeitspunkt 1. Ordnung und rein imaginären Periodizitätsmodulen wird bei geeigneter Zerschneidung der *Riemann*schen Fläche diese bei beliebigem p auf die ganze einfach überdeckte Ebene mit $2p$ einander paarweise zugeordneten, der reellen Zahlenachse parallelen Schlitzen abgebildet[18]). Für das Integral 3. Gattung mit nur zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkten und rein imaginären Periodizitätsmodulen findet man ebenso einen mit $2p$ Schlitzen versehenen schlichten Parallelstreifen.

5. Göpel. In den „Fundamenta" ist *Jacobi*, von der Betrachtung der elliptischen Integrale ausgehend, erst am Ende seiner Untersuchungen zu den Thetareihen gelangt; in Vorlesungen (II B 3, Nr. 32), welche er erstmals 1835/36 und dann wieder 1839/40 hielt[19]), hat er, wie er sich selbst ausdrückt[20]), den historischen Gang der Entdeckung der elliptischen Funktionen umkehrend den entgegengesetzten Weg eingeschlagen. Ohne irgend etwas aus der Theorie der elliptischen Transzendenten vorauszusetzen, hat er von den vier Thetareihen ausgehend mit Hilfe eines einfachen Prinzips die Relationen aufgestellt, welchen

16) Math. Ann. 77 (1916), p. 24; Math. Z. 6 (1920), p. 219.

17) Wien. Denkschr. 85 (1910), p. 91.

18) *Hilbert*, Gött. N. 1909, p. 314; *Koebe*, Gött. N. 1910, p. 59.

19) Ges. W. 1 (1881), p. 497. Vgl. dazu *Kronecker*, Berl. Ber. 1891, p. 653 = J. f. Math. 108 (1891), p. 325.

20) Ges. W. 1 (1881), p. 499.

diese Reihen genügen, aus diesen Relationen dann die Additionstheoreme der Thetaquotienten und aus diesen die Differentialformeln hergeleitet, welche unmittelbar zu den elliptischen Integralen führen.

Dieser Weg von den Thetafunktionen zu den Integralen wurde zur Lösung des von *Jacobi* aufgestellten Umkehrproblems der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung gleichzeitig von *Göpel*[21]) und *Rosenhain*[22]) beschritten, welche beide, den 4 Thetareihen einer Veränderlichen *Jacobis* entsprechend, 16 Thetareihen zweier Veränderlichen aufstellten und aus diesen, *Rosenhain* in enger Anlehnung an *Jacobi*, *Göpel* selbständiger, die Umkehrfunktionen für die Summe je zweier der eben genannten Integrale bildeten.

Bei *Göpel* haben die 16 Thetareihen, die mit $P, P', \ldots S'''$ bezeichnet sind, von dem Faktor $e^{ru^2+r'u'^2}$ abgesehen, die Form

$$S(-1)^{\mathfrak{a}\varepsilon_1'+\mathfrak{b}\varepsilon_2'} e^{r(u+(2\mathfrak{a}+\varepsilon_1)K+(2\mathfrak{b}+\varepsilon_2)L)^2+r'(u'+(2\mathfrak{a}+\varepsilon_1)K'+(2\mathfrak{b}+\varepsilon_2)L')^2},$$

in welcher $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ alle ganze Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, u, u' die beiden Veränderlichen, r, r', K, K', L, L' Konstanten bezeichnen und die 16 verschiedenen Thetareihen erhalten werden, wenn man an Stelle der 4 Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1', \varepsilon_2'$ auf alle möglichen Weisen die Werte 0 und 1 setzt. Es wird von *Göpel* zunächst die vierfache Periodizität der Quotienten dieser 16 Funktionen, hierauf der Übergang der 16 Thetas ineinander durch Änderung ihrer Argumente um Viertel dieser Perioden und das Verschwinden der Funktionen für Werte der Argumente, welche solchen Viertelperioden gleich sind, behandelt und sodann zur Aufstellung der algebraischen Relationen zwischen den 16 Thetafunktionen übergegangen. Mittels einer Transformation zweiten Grades werden zuerst die Gleichungen gewonnen, laut welchen alle Thetaquadrate linear und homogen durch vier unter ihnen ausgedrückt werden können, und zwischen diesen

---

21) J. f. Math. 35 (1847), p. 277; *Ostwalds* Klass. Nr. 67.

22) Mém. prés. p. div. savants, t. 11 (1851), p. 361; *Ostwalds* Klass. Nr. 65. Diese Abhandlung wurde durch ein für das Jahr 1846 erfolgtes Preisausschreiben der Pariser Akademie [Paris C. R. 22 (1846), p. 767] veranlaßt und dieser am 30. IX. 1846 eingereicht. Bei *Rosenhain* finden wir den Vorschlag, die Integrale solcher algebraischen Funktionen von x, welche von dieser Variable nur durch eine quadratische Gleichung abhängen, ultraelliptische zu nennen und den Namen der *Abel*schen Integrale den Integralen beliebiger algebraischer Funktionen vorzubehalten, und ebenso den weiteren, mit dem Namen *Abel*sche bzw. ultraelliptische Funktionen die Umkehrfunktionen der *Abel*schen bzw. ultraelliptischen Integrale zu belegen. Heute pflegt man hyperelliptisch statt ultraelliptisch zu sagen und die Benennung ultraelliptisch nur den hyperelliptischen Integralen bzw. Funktionen 1. Ordnung, d. h den zum Geschlecht $p = 2$ gehörigen, vorzubehalten.

vier Grundfunktionen selbst wird sodann jene homogene Gleichung vierten Grades abgeleitet, welche heute die *Göpel*sche Relation genannt wird und welche nun zusammen mit den vorher genannten Relationen zwischen den Thetaquadraten die algebraischen Beziehungen zwischen den Thetaquotienten vollständig bestimmt (vgl. dazu Nr. **67**). Hierauf stellt *Göpel* ebenfalls auf dem Wege einer Transformation zweiten Grades die Differentialrelationen zwischen den 16 Thetafunktionen auf und findet aus diesen und den vorher gewonnenen algebraischen Relationen zunächst, daß die Differentiale zweier linearen Verbindungen μ und ν der Variablen u, u' sich ausdrücken lassen durch die Differentiale zweier Thetaquotienten p, q mit Koeffizienten, die algebraisch von p und q abhängen. Nachdem er in diesen Ausdrücken durch Einführung neuer Veränderlichen y, z an Stelle von p, q die Trennung der Variablen durchgeführt hat, gelingt es ihm schließlich, sie in jene symmetrische Form zu bringen, welche der *Jacobi*sche Ansatz verlangt, so daß μ und ν als die Summen von je zwei gleichartigen hyperelliptischen Integralen 1. Ordnung mit verschiedenen Grenzen erscheinen.

6. Rosenhain. Bei *Rosenhain* gehen der erst im dritten Kapitel beginnenden Untersuchung der inversen Funktionen der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung zwei Kapitel voraus, von denen das erste eine auf *Jacobi*s Anregung verfaßte Lösung eines erweiterten Umkehrproblems elliptischer Integrale enthält (näheres darüber in Nr. **105**). Das zweite Kapitel bringt die Definition der Thetareihe zweier Veränderlichen v, w in der Form

$$(11) \qquad \varphi_{33}(v, w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p^{m^2} e^{2mv}\, \vartheta_3(w + 2mA, q)$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{m^2 \log p + n^2 \log q + 4mnA + 2mv + 2nw},$$

gibt für die Konstanten p, q, A die Konvergenzbedingung an und behandelt die Periodizitätseigenschaften der Funktion. Nun folgt der Übergang von reellen zu imaginären Werten der Argumente und endlich die lineare Darstellung eines Produktes von n Thetafunktionen durch n^2 spezielle Funktionen, die man heute als Thetafunktionen n^{ter} Ordnung bezeichnet (vgl. dazu Nr. **17**), Fragen, die mit dem Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale, wie es dann im 3. Kapitel in Angriff genommen wird, nicht in unmittelbarem Zusammenhange stehen.

In diesem 3. Kapitel werden die 16 Thetafunktionen $\varphi_{rs}(v, w)$ $(r, s = 0, 1, 2, 3)$ definiert und für sie zunächst, wie es *Jacobi* im

Falle $p = 1$ getan hat, jene allgemeine Formel zwischen Produkten von je 4 Thetafunktionen abgeleitet, welche später als *Riemann*sche Thetaformel (Nr. 36) für beliebiges p verallgemeinert wurde. Aus dieser werden zunächst die Relationen zwischen den Nullwerten $\varphi_{r_1}(0, 0)$ der 10 geraden Thetafunktionen abgeleitet, kraft welcher sich ihre Quotienten durch 3 Parameter $\varkappa, \lambda, \mu$ ausdrücken lassen, und weiter dann die Relationen, welche zwischen den 16 Funktionen $\varphi_{r_1}(v, w)$ bei beliebigen Argumenten v, w bestehen. Diese würden ausreichen ihre 15 Quotienten durch zwei unter ihnen darzustellen; statt dessen wählt aber *Rosenhain* aus Symmetriegründen die Darstellung aller 15 durch 2 Parameter x_1, x_2 und erhält schließlich die 15 Quotienten $\frac{\varphi_{r_1}^2(v, w)}{\varphi_{0_0}^2(v, w)}$ rational durch x_1, x_2 und $\sqrt{(x_1, \varkappa\lambda\mu)}$, $\sqrt{(x_2, \varkappa\lambda\mu)}$ ausgedrückt, wo zur Abkürzung

$$(x, \varkappa\lambda\mu) = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x) \tag{12}$$

gesetzt ist. Aus der vorher genannten allgemeinen Formel leitet *Rosenhain* weiter aber auch, wie früher *Jacobi*, die Additionstheoreme der Thetaquotienten und aus diesen die Darstellung ihrer partiellen Differentialquotienten durch die Thetaquotienten selbst her. Indem er dann in den letzten Gleichungen für die Thetaquotienten allenthalben ihre früher gefundenen algebraischen Ausdrücke in x_1, x_2 einsetzt, erhält er die partiellen Differentialquotienten von $\sqrt{x_1 x_2}$ und $\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}$ nach v und w durch symmetrische Funktionen in x_1 und x_2 ausgedrückt und, indem er die hieraus für $d\sqrt{x_1 x_2}$ und $d\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}$ sich ergebenden Gleichungen nach dv und dw auflöst, für dv und dw endlich Ausdrücke von der Gestalt

$$\begin{aligned} dv &= \frac{B + Cx_1}{\sqrt{(x_1, \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_1 + \frac{B + Cx_2}{\sqrt{(x_2, \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_2, \\ dw &= \frac{B' + C'x_1}{\sqrt{(x_1, \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_1 + \frac{B' + C'x_2}{\sqrt{(x_2, \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Damit ist der Zusammenhang mit dem Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung hergestellt und zugleich gezeigt, daß die Lösung desselben durch jene früheren Gleichungen geleistet ist, in denen die Quadrate der Thetaquotienten durch symmetrische Funktionen von x_1 und x_2 dargestellt wurden, indem aus ihnen umgekehrt die symmetrischen Funktionen $x_1 x_2$ und $x_1 + x_2$ als einwertige Funktionen von v und w erhalten werden.

Den Schluß der *Rosenhain*schen Abhandlung bildet, ebenso wie der *Göpel*schen, die Bestimmung der in den Thetareihen auftretenden Konstanten durch Integrale zwischen den Verzweigungspunkten des

hyperelliptischen Gebildes; hierbei wird *Rosenhain* auf eine Gleichung zwischen diesen Integralen geführt, welche nichts anderes ist als die *Riemann*sche Bilinearrelation zwischen den Periodizitätsmodulen der Integrale 1. Gattung (II B 2, Nr. 17).

Göpel und *Rosenhain* weisen auf die Möglichkeit der Bildung von Thetafunktionen beliebig vieler Veränderlichen hin, aber *Rosenhain*[23]) bemerkt in einem Briefe an *Jacobi* vom 4. September 1844 schon die Schwierigkeiten, welche der Ausdehnung seiner Theorie der hyperelliptischen Funktionen 1. Ordnung auf beliebiges p deshalb entgegenstehen, weil bei größerem p die Anzahl $\frac{1}{2}p(p+1)$ der Modulen der Thetareihe über die Anzahl $2p-1$ der wesentlichen Konstanten des hyperelliptischen Gebildes hinausgeht.[24])

7. **Weierstraß** (ältere Arbeiten). Von den Arbeiten *Göpels* und *Rosenhains* grundverschieden sowohl im eingeschlagenen Verfahren als in den benutzten Hilfsmitteln sind die Abhandlungen von *Weierstraß* zum Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale, deren erste, das Braunsberger Programm vom 17. Juli 1849, noch vor der *Rosenhain*schen Arbeit erschien.

Während *Göpel* und *Rosenhain* von dem eigentlichen Ziele der Untersuchung, der Thetafunktion, ausgehen und von ihr aus, mit den elementarsten Hilfsmitteln der formalen Rechnung ihr Auskommen findend, schließlich zu den Differentialgleichungen des Umkehrproblems gelangen, geht *Weierstraß*, der Natur der Aufgabe folgend, von diesen Differentialgleichungen aus und bahnt sich von ihnen, aber nun seinerseits weitreichender Sätze der allgemeinen Funktionentheorie bedürfend, den Weg zur Thetafunktion.

Weierstraß stellt[25]) das Umkehrproblem in folgender Form auf: „Es bedeute

$$R(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2\varrho+1}) \tag{14}$$

eine ganze Funktion $(2\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades von x, wobei angenommen werde, daß unter den Größen $a_1, a_2, \dots a_{2\varrho+1}$ keine zwei gleiche sich finden, während sie im übrigen beliebige (reelle und imaginäre) Werte haben können.[26]) Ferner seien $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ ϱ unbeschränkt ver-

23) J. f. Math. 40 (1850), p. 327; vgl. dazu *Jacobis* Bemerkungen J. f. Math. 35 (1847), p. 316 = Ges. W. 2, p. 151 auch J. de Math. 15 (1850), p. 361; ferner Ges. W. 2, p. 521.

24) Wegen der im hyperelliptischen Falle zwischen den Modulen der Thetareihe bestehenden Beziehungen siehe Nr. 74.

25) J. f. Math. 52 (1856), p. 285 = Math. W. 1 (1894), p. 297.

26) In den früheren Arbeiten [Braunsb. Progr. 1849 und J. f. Math. 47

änderliche Größen und zwischen diesen und ebenso vielen von ihnen abhängigen $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ die nachstehenden Differentialgleichungen, in denen

$$P(x) \text{ das Produkt } (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho)$$

bedeutet, gegeben:

$$\begin{aligned}
du_1 &= \frac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_1}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_1}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}+\cdots+\frac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_1}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},\\
du_2 &= \frac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_2}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_2}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}+\cdots+\frac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_2}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},\\
&\text{(15)}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
du_\varrho &= \frac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_\varrho}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_\varrho}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}+\cdots+\frac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_\varrho}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},
\end{aligned}$$

mit der Bestimmung, daß $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ die Werte $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ annehmen sollen, wenn $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ sämmtlich verschwinden."

Weierstraß zeigt zunächst, daß für Werte $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$, deren absolute Beträge hinreichend klein sind, die Größen

$$s_\alpha = \sqrt{\frac{P'(a_\alpha)}{Q(a_\alpha)}}(x_\alpha - a_\alpha), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{16}$$

in denen

$$\begin{aligned}
\frac{R(x)}{P(x)} &= A_0(x-a_{\varrho+1})(x-a_{\varrho+2})\ldots(x-a_{2\varrho+1}) \\
&= Q(x) \text{ und } \frac{dP(x)}{dx} = P'(x)
\end{aligned} \tag{17}$$

gesetzt ist, und ebenso die Größen

$$\frac{P(x_\alpha)}{\sqrt{R(x_\alpha)}} = \frac{\sqrt{R(x_\alpha)}}{Q(x_\alpha)} \tag{18}$$

sich in Reihen von der Form

$$u_\alpha + (u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_3 + (u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_5 + \cdots$$

entwickeln lassen, in denen mit $(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_n$ eine ganze homogene Funktion n^{ten} Grades von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ bezeichnet ist, und daß sich so, unter der gemachten Voraussetzung, $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ und $\sqrt{R(x_1)}$, $\sqrt{R(x_2)}, \ldots \sqrt{R(x_\varrho)}$ als vollständig bestimmte eindeutige Funktionen von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ ergeben.

Nun gestattet aber das *Abel*sche Theorem, aus den Gleichungen

$$2\mu\sum_\alpha \frac{1}{2}\frac{P(x'_\alpha)}{x'_\alpha - a_\beta}\cdot\frac{dx'_\alpha}{\sqrt{R(x'_\alpha)}} = \sum_\alpha \frac{1}{2}\frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha - a_\beta}\cdot\frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}}, \tag{19}$$

(1854), p. 289 = Math. W. 1, p. 111 u. 133, vgl. auch Math. W. 3 (1903), p. 289] sind die a noch durchaus als reelle Größen vorausgesetzt.

in denen μ eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, die symmetrischen Funktionen der x_α rational durch die ϱ Paare x'_α, $\sqrt{R(x'_\alpha)}$ und sodann jede der Größen $\sqrt{R(x_\alpha)}$ rational durch diese Größen und x_α auszudrücken. Denkt man sich dabei die x'_α denselben Anfangsbedingungen unterworfen wie die x_α, so daß die Gleichungen

$$2\mu u'_\alpha = u_\alpha \tag{20}$$

bestehen, so läßt sich bei beliebig gegebenen u durch geeignete Wahl von μ immer erreichen, daß in den u' die obigen Entwicklungen gültig sind, und man erhält dann die symmetrischen Funktionen der x durch die u' und also endlich durch die u als Quotienten von Potenzreihen dargestellt, welche sicher bei passender Wahl von μ konvergieren. Diese Quotienten (nicht ihre Zähler und Nenner für sich) sind aber von μ unabhängig, da ihnen diese Eigenschaft für genügend kleine u zukommt und konvergieren also allenthalben.

Wird

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\varrho) \tag{21}$$

gesetzt, so sind speziell auch die Ausdrücke

$$\sqrt{\frac{\varphi(a_\alpha)}{-Q(a_\alpha)}} = al(u_1, u_2, \cdots u_\varrho)_\alpha \tag{22}$$

für alle Werte der u als Quotienten zweier konvergenten Potenzreihen darstellbar. Die mit ihnen gebildete Gleichung hat die gesuchten Werte $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ als Wurzeln und die Formel

$$\sqrt{R(x_\alpha)} = -\sum_\beta \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(x_\alpha)}{\partial u_\beta} \tag{23}$$

gibt nach Bestimmung von $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ die zugehörigen Wurzelgrößen $\sqrt{R(x_1)}$, $\sqrt{R(x_2)}$, $\dots \sqrt{R(x_\varrho)}$.

Mit denselben Mitteln läßt sich sodann der Satz erweisen, daß es eine eindeutige Funktion $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{l}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ der unbeschränkt veränderlichen Größen $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ gibt, welche der Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} d \log \overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{l}(u_1, u_2, \cdots u_\varrho) = \sum_\alpha \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha - a} \cdot \frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}} \tag{24}$$

genügt und, wenn diese Veränderlichen sämtlich verschwinden, den Wert 1 annimmt. Auf diese Funktionen $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{l}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ und ihre Differentialquotienten läßt sich jedes *Abel*sche Integral von der Form

$$\int \sum_\alpha \frac{F(x_\alpha)\, dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}},$$

wo $F(x)$ eine beliebige rationale Funktion von x bezeichnet, zurückführen.

Durch die bisherigen Untersuchungen ist, wie *Weierstraß* selbst am Beginne des zweiten Kapitels sagt, für die Funktionen $al(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ zwar eine völlig bestimmte Erklärung gefunden, auch ist die analytische Form dieser Funktionen festgestellt, aber es sind diese Funktionen bis jetzt nicht in einer ihrem wahren Charakter entsprechenden, für alle Werte der u unverändert geltenden Form dargestellt. Dies sollte im weiteren Verlaufe der Abhandlung geschehen und es sollte dazu insbesondere ein Satz dienen, der die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angibt, daß aus einer Differentialgleichung

$$(25) \qquad d\log f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \sum_a f_a(x_1, x_2, \cdots x_n)\, dx_a$$

die Funktion f als ganze Funktion bestimmt werden kann (s. p. 701). Aber dieser Satz[27]) ist hier nur für den Fall einer Variable mitgeteilt und es ist auch die in Aussicht genommene Darstellung nur für die elliptischen Funktionen durchgeführt; die den hyperelliptischen Funktionen zugedachte Fortsetzung der Abhandlung ist nicht erschienen.

In der früheren Abhandlung[28]) (ebenso wie in seinen späteren Vorlesungen, s. Nr. 48) schlägt *Weierstraß*, indem er denselben Grundgedanken der Zerspaltung der logarithmischen Derivierten der Funktion $al(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ in zwei vollständige Differentiale verfolgt, aber von Anfang an die Integrale 2. und 3. Gattung heranzieht, einen einfacheren Weg zur Thetafunktion ein. Durch die Gleichung

$$(26) \qquad Sl(u_1, u_2, \cdots) = \sum_a \int_{a_{2a-1}}^{x_a} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x)}{x-a} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

werden Summen von Integralen 3. Gattung und hieraus durch Differentiation nach einem Parameter Integralsummen 2. Gattung

$$(27) \qquad dSl(u_1, u_2, \cdots)_c = \sum_a \frac{1}{2} \frac{Q(a_{2c-1})}{P'(a_{2c-1})} \cdot \frac{P(x_a)\, dx_a}{(x_a - a_{2c-1})^2 \sqrt{R(x_a)}}$$

eingeführt, und es zeigt sich, daß, wenn man unter K und J gewisse bestimmte Integrale 1. bzw. 2. Gattung versteht, der Ausdruck

$$(28) \qquad d\log Al(u_1, u_2, \cdots) = -\sum_a^{2a-1} \{J_a + Sl(u_1 - K_1, \cdots)\}\, du_a$$

ein vollständiges Differential ist. Die durch diese Gleichung und die Bestimmung, daß $Al(0, 0, \dots) = 1$ sei, definierte Funktion $Al(u_1, u_2, \dots)$

27) Abh. a. d. Functionenlehre 1886, p. 139; Math. W. 2 (1895), p. 165.
28) J. f. Math. 47 (1854), p. 298 = Math. W. 1 (1894), p. 142.

ist eine ganze Funktion, läßt sich also in eine für alle endlichen Werte der u konvergente Reihe entwickeln; die Koeffizienten dieser Entwicklung sind rationale Funktionen der a_α. Die al-Funktionen erscheinen jetzt als Quotienten je zweier Al-Funktionen.

Mit dieser Al-Funktion ist das eigentliche Ziel der *Weierstraß*schen Untersuchung erreicht. Es werden (immer unter Beschränkung auf reelle Werte der a) ihre Periodizitätseigenschaften in den Gleichungen

$$(29)\quad Al(u_1 + 2\overset{\alpha}{K}_1, \cdots) = (-1)^\alpha e^{-2\sum_\alpha^\alpha J_\alpha (u_\alpha + \overset{\alpha}{K}_\alpha)} Al(u_1, \cdots)$$

zum Ausdruck gebracht, aus denen sich ohne Mühe jene Bilinearrelationen zwischen den Perioden 1. und 2. Gattung, $\overset{\alpha}{K}$ und $\overset{\alpha}{J}$, ergeben, welche *Weierstraß* im Braunsberger Programm auf elementarem Wege hergeleitet hatte.

Durch Einführung neuer Variablen v und unter Hinzufügung eines Faktors $ge^{E(u_1, u_2, \cdots)}$, in dem g eine Konstante, $E(u_1, u_2, \ldots)$ eine ganze homogene Funktion zweiten Grades der u bezeichnet, entsteht die *Jacobi*sche Funktion

$$(30)\qquad Jc(v_1, v_2, \cdots) = ge^{E(u_1, u_2, \cdots)} Al(u_1, u_2, \cdots),$$

welche sich auf Grund ihres Charakters als ganze Funktion und ihrer Periodizitätseigenschaften

$$(31)\quad \begin{aligned} &Jc(v_1 + 2\mathfrak{m}_1\pi,\ v_2 + 2\mathfrak{m}_2\pi,\ \cdots) = Jc(v_1, v_2, \cdots),\\ &Jc(v_1 + 2\delta_1 i,\ v_2 + 2\delta_2 i, \ldots) = Jc(v_1, v_2, \ldots) e^{-2\sum_\alpha \mathfrak{n}_\alpha (v_\alpha + \delta_\alpha i) i}, \end{aligned}$$

wobei

$$(32)\qquad \delta_\alpha = \mathfrak{n}_1 \delta_{\alpha 1} + \mathfrak{n}_2 \delta_{\alpha 2} + \cdots + \mathfrak{n}_\varrho \delta_{\alpha\varrho}$$

gesetzt ist, in eine für alle endlichen Werte der v konvergente Reihe von der Form

$$(33)\quad Jc(v_1, v_2, \ldots) = S\{e^{-\sum_{\alpha,\mathfrak{c}} \mathfrak{n}_\alpha \mathfrak{n}_\mathfrak{c} \delta_{\alpha\mathfrak{c}}} \cos(\mathfrak{n}_1 v_1 + \mathfrak{n}_2 v_2 + \cdots + \mathfrak{n}_\varrho v_\varrho)\}$$

entwickeln läßt.

Mit der Gewinnung der *Jacobi*schen Funktion, aus der sich nun rückwärts alle im Laufe der Untersuchung aufgetretenen Funktionen darstellen lassen, ist das Umkehrproblem der hyperelliptischen Funktionen vollständig gelöst und auf eine Funktion zurückgeführt, welche in der Tat die von *Rosenhain* vermutete Gestalt hat; zugleich hat aber *Weierstraß*, indem sich bei ihm die $\frac{1}{2}\varrho(\varrho+1)$ Größen $\delta_{\alpha\mathfrak{c}} = \delta_{\mathfrak{c}\alpha}$ mit Hilfe der bestimmten Integrale K ausdrücken und also nur von den in diesen enthaltenen $2\varrho - 1$ wesentlichen Konstanten des hyper-

elliptischen Gebildes abhängen, jene Schwierigkeit aufgeklärt, auf welche gleichfalls von *Rosenhain* hingewiesen worden war.

Werden die $\delta_{\alpha c}$ keinen anderen Bedingungen unterworfen als den für die Konvergenz der Reihe erforderlichen, so ist die Funktion $Jc(v_1, v_2, \ldots)$ die allgemeine Thetafunktion (Nr. **15**).

8. Hermite. Der erste Versuch, das *Jacobi*sche Umkehrproblem für allgemeine, nicht hyperelliptische, *Abel*sche Integrale aufzustellen, wurde 1844 von *Hermite* gemacht.[29]) Auch er knüpft, wie sein Vorbild *Jacobi*, an das *Abel*sche Theorem an und setzt für die u solche Integrale, für welche sich die rechte Seite des *Abel*schen Theorems auf eine Konstante reduziert. Man wird aber dazu bemerken, daß diese Bedingung, wie schon *Brill* und *Nöther*[30]) unter Hinweis auf *Clebsch* und *Gordan*[31]) angegeben haben, das Integral noch nicht zu einem Integral 1. Gattung macht. Weiter erkennt zwar *Hermite* bereits, daß sich die Periodizitätsmodulen seiner Integrale aus Integralen zwischen Verzweigungspunkten zusammensetzen, kann aber zur Aufstellung eines vollständigen Systems unabhängiger Perioden so wenig gelangen, wie später *Puiseux*[32]); auch die Lösung dieser Aufgabe blieb *Riemanns* Theorie der *Abel*schen Funktionen vorbehalten.[33])

Von größter Bedeutung für die Theorie der *Abel*schen Funktionen war dagegen die 1855 erschienene Abhandlung *Hermites*[34]): „Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes". Hier knüpft *Hermite* an die Untersuchungen von *Göpel* und *Rosenhain* an und stellt zu Anfang seiner Abhandlung das Transformationsproblem der *Abel*schen Funktionen in folgender Gestalt auf:

Bezeichnet $\varphi(x)$ eine ganze rationale Funktion 5^{ten} oder 6^{ten} Grades und setzt man

29) Paris C. R. 18 (1844), p. 1133 = J. de Math. 9 (1844), p. 353 = Œuv. 1 (1905), p. 49.

30) D. M. V. Jahresb. 3 (1894), p. 217.

31) „A. F.", p. 47.

32) J. de Math. 15 (1850), p. 365 u. 16 (1851), p. 228; deutsch von *Fischer* (1861).

33) Daß *Galois* bereits einen tiefen Einblick in die Natur der *Abel*schen Integrale und ihre Perioden gehabt hat, geht aus dem Briefe hervor, den er am 29. Mai 1832 kurz vor seinem Tode an *A. Chevalier* geschrieben hat und der zuerst in der Revue encyclopédique 55 (1832), p. 566 veröffentlicht wurde (später J. de Math. 11 (1846), p. 381 und Œuv. math. d'*Ev. Galois* (1897)).

34) Paris C. R. 40 (1855), p. 249 et suiv. = Œuv. 1 (1905), p. 444, dazu *Cayley*, Quart. Journ. 21 (1886), p. 142 = Coll. math. pap. 12 (1897), p. 358 und *Brioschi*, Paris C. R. 47 (1858), p. 310 = Op. mat. 4 (1906), p. 323.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = u,$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{y\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = v, \tag{34}$$

so lassen sich, wie *Göpel* und *Rosenhain* gezeigt haben, die symmetrischen Funktionen von x und y als einwertige Funktionen von u und v darstellen und zu dieser Darstellung dienen insbesondere die 15 Quotienten der Thetaquadrate. Nennt man diese $f_1(u, v)$, $f_2(u, v), \ldots f_{15}(u, v)$ und bezeichnet mit $F_1(u, v)$, $F_2(u, v), \ldots F_{15}(u, v)$ die nämlichen Funktionen, welche den Gleichungen

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\alpha + \beta x}{\sqrt{\psi(x)}}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\alpha + \beta y}{\sqrt{\psi(y)}}\,dy = u,$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\gamma + \delta x}{\sqrt{\psi(x)}}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\gamma + \delta y}{\sqrt{\psi(y)}}\,dy = v \tag{35}$$

entspringen, in denen α, β, γ, δ Konstanten sind und $\psi(x)$ wieder eine ganze rationale Funktion 5^{ten} oder 6^{ten} Grades bezeichnet, so stellt *Hermite* die Frage, welche Bedingungen bei gegebenem $\varphi(x)$ die Konstanten α, β, γ, δ und die Koeffizienten von $\psi(x)$ erfüllen müssen, damit die 15 Funktionen $F(u, v)$ sich rational durch die 15 Funktionen $f(u, v)$ ausdrücken lassen.

Die dann von *Hermite* entwickelte Theorie der Transformation der Thetafunktionen zweier Veränderlichen läßt sich sofort auf beliebig viele Variablen ausdehnen und es soll über diese Theorie jetzt im Zusammenhang berichtet werden.

II. Die Transformation der Perioden.

9. Transformationsproblem. Die *Abel*schen Funktionen sind $2p$-fach periodische Funktionen der p komplexen Veränderlichen $w_1, w_2, \ldots w_p$, deren $2p$ Periodensysteme $\omega_{1\alpha}, \omega_{2\alpha}, \ldots \omega_{p\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots 2p)$ den $\frac{1}{2}(p-1)p$ Bedingungen

$$\sum_{\varrho=1}^{p} (\omega_{\mu\varrho}\omega_{\nu,p+\varrho} - \omega_{\mu,p+\varrho}\omega_{\nu\varrho}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} \mu, \nu = 1, 2, \ldots p \\ \mu < \nu \end{pmatrix} \tag{36}$$

genügen, während für die korrespondierenden Änderungen

$$\omega_\alpha = \eta_\alpha + i\zeta_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 2p) \tag{37}$$

irgendeiner linearen Verbindung der w

$$\sum_{\varrho=1}^{p} (\eta_\varrho \xi_{p+\varrho} - \eta_{p+\varrho} \xi_\varrho) > 0 \quad \text{ist.} \tag{38}$$

Soll nun eine *Abel*sche Funktion von den Perioden $\omega_{\mu\alpha}$, für welche also die Bedingungen (36) und (38) erfüllt sind, mit *Abel*schen Funktionen von anderen Perioden $\omega'_{\mu\alpha}$, welche analogen Bedingungen genügen, durch eine algebraische Gleichung verknüpft sein (vgl. II B 2, Nr. 47), so daß zu einem Wertesysteme der letzteren Funktionen nur eine endliche Anzahl von Werten der ersteren gehört, so müssen die Perioden ω' homogene lineare Funktionen der ω mit rationalen Koeffizienten, also

$$\omega'_{\mu\alpha} = \sum_{\varepsilon=1}^{2p} c_{\alpha\varepsilon} \omega_{\mu\varepsilon} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots p \\ \alpha = 1, 2, \ldots 2p \end{pmatrix} \tag{39}$$

sein, wo die $c_{\alpha\varepsilon}$ rationale Zahlen bezeichnen.

Durch diese Gleichungen gehen dann die zwischen den ω' bestehenden bilinearen Relationen (36) in bilineare Relationen zwischen den ω über, und wenn man voraussetzt, daß zwischen diesen keine anderen bilinearen Relationen bestehen als die Gleichungen (36), so ergeben sich für die Zahlen $c_{\alpha\varepsilon}$ die $p(2p-1)$ Bedingungen

$$\sum_{\varrho=1}^{p} (c_{\varrho\varepsilon} c_{p+\varrho,\varepsilon'} - c_{p+\varrho,\varepsilon} c_{\varrho\varepsilon'}) = \begin{cases} n, & \text{wenn } \varepsilon' = p + \varepsilon, \\ 0, & \text{wenn } \varepsilon' \gtrless p + \varepsilon, \end{cases} \tag{40}$$

$$(\varepsilon, \varepsilon' = 1, 2, \ldots 2p;\ \varepsilon < \varepsilon')$$

in denen n eine nicht näher bestimmte rationale Zahl bezeichnet, die aber infolge der für die ω und ω' geltenden Ungleichungen (38) einen positiven Wert besitzen muß.[35])

Der Übergang von Perioden ω zu neuen Perioden ω' vermittelst linearer Gleichungen von der Form (39), in denen die $c_{\alpha\varepsilon}$ $4p^2$ rationale Zahlen bezeichnen, welche den $p(2p-1)$ Relationen (40) ge-

35) Es muß dazu bemerkt werden, daß die Perioden der *Abel*schen Funktionen im allgemeinen keinen weiteren, von (36) verschiedenen bilinearen Relationen genügen. Bestehen aber in speziellen Fällen solche, so existieren außer den „ordinären" durch die Bedingungen (40) charakterisierten Transformationen noch andere „singuläre", die bis jetzt nur im Falle $p = 2$ untersucht worden sind (Nr. 126).

Ferner mag an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß für die allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktionen (Nr. 112), bei denen an Stelle der Gleichungen (36) die allgemeineren (627) treten, eine gleiche Transformationstheorie aufgestellt werden kann, wobei auch wieder für solche Funktionen, deren Perioden außer den Relationen (627) noch andere bilineare Relationen erfüllen, neben den „ordinären" Transformationen von diesen verschiedene existieren werden.

nügen, heißt eine Transformation der Perioden; die in den Gleichungen (40) auftretende positive rationale Zahl n der Grad oder die Ordnung der Transformation. Sind die Transformationszahlen $c_{\alpha\varepsilon}$ ganze Zahlen, so heißt die Transformation eine ganzzahlige; ist die Ordnung $n = 1$, so wird sie eine lineare genannt.[36])

Die $4p^2$ Transformationszahlen $c_{\alpha\varepsilon}$ genügen weiter den $p(2p-1)$ Gleichungen

$$\sum_{\sigma=1}^{p} (c_{\varepsilon\sigma} c_{\varepsilon', p+\sigma} - c_{\varepsilon, p+\sigma} c_{\varepsilon'\sigma}) = \begin{cases} n, & \text{wenn } \varepsilon' = p + \varepsilon, \\ 0, & \text{wenn } \varepsilon' \gtrless p + \varepsilon. \end{cases} \tag{41}$$

$$(\varepsilon, \varepsilon' = 1, 2, \ldots 2p;\ \varepsilon < \varepsilon')$$

Diese Relationen sind den Relationen (40) äquivalent, da nicht nur sie aus diesen, sondern auch umgekehrt diese aus ihnen abgeleitet werden können. Bezeichnet man ferner mit C die aus den $4p^2$ Zahlen $c_{\alpha\varepsilon}$ gebildete Determinante, so ist

$$C = n^p \tag{42}$$

und zwischen den Elementen $c_{\alpha\beta}$ der Determinante C und ihren Adjunkten $\gamma_{\alpha\beta}$ bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= n^{p-1} c_{p+\mu, p+\nu}, & \gamma_{\mu, p+\nu} &= -n^{p-1} c_{p+\mu, \nu}, \\ \gamma_{p+\mu, \nu} &= -n^{p-1} c_{\mu, p+\nu}, & \gamma_{p+\mu, p+\nu} &= n^{p-1} c_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{43}$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots p)$$

Auch diese Relationen charakterisieren die Transformationszahlen $c_{\alpha\beta}$ vollständig, da aus ihnen gleichfalls die Relationen (40) und (41) folgen.[37])

Ist die Transformation (39) vom n^{ten} Grade, so ist der Inhalt des den Perioden ω' zukommenden Periodenparallelotops (s. Nr. **112**) das n^p-fache des den Perioden ω entsprechenden; bei linearer Transformation wird also der Inhalt des Periodenparallelotops nicht geändert. Die ganzzahlige lineare Transformation ist speziell der Übergang von einem Periodengitter zu einem anderen mit denselben Gitterpunkten.

10. Zusammensetzung von Transformationen. Wendet man auf die mittelst der Transformation T

36) Nachdem im Falle $p = 1$ das Transformationsproblem schon in den die Theorie der elliptischen Funktionen begründenden Arbeiten von *Jacobi* und *Abel* (II B 3) behandelt worden war, wurde es für $p = 2$ von *Hermite* [s. o. Anm. 34, vgl. dazu auch *Königsberger,* J. f. Math. 64 (1865), p. 17 und 65 (1866), p. 335], für beliebiges p von *Thomae* [Diss. Göttingen, 1864 und J. f. Math. 75 (1873), p. 224], *Clebsch* und *Gordan* („A. F.“) und *Weber* [J. f. Math. 74 (1872), p. 57 und Ann. di Mat. 9_2 (1878/9), p. 126] aufgestellt.

37) Die Bildung von Systemen von $4p^2$ Zahlen $c_{\alpha\beta}$, welche den Bedingungen (40) genügen, lehrt *Frobenius,* J. f. Math. 89 (1880), p. 40.

$$\omega'_{\mu\beta} = \sum_{\gamma=1}^{2p} c_{\beta\gamma}\,\omega_{\mu\gamma} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\dots p\\ \beta = 1,2,\dots 2p\end{pmatrix} \tag{44}$$

von der Ordnung n eingeführten Perioden ω' eine neue Transformation T'

$$\omega''_{\mu\alpha} = \sum_{\beta=1}^{2p} c'_{\alpha\beta}\,\omega'_{\mu\beta} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\dots p\\ \alpha = 1,2,\dots 2p\end{pmatrix} \tag{45}$$

von der Ordnung n' an, so definieren die aus den Gleichungen (44) und (45) durch Elimination der Größen ω' entstehenden Gleichungen

$$\omega''_{\mu\alpha} = \sum_{\gamma=1}^{2p} c''_{\alpha\gamma}\,\omega_{\mu\gamma}, \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\dots p\\ \alpha = 1,2,\dots 2p\end{pmatrix} \tag{46}$$

in denen zur Abkürzung

$$c''_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{2p} c'_{\alpha\beta}\,c_{\beta\gamma} \qquad (\alpha,\gamma = 1,2,\dots 2p) \tag{47}$$

gesetzt ist, eine dritte Transformation T'' von der Ordnung $n'' = nn'$ welche die aus den Transformationen T und T' zusammengesetzte Transformation

$$T'' = TT' \tag{48}$$

genannt wird. Da aus zwei Transformationen durch Zusammensetzung wieder eine Transformation hervorgeht, bilden die Transformationen T eine Gruppe. Man kann auf die angegebene Weise aus beliebig vielen Transformationen $T_1, T_2, \dots T_m$, nachdem man sie in eine bestimmte Reihenfolge gebracht hat, durch Zusammensetzung eine neue Transformation $T_1T_2\dots T_m$ erzeugen. Die Ordnung der zusammengesetzten Transformation ist dabei stets gleich dem Produkte der Ordnungen der einzelnen Transformationen. Bei dieser Zusammensetzung der Transformationen gilt das Assoziationsgesetz, d. h. es ist $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3 = T_1T_2T_3$, nicht aber das Kommutationsgesetz, d. h. es ist im allgemeinen T_2T_1 von T_1T_2 verschieden.

Unter allen Transformationen T gibt es eine ausgezeichnete, bei der

$$\omega'_{\mu\alpha} = \omega_{\mu\alpha} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\dots p\\ \alpha = 1,2,\dots 2p\end{pmatrix} \tag{49}$$

ist; diese wird die identische genannt und mit J bezeichnet. Zu einer gegebenen Transformation T gibt es nun immer eine und nur eine andere Transformation T^{-1}, welche durch die Gleichung

$$TT^{-1} = J \tag{50}$$

bestimmt ist. Ist T von der Ordnung n, so ist T^{-1} von der Ord-

nung $\frac{1}{n}$ und ihre Transformationszahlen $\bar{c}$ sind durch die Gleichungen

$$(51)\qquad \begin{gathered} \bar{c}_{\mu\nu} = \frac{1}{n} c_{p+\nu,p+\mu}, \qquad \bar{c}_{\mu,p+\nu} = -\frac{1}{n} c_{\nu,p+\mu}, \\ \bar{c}_{p+\mu,\nu} = -\frac{1}{n} c_{p+\nu,\mu}, \qquad \bar{c}_{p+\mu,p+\nu} = \frac{1}{n} c_{\nu\mu} \\ (\mu,\nu = 1,2,\dots p) \end{gathered}$$

gegeben. Die Transformation T^{-1} wird die zur Transformation T inverse Transformation genannt. Es ist auch umgekehrt $T^{-1}\,T = J$, also auch T die zu T^{-1} inverse Transformation. Führt die Transformation T auf die Perioden ω angewandt zu den Perioden ω', so führt umgekehrt die inverse Transformation T^{-1} auf die Perioden ω' angewandt zu den Perioden ω zurück.

Unter Benützung der zu einer vorliegenden Transformation inversen kann man eine gegebene Transformation T immer aus einer beliebigen Anzahl m von Transformationen zusammensetzen, von denen $m-1$ beliebige willkürlich angenommen werden können, während die m^{te} durch diese und die Transformation T eindeutig bestimmt ist. Dieses Prinzip der Zusammensetzung einer gegebenen Transformation aus mehreren ist für die Transformationstheorie fundamental, da man durch seine Anwendung das allgemeine Transformationsproblem auf einfache zurückführen kann.

11. Multiplikation und Division. Zu jeder ganzzahligen Transformation T von der Ordnung n gibt es immer eine andere ganzzahlige Transformation T_1, welche durch die Gleichung

$$(52)\qquad T\,T_1 \doteq M,$$

in der M die Transformation

$$(53)\qquad \omega'_{\mu\alpha} = n\,\omega_{\mu\alpha} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1,2,\dots p \\ \alpha = 1,2,\dots 2p \end{pmatrix}$$

von der Ordnung n^2 bezeichnet, vollständig bestimmt ist. Die Transformation T_1 ist gleichfalls von der Ordnung n und ihre Transformationszahlen $c^{(1)}_{\alpha\beta}$ sind durch die Gleichungen

$$(54)\qquad \begin{gathered} c^{(1)}_{\mu\nu} = c_{p+\nu,p+\mu}, \qquad c^{(1)}_{\mu,p+\nu} = -c_{\nu,p+\mu}, \\ c^{(1)}_{p+\mu,\nu} = -c_{p+\nu,\mu}, \qquad c^{(1)}_{p+\mu,p+\nu} = c_{\nu\mu} \end{gathered} \qquad (\mu,\nu = 1,2,\dots p)$$

gegeben. Die Transformation T_1 wird die zur Transformation T supplementäre genannt; man sieht, daß auch umgekehrt $T_1\,T = M$, also auch T die zu T_1 supplementäre Transformation ist. Im Falle $n = 1$ wird die Transformation M zur identischen J, die supplementäre T_1 zu inversen T^{-1}.

Die Transformation M heißt die Multiplikation; die zu ihr inverse M^{-1} von der Ordnungszahl $\frac{1}{n^2}$ ist die nicht ganzzahlige Transformation

$$\omega'_{\mu\alpha} = \frac{1}{n}\omega_{\mu\alpha}, \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\dots p\\ \alpha = 1,2,\dots 2p\end{pmatrix} \tag{55}$$

welche die Division genannt wird.

Mittelst der Division kann man jede nichtganzzahlige Transformation T auf eine ganzzahlige zurückführen. Bringt man nämlich die Transformationszahlen $c_{\alpha\beta}$ von T auf gemeinsamen Nenner, setzt also

$$c_{\alpha\beta} = \frac{e_{\alpha\beta}}{t}, \qquad (\alpha, \beta = 1,2,\dots 2p) \tag{56}$$

wo t eine positive ganze Zahl, die $e_{\alpha\beta}$ ganze Zahlen sind, so kann man die Transformation T

$$\omega''_{\mu\alpha} = \sum_{\varepsilon=1}^{2p} \frac{e_{\alpha\varepsilon}}{t}\omega_{\mu\varepsilon} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\dots p\\ \alpha = 1,2,\dots 2p\end{pmatrix} \tag{57}$$

aus den beiden Transformationen

$$\omega'_{\mu\alpha} = \frac{1}{t}\omega_{u\alpha}, \qquad \omega''_{\mu\alpha} = \sum_{\varepsilon=1}^{2p} e_{\alpha\varepsilon}\omega'_{\mu\varepsilon} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1,2,\dots p\\ \alpha = 1,2,\dots 2p\end{pmatrix} \tag{58}$$

zusammensetzen, von denen die erste eine Division (von der Ordnung $\frac{1}{t^2}$), die zweite aber eine ganzzahlige Transformation (von der Ordnung t^2n) ist.[38])

12. Zusammensetzung einer linearen ganzzahligen Transformation aus einfachen. Die linearen ganzzahligen Transformationen bilden für sich eine Gruppe; auch ist die inverse einer linearen ganzzahligen Transformation selbst wieder eine solche. Man kann für die Gruppe der linearen ganzzahligen Transformationen auf verschiedene Weisen eine endliche Basis angeben, d. h. eine endliche Anzahl linearer ganzzahliger Transformationen aufstellen, aus denen sich jede beliebige solche zusammensetzen läßt.

38) *Borchardt* [Paris C. R. 88 (1879), p. 885 u. 955 = Ges. W. (1888), p. 445] hat für den Fall $p = 2$ eine Transformation zweiter Ordnung angegeben, welche zweimal nacheinander angewendet zur Multiplikation mit 2 führt. Für beliebiges p bestimmen p^2 rationale Zahlen $c_{\mu\nu}$, welche den $\frac{1}{2}(p-1)p$ Bedingungen

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_{\mu\nu}c_{\nu\mu'} = \begin{cases} m, & \text{wenn } \mu' = \mu,\\ 0, & \text{wenn } \mu' \gtrless \mu,\end{cases} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \dots p)$$

genügen, zusammen mit den $3p^2$ Zahlen $c_{\mu, p+\nu} = c_{p+\mu,\nu} = 0$, $c_{p+\mu,p+\nu} = c_{\nu\mu}$ eine Transformation T von der Ordnung m, für welche $T^2 = M$ ist (vgl. dazu I B 3f, Nr. 1 und I B 2, Nr. 3, Anm. 42).

Zu dem Ende denke man sich die $4p^2$ Transformationszahlen $c_{\alpha\beta}$ in ein quadratisches Schema von $2p$ Horizontal- und $2p$ Vertikalreihen angeschrieben, so daß $c_{\alpha\beta}$ das β^{te} Element der α^{ten} Horizontalreihe oder das α^{te} Element der β^{ten} Vertikalreihe ist, und definiere, indem man unter ϱ, σ irgendwelche Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots p$ bezeichnet, die folgenden vier Prozesse:

A. Man ersetzt die Elemente der ϱ^{ten} Horizontalreihe des genannten quadratischen Schemas durch neue, welche aus ihnen durch Subtraktion der entsprechenden Elemente der $p + \varrho^{\text{ten}}$ Horizontalreihe hervorgehen.

B. Man vertauscht die Elemente der ϱ^{ten} Horizontalreihe mit denen der $p + \varrho^{\text{ten}}$, nachdem man zuvor die letzteren sämtlich mit -1 multipliziert hat.

C. Man ersetzt die Elemente der ϱ^{ten} Horizontalreihe durch neue, welche aus ihnen durch Subtraktion der entsprechenden Elemente der σ^{ten} Horizontalreihe, gleichzeitig aber die Elemente der $p + \sigma^{\text{ten}}$ Horizontalreihe durch neue, welche aus ihnen durch Addition der entsprechenden Elemente der $p + \varrho^{\text{ten}}$ Horizontalreihe hervorgehen.

D. Man vertauscht die Elemente der ϱ^{ten} Horizontalreihe mit denen der σ^{ten} und gleichzeitig die Elemente der $p + \varrho^{\text{ten}}$ mit denen der $p + \sigma^{\text{ten}}$.

Durch diese vier Prozesse kann man jedes einer linearen ganzzahligen Transformation T entsprechende Zahlenschema $c_{\alpha\beta}$ auf das der identischen, bei welchem $c_{\alpha\alpha} = 1$, $c_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p;$ $\alpha \gtrless \beta)$ ist, reduzieren. Nun kann man aber jeden der vier genannten Prozesse auch durch die Zusammensetzung von T mit gewissen linearen ganzzahligen Transformationen erreichen und man kann daher umgekehrt aus diesen bzw. ihren inversen jede beliebige lineare ganzzahlige Transformation zusammensetzen.

So erhält man zunächst eine Basis von $\frac{1}{2}p(3p+1)$ „einfachen" linearen Transformationen $A_\varrho (\varrho = 1, 2, \ldots p)$, $B_\varrho (\varrho = 1, 2, \ldots p)$, $C_{\varrho\sigma} (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots p;\ \varrho \gtrless \sigma)$, $D_{\varrho\sigma} (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots p;\ \varrho < \sigma)$, aus denen sich jede lineare ganzzahlige Transformation zusammensetzen läßt.

Die auf diese Weise gewonnenen $\frac{1}{2}p(3p+1)$ erzeugenden Transformationen können aber ohne Mühe auf eine geringere Anzahl reduziert werden. Mit Hilfe der $\frac{1}{2}(p-1)p$ Transformationen $D_{\varrho\sigma}$ kann man nämlich alle Transformationen A_ϱ, B_ϱ, $C_{\varrho\sigma}$ auf je eine einzige unter ihnen, z. B. A_1, B_1 und C_{12}, und endlich kann man die $\frac{1}{2}(p-1)p$ Transformationen $D_{\varrho\sigma}$ selbst auf $p-1$ unter ihnen, z. B. $D_{12}, D_{23}, \ldots$

$D_{p-1,p}$ reduzieren und erhält damit schließlich alle linearen ganzzahligen Transformationen aus $p+2$ einfachen zusammengesetzt.[39])

Daß man diese Anzahl noch weiter reduzieren kann, haben *Krazer* für $p > 3$ und *Burkhardt* für $p = 2$ gezeigt.[40])

13. Reduktion nichtlinearer ganzzahliger Transformationen. Bezeichnet jetzt T eine nichtlineare ganzzahlige Transformation (bei der also die $c_{\alpha\beta}$ ganze Zahlen und die Ordnung $n > 1$), so nennt man jede Transformation T', welche aus T durch Zusammensetzung mit einer linearen ganzzahligen Transformation L in der Form $T' = TL$ hervorgeht, zu T äquivalent und von der Gesamtheit der zu einer gegebenen Transformation T äquivalenten Transformationen sagt man, daß sie zu einer Klasse gehören. Wieder durch Anwendung der oben genannten vier Prozesse A, B, C, D zeigt man, daß auf diese Weise alle ganzzahligen Transformationen einer gegebenen Ordnung n in eine endliche Anzahl von Klassen zerfallen, derart, daß alle Transformationen einer Klasse und nur diese einander äquivalent sind, und man bezeichnet in jeder Klasse eine möglichst einfache Transformation als Repräsentanten der Klasse.

Die Bestimmung der Klassenanzahl und die Aufstellung von Repräsentanten der Klassen äquivalenter Transformationen ist bis jetzt nur in den niedrigsten Fällen $p = 2$[41]) und $p = 3$[42]) und in letzterem nur für einen Primzahlgrad durchgeführt werden.

Daß man eine nichtlineare ganzzahlige Transformation durch Zwischensetzen zwischen zwei lineare ganzzahlige Transformationen in der Form $T' = L_1 T L_2$ auf noch weniger und noch einfachere Formen reduzieren kann, ist ersichtlich und für $p = 3$ von *Weber* a. a. O. näher ausgeführt worden.

14. Krazer-Prymsche Zusammensetzung einer Transformation aus elementaren. Eine von der vorher betrachteten durchaus verschiedene Zusammensetzung einer gegebenen Transformation haben *Krazer* und *Prym*[43]) angegeben. Sie stellen statt der ganzzahligen

39) *Kronecker,* Berl. Ber. 1866, p. 610 = J. f. Math. 68 (1868), p. 284; *Clebsch* und *Gordan,* „A. F.“, p. 304; *Thomae,* Z. f. Math. 12(1867), p. 374 und J. f. Math. 75 (1873), p. 230; *Jordan,* „Traité“, p. 174; *Weber,* Ann. di Mat. 9_2 (1878/9), p. 134; s. auch *Krause,* Math. Ann. 17 (1880), p. 435.

40) *Krazer,* Ann. di Mat. 12_2 (1884), p. 298; *Burkhardt,* Gött. Nachr. (1890), p. 381 und *Wirtinger,* Wien. Denkschr. 85 (1910), p. 111.

41) *Hermite,* Paris C. R. 40 (1855), p. 253 = Œuv. 1 (1905), p. 447; *Dorn,* Math. Ann. 7 (1874), p. 481; dazu *Krause,* Acta math. 3 (1883), p. 161 und „Transf.“, p. 84.

42) *Weber,* Ann. di Mat. 9_2 (1878/9), p. 139.

43) „N. G.“, 2. Teil.

die lineare Transformation in den Mittelpunkt der Untersuchung, indem sie die zu einer beliebigen Ordnungszahl $n = \frac{n_1}{n_2}$ gehörige Transformation T aus zwei ganz speziellen zu den Ordnungszahlen n_1 und $\frac{1}{n_2}$ gehörigen Transformationen N_1 und N_2^{-1} und einer linearen Transformation L zusammensetzen in der Form

$$T = N_1 L N_2^{-1}. \tag{59}$$

Zur Zusammensetzung einer linearen Transformation L aus einfachen werden aber drei Arten „elementarer" linearen Transformationen L_1, L_2, L_3 definiert und es wird zunächst gezeigt, daß eine jede „singuläre" lineare Transformation S, das ist eine solche, bei der die p^2 Transformationszahlen $c_{\mu,p+\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots p)$ sämtlich den Wert Null haben[44]), in der Gestalt

$$S = L_1 L_2 \tag{60}$$

aus einer elementaren linearen Transformation 1. Art und einer solchen 2. Art, jede beliebige lineare Transformation L aber sodann aus zwei singulären S_1, S_2 und einer elementaren der 3. Art L_3 in der Gestalt

$$L = S_1 L_3 S_2 \tag{61}$$

zusammengesetzt werden kann.

III. Die allgemeinen Thetafunktionen mit beliebigen Charakteristiken.

15. Allgemeine Thetafunktionen. Unter einer p-fach unendlichen Thetareihe versteht man eine p-fach unendliche Reihe, bei welcher der Logarithmus des allgemeinen Gliedes eine ganze rationale Funktion zweiten Grades der Summationsbuchstaben ist. Eine solche Funktion kann man, wenn man die p Summationsbuchstaben mit $m_1, m_2, \ldots m_p$ bezeichnet, in der Gestalt

$$\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{p} b_\mu m_\mu + c \qquad (a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}) \tag{62}$$

darstellen und es wird daher eine p-fach unendliche Thetareihe in allgemeinster Form durch die Summe

$$\sum_{m_1, \ldots m_p}^{-\infty, \ldots +\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{p} b_\mu m_\mu + c} \tag{63}$$

44) Diese „singulären" Transformationen stehen natürlich in keinerlei Beziehungen zu den in Anm. 35 erwähnten.

repräsentiert, bei deren Ausführung jede der p Größen m unabhängig von den anderen die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.[45])

Die Reihe (63) konvergiert, und zwar absolut und für alle endlichen Werte der Größen b, c, wenn die aus den reellen Teilen $a'_{\mu\mu'}$ der Größen $a_{\mu\mu'} = a'_{\mu\mu'} + ia''_{\mu\mu'}$ gebildete quadratische Form

$$\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a'_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'}$$

eine negative ist.[46])

Setzt man $c = 0$, läßt an Stelle der b unabhängige komplexe Veränderliche treten und betrachtet den Wert der Reihe als Funktion dieser, so erhält man die Thetafunktion

$$\vartheta(v_1 | v_2 | \cdots | v_p) = \sum_{m_1,\cdots m_p}^{-\infty,\cdots+\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum_{\mu=1}^{p} m_\mu v_\mu} ; \tag{64}$$

die p Veränderlichen v heißen die Argumente, die $\frac{1}{2}p(p+1)$ an die obengenannte Konvergenzbedingung geknüpften Parameter $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ die Modulen der Thetafunktion; sie werden nur dann in der Funktionsbezeichnung zum Ausdruck gebracht, wenn gleichzeitig Funktionen mit verschiedenen Modulen auftreten.

Die Funktion $\vartheta(v_1 | \ldots | v_p)$ genügt den $2p$ Gleichungen

$$\vartheta(v_1 | \cdots | v_\nu + \pi i | \cdots | v_p) = \vartheta(v_1 | \cdots | v_\nu | \cdots | v_p), \tag{65}$$

$$\vartheta(v_1 + a_{1\nu} | \cdots | v_p + a_{p\nu}) = \vartheta(v_1 | \cdots | v_p)\, e^{-a_{\nu\nu} - 2v_\nu} \tag{66}$$

$$(\nu = 1, 2, \cdots p)$$

oder, was dasselbe sagt, bei beliebigen ganzzahligen $\varkappa$, λ der Gleichung

---

45) Die einfach unendliche Thetareihe findet sich zuerst bei *Fourier* [Th. anal. de la chaleur 1822, p. 333 = Œuv. 1 (1888), p. 298; deutsche Ausg. von *Weinstein* (1884), p. 223]; in die Funktionentheorie eingeführt wurde sie von *Jacobi* (II B). Die zweifach unendlichen Thetareihen haben *Göpel* 1847 (vgl. Nr. 5) und *Rosenhain* 1851 (vgl. Nr. 6), die p-fach unendlichen *Weierstraß* 1849 (vgl. Nr. 7) und *Riemann* 1857 (vgl. Nr. 46) aufgestellt.

46) Daß die p-fach unendliche Thetareihe unter der angegebenen Bedingung für alle endlichen Werte der v konvergiert, hat zuerst *Riemann* in seiner Vorlesung vom W.-S. 1861/62 bewiesen (vgl. Ges. math. W. 1876, p. 452, 2. Aufl. 1892, p. 483, Nachtr. 1902, p. 1). Über weitere Konvergenzbeweise der Thetareihe bei *Krazer*, Math. Ann. 49 (1897), p. 400 und „Tehtaf.“, p. 17. Der dort p. 410 bzw. p. 18 erwähnte *Weierstraß*sche Konvergenzbeweis ist 1903 im 3. Bande der Math. Werke p. 115 veröffentlicht worden.

$$\vartheta\left(v_1 + \sum_{\nu=1}^{p} \varkappa_\nu a_{1\nu} + \lambda_1 \pi i \,|\, \cdots \,|\, v_p + \sum_{\nu=1}^{p} \varkappa_\nu a_{p\nu} + \lambda_p \pi i\right)$$

(67)

$$= e^{-\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} \varkappa_\mu \varkappa_{\mu'} - 2 \sum_{\mu=1}^{p} \varkappa_\mu v_\mu} \vartheta(v_1 \,|\, \cdots \,|\, v_p).$$

In den $2p$ Gleichungen (65), (66) treten auf den linken Seiten die $2p$ Größensysteme

(68)

$$\begin{array}{ll} \pi i,\ 0,\ \ldots\ 0 & a_{11},\ a_{21},\ \ldots\ a_{p1} \\ 0,\ \pi i,\ \ldots\ 0 & a_{12},\ a_{22},\ \ldots\ a_{p2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0,\ 0,\ \ldots\ \pi i & a_{1p},\ a_{2p},\ \ldots\ a_{pp} \end{array}$$

als Systeme gleichzeitiger Änderungen der Variablen $v_1, v_2, \ldots v_p$ auf. Diese $2p$ Systeme von je p Größen werden die $2p$ Systeme zusammengehöriger Periodizitätsmodulen der Thetafunktion genannt.

Außer den Gleichungen (65), (66) genügt die Thetafunktion den $\frac{1}{2}p\,(p+1)$ Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \vartheta(v_1 \,|\, \cdots \,|\, v_p)}{\partial v_\mu \partial v_\nu} = n \frac{\partial \vartheta(v_1 \,|\, \cdots \,|\, v_p)}{\partial a_{\mu\nu}}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p) \tag{69}$$

bei denen $n = 4$ ist, wenn $\mu = \nu$, dagegen $n = 2$, wenn $\mu \gtrless \nu$.

Die hier angegebenen Eigenschaften der Funktion $\vartheta(v_1 \,|\, \ldots \,|\, v_p)$ charakterisieren zusammen mit der Bedingung, daß die Funktion einwertig und im Endlichen nirgendwo unstetig sei, diese Funktion vollständig. Erfüllt nämlich eine einwertige und für alle endlichen v stetige Funktion der komplexen Veränderlichen $v_1, \ldots v_p$ die $2p$ Gleichungen (65), (66) oder, was dasselbe sagt, bei beliebigen ganzzahligen Werten der $\varkappa, \lambda$ die Gleichung (67), so kann sie sich von der Funktion $\vartheta(v_1 \,|\, \cdots \,|\, v_p)$ nur um einen von den v freien Faktor unterscheiden; erfüllt sie außerdem die $\frac{1}{2}p\,(p+1)$ Differentialgleichungen (69), so ist dieser Faktor auch von den Modulen a unabhängig.

16. Einführung der Charakteristiken. Aus den $2p$ Systemen zusammengehöriger Periodizitätsmodulen (68) der Thetafunktion läßt sich mit Hilfe reeller[47]) Größen $g_1, \ldots g_p, h_1, \ldots h_p$ ein jedes System von p Größen $c_1, \ldots c_p$ immer und nur auf eine Weise in der Form

$$c_1 = \sum_{\nu=1}^{p} g_\nu a_{1\nu} + h_1 \pi i, \quad \cdots \quad c_p = \sum_{\nu=1}^{p} g_\nu a_{p\nu} + h_p \pi i \tag{70}$$

47) Es folgt daraus, daß man keine allgemeineren Funktionen erzielt, wenn man für die g, h komplexe Werte zuläßt [*Craig*, Am. J. 6 (1884), p. 337]; übrigens bleiben die Formeln (75)—(81) auch in diesem Falle richtig.

linear zusammensetzen. Der Komplex $\binom{g_1\, g_2 \dots g_p}{h_1\, h_2 \dots h_p}$ der $2p$ so bestimmten reellen Größen g, h wird die Periodencharakteristik (Per. Char.) des Größensystems $c_1, \dots c_p$ genannt.

In die Thetareihe (63) führe man jetzt an Stelle der Größen b_μ Größen $v_\mu + c_\mu$ ein, indem man unter $v_1, \dots v_p$ wie vorher unabhängige komplexe Veränderliche, unter $c_1, \dots c_p$ willkürliche Konstanten versteht. Bringt man dann das Konstantensystem $c_1, \dots c_p$ mit Hilfe reeller Größen g, h in die Gestalt (70) und setzt gleichzeitig an Stelle der im allgemeinen Gliede der Thetareihe noch vorkommenden Größe c den Ausdruck

$$\varphi = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\mu'} g_\mu g_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{p} g_\mu (v_\mu + h_\mu \pi i), \tag{71}$$

so entsteht die allgemeinere Thetafunktion[48])

$$\vartheta \begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix} (v_1 | \dots | v_p)$$

$$= \sum_{m_1, \dots m_p}^{-\infty, \dots +\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} (m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2 \sum_{\mu=1}^{p} (m_\mu + g_\mu)(v_\mu + h_\mu \pi i)}, \tag{72}$$

die ihrer Entstehung gemäß mit der einfacheren Funktion $\vartheta(v_1 | \dots | v_p)$ durch die Gleichung

$$\vartheta \begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix} (v_1 | \dots | v_p)$$

$$= \vartheta \left(v_1 + \sum_{\nu=1}^{p} g_\nu a_{1\nu} + h_1 \pi i | \dots | v_p + \sum_{\nu=1}^{p} g_\nu a_{p\nu} + h_p \pi i \right) e^{\varphi} \tag{73}$$

verknüpft ist und in diese übergeht, wenn die Größen g, h sämtlich den Wert Null annehmen, d. h. es ist

$$\vartheta \begin{bmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix} (v_1 | \dots | v_p) = \vartheta (v_1 | \dots | v_p). \tag{74}$$

Der Komplex $\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}$ der $2p$ Größen g, h heißt die Charakteristik der Thetafunktion oder Thetacharakteristik (Th. Char.); sie wird auch zur Abkürzung mit $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ bezeichnet. Die Th. Char. $\begin{bmatrix} g_1 \pm g_1' \dots g_p \pm g_p' \\ h_1 \pm h_1' \dots h_p \pm h_p' \end{bmatrix}$

48) Die Funktionen (72), bei denen die g, h beliebige reelle Größen sind, wurden von *Prym* („Riem. Thetaf.“, p. 25) zuerst aufgestellt. Nur in der Bezeichnung von ihnen verschieden sind die Funktionen $\Theta(u_1, \dots u_\varrho; \mu, \nu)$, welche *Weierstraß* in seinen Vorlesungen über die Theorie der *Abel*schen Transzendenten [Math. W. 4 (1902), p. 566] eingeführt und von denen erstmals *Schottky* („Abr.“, p. 1) berichtet hat.

wird die Summe bzw. Differenz der Th. Char. $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}$ genannt und mit $\begin{bmatrix} g \pm g' \\ h \pm h' \end{bmatrix}$ bezeichnet.

In den Fällen, wo die Argumente der Thetafunktion sich nur durch untere Indices unterscheiden, wird der allgemeine Ausdruck für die Argumente mit Weglassung des Index in doppelten Klammern geschrieben, also $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)$ statt $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 | \cdots | v_p)$; in Übereinstimmung damit wird das Größensystem $v_1 | \ldots | v_p$ mit (v) und ein System $v_1 + c_1 | \cdots | v_p + c_p$ mit $(v + c)$ oder, wenn $\begin{pmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{pmatrix}$ die Per. Char. des Größensystems $c_1, \ldots c_p$ ist, mit $\left(v + \begin{Bmatrix} g \\ h \end{Bmatrix}\right)$ bezeichnet.

Die durch die Gleichung (72) definierte Funktion $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)$ genügt den $2p$ Gleichungen

$$(75)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 | \cdots | v_\nu + \pi i | \cdots | v_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 | \cdots | v_\nu | \cdots | v_p) e^{2 g_\nu \pi i},$$

$$(76)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 + a_{1\nu} | \cdots | v_p + a_{p\nu}) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 | \cdots | v_p) e^{-a_{\nu\nu} - 2v_\nu - 2h_\nu \pi i}$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots p)$$

oder, was dasselbe sagt, bei beliebigen ganzzahligen $\varkappa$, λ der Gleichung

$$(77)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\!\left(v + \begin{Bmatrix} \varkappa \\ \lambda \end{Bmatrix}\right)\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)\, e^{-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'} - 2\sum_{\mu=1}^{p}\varkappa_\mu v_\mu + 2\sum_{\mu=1}^{p}(\lambda_\mu g_\mu - \varkappa_\mu h_\mu)\pi i}.$$

Außerdem genügt die Funktion $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)$ den $\frac{1}{2}p(p+1)$ Differentialgleichungen

$$(78)\quad \frac{\partial^2 \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)}{\partial v_\mu\, \partial v_\nu} = n \frac{\partial \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)}{\partial a_{\mu\nu}}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots p)$$

bei denen $n = 4$ ist, wenn $\mu = \nu$, dagegen $n = 2$, wenn $\mu \gtrless \nu$.

Die Gleichungen (75) und (76) bestimmen wiederum die Funktion $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)$ bis auf einen von den Argumenten v, die Gleichungen (75), (76) und (78) bis auf einen auch von den Modulen a freien Faktor.

Bezeichnen $g_1', \ldots g_p'$, $h_1', \ldots h_p'$ irgendwelche reelle Konstanten, $\varkappa_1, \ldots \varkappa_p$, $\lambda_1, \ldots \lambda_p$ irgendwelche ganze Zahlen, so gelten die Formeln

$$(79)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix}\left(\!\left(v + \begin{Bmatrix} g' \\ h' \end{Bmatrix}\right)\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} g + g' \\ h + h' \end{bmatrix}(\!(v)\!)\, e^{-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} g_\mu' g_{\mu'}' - 2\sum_{\mu=1}^{p} g_\mu'(v_\mu + h_\mu \pi i + h_\mu'' \pi i)},$$

$$(80)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g+\varkappa \\ h+\lambda \end{bmatrix}((v)) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))\, e^{2\sum_{\mu=1}^{p}\lambda_\mu g_\mu \pi i},$$

$$(81)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((-v)) = \vartheta\begin{bmatrix} -g \\ -h \end{bmatrix}((v)).$$

Eine Thetacharakteristik, deren Elemente den Bedingungen

$$0 \gtreqless g_\nu < 1, \quad 0 \gtreqless h_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \cdots p)$$

genügen, wird eine Normalcharakteristik genannt. Zwei Thetacharakteristiken $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}$ heißen kongruent, wenn ihre entsprechenden Elemente sich nur um ganze Zahlen unterscheiden. Nennt man dann zwei Funktionen $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))$ und $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}((v))$ nicht wesentlich verschieden, wenn sie sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, so sind die Charakteristiken zweier nicht wesentlich verschiedener Funktionen, wie die Gleichungen (75), (76) zeigen, notwendig einander kongruent und umgekehrt sind, wie die Formel (80) zeigt, die zu zwei kongruenten Charakteristiken gehörigen Thetafunktionen nicht wesentlich verschieden.

Mit Rücksicht hierauf folgt aus der Gleichung (81), daß eine Funktion $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))$ dann und nur dann eine gerade oder ungerade Funktion ihres Argumentensystems (v) ist, wenn die sämtlichen Charakteristikenelemente g, h halbe Zahlen sind, und insbesondere folgt für $g_1 = \cdots = g_p = h_1 = \cdots = h_p = 0$ die Gleichung

$$(82)\qquad \vartheta(-v_1 | \cdots | -v_p) = \vartheta(v_1 | \cdots | v_p),$$

welche sagt, daß die Funktion $\vartheta(v_1 | \ldots v_p)$ eine gerade Funktion ihres Argumentensystems ist.[49])

17. Thetafunktionen höherer Ordnung. Eine Thetafunktion n^{ter} Ordnung (oder Grades) mit der Charakteristik $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ nennt man eine einwertige und für endliche v stetige Funktion $\Theta_n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))$ der komplexen Veränderlichen $v_1, \ldots v_p$, welche für alle Werte der v den $2p$ Gleichungen

$$(83)\qquad \Theta_n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 | \cdots v_\nu + \pi i | \cdots v_p) = \Theta_n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 | \cdots v_\nu | \cdots | v_p)\, e^{2g_\nu \pi i},$$

$$(84)\qquad \Theta_n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 + a_{1\nu} | \cdots | v_p + a_{p\nu}) = \Theta_n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v_1 | \cdots v_p) e^{-n a_{\nu\nu} - 2n v_\nu - 2h_\nu \pi i}$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots p)$$

49) Eine Ableitung der Formel (79) bei *Cayley*, Math. Ann. 17 (1880), p. 115 = Coll. math. pap 11 (1896), p. 242. Von der Verwendung symbolischer Bezeichnungsweisen der Invariantentheorie bei den p-fach unendlichen Thetareihen handelt *Pick*, Leipz. Ber. 66 (1914), p. 3.

oder, was dasselbe sagt, bei beliebigen ganzzahligen $\varkappa$, λ der Gleichung

$$\Theta_n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\left(v + \begin{Bmatrix} \varkappa \\ \lambda \end{Bmatrix}\right)\right)$$

$$(85)\qquad = \Theta_n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))\, e^{-n\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'} - 2n\sum_{\mu=1}^{p}\varkappa_\mu v_\mu + 2\sum_{\mu=1}^{p}(\lambda_\mu g_\mu - \varkappa_\mu h_\mu)\pi i}$$

genügt.

Ist $n = 1$, so gibt es, von einem konstanten Faktor abgesehen, nur eine einzige solche Funktion, nämlich $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))$; ist dagegen $n > 1$, so genügen den obigen Gleichungen unendlich viele wesentlich verschiedene Funktionen, z. B. alle Funktionen

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varrho}{n} \\ h \end{bmatrix}((nv))_{na}, \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ \frac{h+\sigma}{n} \end{bmatrix}((v))_{\frac{a}{n}}, \qquad \vartheta^n\begin{bmatrix} \frac{g+\varrho}{n} \\ \frac{h+\sigma}{n} \end{bmatrix}((v))_a,$$

wo für die ϱ, σ beliebige ganze Zahlen gesetzt werden dürfen; es gilt aber bezüglich dieser Funktionen der Satz:

Zwischen $n^p + 1$ Thetafunktionen n^{ter} Ordnung mit der nämlichen Charakteristik $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ findet stets eine homogene lineare Relation statt, deren Koeffizienten von den Variablen v frei sind,
oder in anderer Fassung:

Alle Thetafunktionen n^{ter} Ordnung mit der Charakteristik $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ lassen sich durch n^p linear unabhängige unter ihnen linear und homogen mit Koeffizienten, welche die Variablen v nicht enthalten, zusammensetzen.

Man kann z. B. jede Funktion $\Theta_n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))$ aus den n^p Funktionen $\vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{n} \\ h \end{bmatrix}((nv))_{na}$ in der Gestalt

$$(86)\qquad \Theta_n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v)) = \sum_{\varkappa_1,\cdots\varkappa_p}^{0,1,\cdots n-1} A_{\varkappa_1\cdots\varkappa_p}\vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varkappa}{n} \\ h \end{bmatrix}((nv))_{na}$$

oder auch aus den n^p Funktionen $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ \frac{h+\lambda}{n} \end{bmatrix}((v))_{\frac{a}{n}}$ in der Gestalt

$$(87)\qquad \Theta_n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v)) = \sum_{\lambda_1,\cdots\lambda_p}^{0,1,\cdots n-1} B_{\lambda_1\cdots\lambda_p}\vartheta\begin{bmatrix} g \\ \frac{h+\lambda}{n} \end{bmatrix}((v))_{\frac{a}{n}}$$

zusammensetzen und es stellt die rechte Seite jeder dieser beiden

Gleichungen, wenn man unter den A, B willkürliche Konstanten versteht, die allgemeinste Lösung der Gleichungen (83), (84) dar.[50])

Aus der Darstellung (86) oder (87) folgt für beliebige reelle Größen g', h'

$$\Theta_n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left((v + \begin{Bmatrix} g' \\ h' \end{Bmatrix})\right) \tag{88}$$
$$= \Theta_n\begin{bmatrix} g + ng' \\ h + nh' \end{bmatrix}((v))\, e^{-n\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'} - 2\sum_{\mu=1}^{p} g'_\mu (n v_\mu + h_\mu \pi i + n h'_\mu \pi i)}.$$

Man sieht daraus, daß man wie bei den gewöhnlichen Thetafunktionen so auch bei den Thetafunktionen höherer Ordnung die Funktionen mit beliebiger Charakteristik durch die Funktionen mit der Charakteristik $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ausdrücken kann.

Aus der Gleichung (85) folgt weiter[51]), daß auch eine Thetafunktion n^{ter} Ordnung nur dann eine gerade oder ungerade Funktion ihrer Argumente sein kann, wenn ihre Charakteristikenelemente g, h sämtlich halbe Zahlen sind.

Auf Grund der Formeln (83), (84) sind die Quotienten zweier zur nämlichen Charakteristik $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ gehörigen Thetafunktionen n^{ter} Ordnung (und ebenso ihre zweiten logarithmischen Derivierten) $2p$-fach periodische Funktionen mit den $2p$ Periodensystemen (68).

18. Die Transformation der Thetafunktionen. Der Übergang von den Integralen u_μ mit den Periodizitätsmodulen $\omega_{\mu\alpha}$ zu Normalintegralen v_μ, welche dadurch charakterisiert sind, daß

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu: v_\mu^+ = v_\mu^- + \delta_{\mu\nu}\pi i, \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mu = \nu, \\ 0, & \text{wenn } \mu \gtrless \nu, \end{cases} \\ &\text{längs } b_\nu: v_\mu^+ = v_\mu^- + a_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots p) \end{aligned} \tag{89}$$

ist, geschieht durch die Gleichungen

$$\pi i u_\mu = \sum_{\varrho=1}^{p} \omega_{\mu\varrho} v_\varrho \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p) \tag{90}$$

oder umgekehrt durch die Gleichungen

$$v_\varrho = \frac{\pi i}{\omega} \sum_{\mu=1}^{p} o_{\mu\varrho} u_\mu \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots p) \tag{91}$$

50) Auf Thetafunktionen höherer Ordnung wurde zuerst *Hermite*, Paris C.R. 40 (1855) = Œuv. 1 (1905), p. 455, geführt; über sie und insbesondere ihre Darstellung durch n^p linear unabhängige siehe *Thomae* (Diss. Gött. 1864, p. 7), *Schottky* („Abr.“, p. 9; dazu *Weierstraß*, „Vorl.“, p. 611), *Prym* („Riem. Thetaf.“, p. 28).

51) Vgl. *Krazer*, „Thetaf.“, p. 357.

und es sind dann die Größen $a_{\mu\nu}$ bestimmt durch die Gleichungen

$$\pi i\,\omega_{\mu,p+\sigma} = \sum_{\varrho=1}^{p} \omega_{\mu\varrho} a_{\varrho\sigma} \qquad (\mu, \sigma = 1, 2, \cdots p) \tag{92}$$

oder explizite durch die Gleichungen

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{\pi i}{\omega} \sum_{\mu=1}^{p} o_{\mu\varrho}\omega_{\mu,p+\sigma}; \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \cdots p) \tag{93}$$

es bezeichnet dabei in den Gleichungen (91) und (93) ω den stets von Null verschiedenen Wert der Determinante $\sum \pm \omega_{11}\omega_{22}\cdots\omega_{pp}$ und $o_{\mu\nu}$ für jedes μ und ν von 1 bis p die Adjunkte von $\omega_{\mu\nu}$ in dieser Determinante.

Definiert man nun in der gleichen Weise zu den transformierten Perioden $\omega'_{\mu\alpha}$ (s. Nr. 9) Größen v' und a' durch die Gleichungen

$$\pi i u_\mu = \sum_{\varrho=1}^{p} \omega'_{\mu\varrho} v'_\varrho \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p) \tag{94}$$

$$v'_\varrho = \frac{\pi i}{\omega'} \sum_{\mu=1}^{p} o'_{\mu\varrho} u_\mu, \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots p) \tag{95}$$

$$\pi i \omega'_{\mu,p+\sigma} = \sum_{\varrho=1}^{p} \omega'_{\mu\varrho} a'_{\varrho\sigma}, \qquad (\mu, \sigma = 1, 2, \cdots p) \tag{96}$$

$$a'_{\varrho\sigma} = \frac{\pi i}{\omega'} \sum_{\mu=1}^{p} o'_{\mu\varrho}\omega'_{\mu,p+\sigma}, \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \cdots p) \tag{97}$$

so sind die Größen v' mit den Größen v und die Größen a' mit den Größen a verknüpft durch die Gleichungen

$$v_\mu = \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} A_{\mu\nu} v'_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p) \tag{98}$$

oder die damit äquivalenten

$$v'_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\mu=1}^{p} \bar{A}_{\mu\nu} v_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots p) \tag{99}$$

und

$$B_{\mu\varrho} = \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} A_{\mu\nu} a'_{\nu\varrho} \qquad (\mu, \varrho = 1, 2, \cdots p) \tag{100}$$

oder die damit äquivalenten

$$a'_{\nu\varrho} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\mu=1}^{p} \bar{A}_{\mu\nu} B_{\mu\varrho}. \qquad (\nu, \varrho = 1, 2, \cdots p) \tag{101}$$

In diesen Gleichungen ist zur Abkürzung

$$A_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varrho=1}^{p} c_{\nu,p+\varrho}a_{\mu\varrho},$$

$$B_{\mu\nu} = c_{p+\nu,\mu}\pi i + \sum_{\varrho=1}^{p} c_{p+\nu,p+\varrho}a_{\mu\varrho} \qquad (\mu,\nu = 1,2,\cdots p) \tag{102}$$

gesetzt, mit Δ_A der stets von Null verschiedene Wert der Determinante $\sum \pm A_{11}A_{22}\cdots A_{pp}$ und mit $\bar{A}_{\mu\nu}$ die Adjunkte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet.

Auf diese Weise werden den ursprünglichen Perioden ω Thetafunktionen mit den Argumenten v und den Modulen a, den transformierten Perioden ω' aber Thetafunktionen mit den Argumenten v' und den Modulen a' zugeordnet und als Transformationsproblem der Thetafunktionen bezeichnet man die Aufgabe, eine Funktion $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)$ durch Funktionen $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v')\!)_{a'}$ auszudrücken. Durch die Lösung des inversen Transformationsproblems (Nr. 10) wird dann umgekehrt eine Funktion $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v')\!)_{a'}$ durch Funktionen $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)_a$ dargestellt.

19. Die ganzzahlige Transformation. Ist die Transformation T eine ganzzahlige und n ihr Grad, so ist die Funktion

$$\Pi(\!(v')\!) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)_a e^V, \tag{103}$$

wobei

$$V = \frac{1}{(\pi i)^2}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\nu'=1}^{p}\sum_{\mu=1}^{p} c_{\nu,p+\mu}A_{\mu\nu'}v_\nu' v_{\nu'}' = \frac{1}{\pi i}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} c_{\nu,p+\mu}v_\mu v_\nu' \tag{104}$$

$$= \frac{1}{\Delta_A}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} c_{\nu,p+\mu}\bar{A}_{\mu'\nu}v_\mu v_{\mu'}$$

ist, als Funktion der p Veränderlichen $v_1', \ldots v_p'$ betrachtet eine Thetafunktion n^{ter} Ordnung mit den Argumenten v', den Modulen a' und einer Charakteristik $\begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{h} \end{bmatrix}$, deren Elemente durch die Gleichungen

$$\hat{g}_\nu = \sum_{\mu=1}^{p}\left(c_{\nu\mu}g_\mu - c_{\nu,p+\mu}h_\mu + \tfrac{1}{2}c_{\nu\mu}c_{\nu,p+\mu}\right),$$

$$\hat{h}_\nu = \sum_{\mu=1}^{p}\left(-c_{p+\nu,\mu}g_\mu + c_{p+\nu,p+\mu}h_\mu + \tfrac{1}{2}c_{p+\nu,\mu}c_{p+\nu,p+\mu}\right) \tag{105}$$

$$(\nu = 1,2,\cdots p)$$

bestimmt sind.[52]) Daraus folgt, daß sich $\Pi(\!(v')\!)$ linear und homogen

52) *Hermite*, Paris C. R. 40 (1855) = Œuv. 1 (1905), p. 455.

durch n^p linear unabhängige Funktionen $\Theta_n \begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{h} \end{bmatrix} (\!(v')\!)_{a'}$ darstellen läßt in der Form

$$H(\!(v')\!) = \sum_{\varepsilon=0}^{n^p-1} c^{(\varepsilon)} \Theta_n^{(\varepsilon)} \begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{h} \end{bmatrix} (\!(v')\!)_{a'} \tag{106}$$

und es ist damit das Transformationsproblem darauf reduziert, n^p linear unabhängige Funktionen $\Theta_n \begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{h} \end{bmatrix} (\!(v')\!)_{a'}$ auszuwählen und hierauf zu ihnen die Konstanten c zu bestimmen.

In allgemeiner Form wurde dieses Problem von *Thomae*[53]) weitergeführt, der die n^p linear unabhängigen Funktionen $\Theta_n \begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{h} \end{bmatrix} (\!(v')\!)_{a'}$ gemäß der Formel (86) wählte und in der dann aus (106) entstehenden Gleichung

$$H(\!(v')\!) = \sum_{x_1, \cdots x_p}^{0,1, \cdots n-1} c_{x_1 \cdots x_p} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\hat{g} + x}{n} \\ \hat{h} \end{bmatrix} (\!(nv')\!)_{na'} \tag{107}$$

die Bestimmung der Koeffizienten $c_{x_1 \cdots x_p}$ folgendermaßen durchführte.

Zuerst kann man mit Hilfe der Differentialgleichungen (69) die Abhängigkeit der Koeffizienten c von den Thetamodulen bestimmen; es ergibt sich, daß

$$c_{x_1 \cdots x_p} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_A}} c'_{x_1 \cdots x_p} \qquad (x_1, \ldots x_p = 0, 1, \ldots n-1) \tag{108}$$

ist, wo die c' nunmehr auch von den Modulen a unabhängige Größen sind. Die Bestimmung dieser erfolgt bei *Thomae* dadurch, daß für die Thetamodulen solche spezielle Werte eingeführt werden, die nach passender Umformung der Funktion $\vartheta \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} (\!(v)\!)_a$ eine Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen der Größen $e^{2v_1}, \ldots e^{2v_p}$ auf der linken und rechten Seite von (107) gestattet.[54])

Die *Thomae*sche Lösung des Transformationsproblems ist noch keine vollständige, da auf der rechten Seite Thetafunktionen mit den Argumenten nv' und den Modulen na' auftreten, die erst noch durch solche mit einfachen Argumenten v' und einfachen Modulen a' ausge-

53) *Thomae*, Diss. Göttingen, 1864.

54) Daß die von *Thomae* erhaltenen Ausdrücke für die Koeffizienten c' nicht auf die einfachste Form gebracht sind und insbesondere im allgemeinen nicht alle von Null verschieden sind, hat sich ergeben, als *Krazer* und *Prym* („N. G.“, p. 123) auf andere Weise die Formel für die ganzzahlige Transformation abgeleitet haben.

drückt werden müssen. Es ist dies selbst wieder das Problem jener speziellen Transformation n^{ter} Ordnung, bei welcher

(109) $c_{11} = c_{22} = \cdots = c_{pp} = n,\ c_{p+1,p+1} = c_{p+2,p+2} = \cdots = c_{2p,2p} = 1$

ist, während alle übrigen Transformationszahlen c den Wert Null haben[55]).

Es tritt aber noch ein anderer Umstand hinzu. Besteht nämlich die Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]$ der ursprünglichen Thetafunktion $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](v)_a$ aus rationalen Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner r, so wird man in den meisten Fällen verlangen, daß auch die Charakteristiken der auftretenden transformierten Thetafunktionen mit den Argumenten v' und den Modulen a' von derselben Art sind.

Die vollständige Lösung dieser Aufgabe beschränkt sich bisher auf den Fall $r = 2$ (halbe Charakteristiken) und $n = 2$ (quadratische Transformation), wo sie zuerst von *Königsberger*[56]) für $p = 2$ angegeben wurde.

Mit Transformationen höherer Ordnung haben sich außer *Königsberger*[56a]), gleichfalls auf den Fall $r = 2$ und $p = 2$ sich beschränkend, *Brioschi*[57]) und *Krause*[58]) beschäftigt.

Die Multiplikation M (Nr. 11), für welche

(110) $\qquad v_\mu = n v'_\mu, \quad a_{\mu\nu} = a'_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p)$

ist, ist eine ganzzahlige Transformation vom Grade n^2. Es ist daher, da hier weiter sich $V = 0$ ergibt, $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](nv')_a$ als Funktion der Variablen v' betrachtet, eine Thetafunktion $n^{2\text{ter}}$ Ordnung mit der Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix} ng \\ nh \end{smallmatrix}\right]$ und läßt sich als solche linear und homogen durch n^{2p} linear unabhängige solche Funktionen darstellen[59]).

---

55) Über die Lösung dieses Problems bei *Krazer*, „Thetaf.“, p. 168.

56) J. f. Math. 67 (1867), p. 58; dazu *Pringsheim*, Math. Ann. 9 (1876), p. 445 und *Rohn*, Diss. München 1878 und Math. Ann. 15 (1879), p. 325 = Hab.-Schr. Leipzig 1879; für $p = 3$ bei *Weber*, Ann. di Mat. 9_2 (1878/9), p. 157; für beliebiges p bei *Krazer*, Math. Ann. 46 (1895), p. 442 und *Baker*, „Ab. Th.“, § 364—370.

56a) J. f. Math. 67 (1867), p. 97; Math. Ann. 1 (1869), p. 161.

57) Acc. Linc. Rend. 1_4 (1884/5), p. 769 = Op. mat. 3 (1904), p. 421; Math. Ann. 28 (1887), p. 594 = Op. mat. 5 (1909), p. 245; Acc. Linc. Rend. 1_4 (1884/5), p. 315 = Op. mat. 3 (1904), p. 407.

58) „Transf.“, schon vorher Math. Ann. 16 (1880), p. 83; 19 (1882), p. 103, 423 u. 489; 20 (1882), p. 54 u. 226; 25 (1885), p. 319 u. 323; 28 (1887), p. 597; Acta math. 3 (1883), p. 153; bezüglich weiterer Literatur bei *Krazer*, „Thetaf.“, p. 407.

59) Im allgemeinen Falle bei *Krazer*, „Thetaf.“, p. 195, für Thetafunktionen mit halben Char. bei *Krause*, Math. Ann. 17 (1880), p. 448 u. „Transf.“, p. 146.

20. Die lineare ganzzahlige Transformation. Ist $n = 1$, d. h. die Transformation eine lineare ganzzahlige, so ist $\Pi(\!(v')\!)$ eine Thetafunktion 1. Ordnung mit den Argumenten v', den Modulen a' und der Charakteristik $\begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{h} \end{bmatrix}$, unterscheidet sich also von der Funktion $\vartheta\begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{h} \end{bmatrix}(\!(v')\!)_{a'}$ nur um einen konstanten Faktor. Man hat also jetzt

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)_a = ce^{-V}\vartheta\begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{h} \end{bmatrix}(\!(v')\!)_{a'}, \tag{111}$$

wo c eine von den Variablen v unabhängige Größe bezeichnet.

Die Bestimmung der Größe c hat *Weber*[60]) auf dem Wege der Integration unter Anwendung der *Fourier*schen Formel vollständig durchgeführt. Wenn man voraussetzt, daß die Determinante

$$\Delta_{II} = \sum \pm c_{1,p+1}\, c_{2,p+2} \cdots c_{p,2p}$$

der p^2 Zahlen $c_{u,p+v}$ von Null verschieden ist, so tritt als Faktor von c eine p-fache *Gauß*sche Summe auf, d. h. eine endliche Summe, bei der, wie bei der Thetareihe, der Logarithmus des allgemeinen Gliedes eine ganze rationale Funktion zweiten Grades der Summationsbuchstaben ist[61]). *Weber* zeigt ferner, daß im Falle des Verschwindens der Determinante Δ_{II}, wenn man deren Rang mit q bezeichnet, an Stelle der p-fachen *Gauß*schen Summe nur eine q-fache solche auftritt, ein Resultat, zu welchem auf anderem Wege auch *Krazer* und *Prym* gelangt sind[62]). Man kann statt dessen aber auch, wie *Krazer*[63]) gezeigt hat, den Fall $\Delta_{II} = 0$ stets in einfacher Weise auf den Fall $\Delta_{II} \neq 0$ zurückführen.

21. Zusammensetzung von Transformationsformeln. Ist das Transformationsproblem der Thetafunktionen für zwei Transformationen T_1 und T_2 gelöst, so daß also für jede dieser die ursprünglichen Thetafunktionen durch die transformierten ausgedrückt sind, so erhält man aus diesen beiden Formeln durch Zusammensetzung sofort die Lösung des Transformationsproblems für die zusammengesetzte Transformation $T_1 T_2$.

---

60) *Weber,* J. f. Math. 74 (1872), p. 66; Gött. N. 1893, p. 251; auch *Krazer,* „Thetaf.", p. 172. Man vgl. *Gordan,* Paris C. R. 60 (1865), p. 925.

61) Bezüglich der Eigenschaften und der Wertbestimmung mehrfacher *Gauß*scher Summen bei *Weber,* J. f. Math. 74 (1872), p. 14; *Jordan,* Paris C. R. 73 (1871), p. 1316; *Krazer,* J. f. Math. 111 (1893), p. 64 und Weber-Festschr. 1912, p. 181.

62) *Krazer* und *Prym,* „N. G.", p. 94.

63) *Krazer,* „Thetaf.", p. 202.

Da alle ganzzahligen Transformationen eines gegebenen Grades n aus einer endlichen Anzahl unter ihnen, den Repräsentanten der Klassen äquivalenter Transformationen, durch Zusammensetzung mit linearen ganzzahligen Transformationen erhalten werden können, so folgt jetzt, daß man die einer beliebigen ganzzahligen Transformation n^{ter} Ordnung entsprechende Transformationsformel aus der dem zugehörigen Repräsentanten entsprechenden Formel und der Formel für die lineare ganzzahlige Transformation zusammensetzen und daß man sich also, wenn man die letztere Formel als bekannt ansieht, hinsichtlich der Herstellung von Transformationsformeln für die nichtlinearen ganzzahligen Transformationen auf die Repräsentanten beschränken kann.[63a])

Ebenso kann man in jedem speziellen Falle einer linearen ganzzahligen Transformation die ihr entsprechende Formel aus jenen Formeln zusammensetzen, welche den einfachen linearen Transformationen entsprechen, aus denen sich nach Nr. 12 jede beliebige lineare ganzzahlige Transformation zusammensetzen läßt.

In systematischer Weise haben *Krazer* und *Prym*[64]) dieses Verfahren der Zusammensetzung von Transformationsformeln aus einfachen angewandt und sind mit seiner Hilfe zu ganz allgemeinen Formeln nicht nur für die ganzzahlige, sondern auch für die nichtganzzahlige, zur beliebigen Ordnungszahl $\frac{n_1}{n_2}$ gehörigen Transformation gelangt.

IV. Die allgemeinen Thetafunktionen mit halben Charakteristiken.

22. Thetafunktionen mit halben Charakteristiken. Unter den Funktionen $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(v)$ spielen wegen ihrer Verwendung in der Theorie der *Abel*schen Funktionen diejenigen die wichtigste Rolle, bei denen die Charakteristikenelemente g, h rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner 2 sind, also

$$g_\mu = \frac{\varepsilon_\mu}{2}, \quad h_\mu = \frac{\varepsilon'_\mu}{2} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{112}$$

ist, wo die ε, ε' ganze Zahlen bezeichnen. In diesem Falle sei die Charakteristik mit $[\varepsilon]$, die zugehörige Thetafunktion mit $\vartheta[\varepsilon](v)$ bezeichnet.

63a) Vgl. hierzu *Wiltheiß*, J. f. Math. 96 (1884), p. 17.

64) *Krazer* und *Prym*, „N. G.“, 2. Teil; siehe auch *Krazer*, Math. Ann. 43 (1893), p. 413 u. 457.

Die Thetafunktion $\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)$ ist also definiert durch die Gleichung

$$(113)\quad \vartheta[\varepsilon](\!(v)\!) = \sum_{m_1,\cdots m_p}^{-\infty,\cdots+\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu+\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(m_{\mu'}+\frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right)+2\sum_{\mu=1}^{p}\left(m_\mu+\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(v_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)};$$

sie ist mit der Funktion $\vartheta(\!(v)\!)$ verknüpft durch die Gleichung

$$(114)\quad \vartheta[\varepsilon](\!(v)\!) = \vartheta\left(v_1+\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\varepsilon_\mu}{2}a_{1\mu}+\frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i\,|\cdots|\,v_p+\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\varepsilon_\mu}{2}a_{p\mu}+\frac{\varepsilon'_p}{2}\pi i\right)$$
$$\cdot e^{\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}\frac{\varepsilon_\mu\varepsilon_{\mu'}}{4}+\sum_{\mu=1}^{p}\varepsilon_\mu\left(v_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)},$$

d. h. sie geht abgesehen von einem Exponentialfaktor aus der Funktion $\vartheta(\!(v)\!)$ hervor, wenn man deren Argumentensystem (v) um das System

$$(115)\qquad \{\varepsilon\} = \sum_{\mu=1}^{p}\frac{\varepsilon_\mu}{2}a_{1\mu}+\frac{\varepsilon'_1}{2}\pi i\,|\cdots|\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\varepsilon_\mu}{2}a_{p\mu}+\frac{\varepsilon'_p}{2}\pi i$$

zusammengehöriger Halben der Periodizitätsmodulen mit der Per. Char. (ε) vermehrt. So entspricht der Th. Char. $[\varepsilon]$ also die Per. Char. (ε), wenn man $\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)$ relativ gegen $\vartheta(\!(v)\!)$ betrachtet.

Die durch die Gleichung (113) definierte Thetafunktion $\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)$ genügt den $2p$ Gleichungen

$$(116)\quad \vartheta[\varepsilon](v_1|\cdots|v_\nu+\pi i\,|\cdots|v_p) = (-1)^{\varepsilon_\nu}\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!),$$

$$(117)\quad \vartheta[\varepsilon](v_1+a_{1\nu}|\cdots|v_p+a_{p\nu}) = (-1)^{\varepsilon'_\nu}\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)e^{-a_{\nu\nu}-2v_\nu}$$
$$(\nu=1,2,\ldots p)$$

oder, was dasselbe sagt, bei beliebigen ganzzahligen $\varkappa, \varkappa'$ der Gleichung

$$(118)\qquad \vartheta[\varepsilon](\!(v+\{2\varkappa\})\!)$$
$$= \vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)e^{-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p}a_{\mu\mu'}\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}-2\sum_{\mu=1}^{p}\varkappa_\mu v_\mu+\sum_{\mu=1}^{p}(\varepsilon_\mu\varkappa'_\mu-\varepsilon'_\mu\varkappa_\mu)\pi i},$$

in welcher $\{2\varkappa\}$ jenes System zusammengehöriger Ganzen der Periodizitätsmodulen bezeichnet, welches aus (115) für $\varepsilon_\mu = 2\varkappa_\mu$, $\varepsilon'_\mu = 2\varkappa'_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots p)$ hervorgeht.

Endlich genügt die Funktion $\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)$ den Gleichungen

$$(119)\qquad \vartheta[\varepsilon+2\varkappa](\!(v)\!) = (-1)^{\sum_{\mu=1}^{p}\varepsilon_\mu\varkappa'_\mu}\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!),$$

$$(120)\quad \vartheta[\varepsilon]((v+\{\eta\})) = \vartheta[\varepsilon+\eta]((v))\, e^{-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}\frac{\eta_\mu\eta_{\mu'}}{4} - \sum_{\mu=1}^{p}\eta_\mu\left(v_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu+\eta'_\mu}{2}\pi i\right)},$$

$$(121)\quad \vartheta[\varepsilon]((-v)) = (-1)^{\sum_{\mu=1}^{p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu}\,\vartheta[\varepsilon]((v)).$$

Die Formel (119) sagt aus, daß zwei Funktionen $\vartheta[\varepsilon]((v))$ und $\vartheta[\eta]((v))$, für welche die Charakteristikenelemente ε, ε' und η, η' den $2p$ Kongruenzen

$$(122)\quad \varepsilon_\mu \equiv \eta_\mu,\ \varepsilon'_\mu \equiv \eta'_\mu \pmod 2 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p)$$

genügen, nur um einen Faktor ± 1 voneinander verschieden sind, und man schließt daraus, daß es im ganzen überhaupt nur 2^{2p} wesentlich verschiedene Funktionen $\vartheta[\varepsilon]((v))$ gibt, als welche man diejenigen wählen wird, bei denen die Zahlen ε, ε' nur die Werte 0 und 1 besitzen.

Die Formel (120) zeigt weiter, daß man von jeder dieser 2^{2p} Funktionen zu jeder anderen von ihnen, abgesehen von einem Exponentialfaktor, gelangen kann, indem man ihr Argumentensystem (v) um ein passend gewähltes System zusammengehöriger Halben der Periodizitätsmodulen vermehrt. Dadurch erscheinen die 2^{2p} Funktionen $\vartheta[\varepsilon]((v))$ untereinander als gleichberechtigt.

Die Formel (121) endlich zeigt, daß die Funktion $\vartheta[\varepsilon]((v))$ eine gerade oder ungerade Funktion ihrer Argumente ist, je nachdem der Ausdruck

$$(123)\quad \sum_{\mu=1}^{p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu \equiv 0 \text{ oder } \equiv 1 \pmod 2$$

ist; man nennt daher auch eine Th. Char. $[\varepsilon]$ gerade oder ungerade, je nachdem $\sum_\mu \varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 2$ ist. Beachtet man dann noch, daß eine Thetafunktion mit einer ungeraden Th. Char. als ungerade Funktion ihrer Argumente für die Nullwerte dieser verschwindet, so erkennt man mit Hilfe von (120), daß eine Funktion $\vartheta[\varepsilon]((v))$ verschwindet, sobald für das Argumentensystem (v) ein System zusammengehöriger Halben der Periodizitätsmodulen mit einer solchen Per. Char. (η) gesetzt wird, für welche die Th. Char. $[\varepsilon+\eta]$ ungerade ist.

23. Periodencharakteristiken. Sind $\omega_{1\alpha}, \ldots \omega_{p\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots 2p)$ die $2p$ Periodensysteme einer *Abel*schen Funktion (s. Nr. 2), so denke man sich ein System zusammengehöriger Halben dieser Perioden in der Form

$$(124)\quad \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{p}(\varepsilon_\nu'\omega_{1\nu}+\varepsilon_\nu\omega_{1,p+\nu}),\ \dots\ \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{p}(\varepsilon_\nu'\omega_{p\nu}+\varepsilon_\nu\omega_{p,p+\nu})$$

geschrieben und dessen Per. Char. (vgl. Nr. **16**) mit (ε) bezeichnet.

Zwei Systeme (124), bei denen die Charakteristenelemente ε, ε' und η,η' den $2p$ Kongruenzen (122) genügen, sind einander kongruent nach den Perioden; zwei solche Per. Char. (ε) und (η) werden im folgenden als nicht verschieden angesehen. Es gibt dann im ganzen nur 2^{2p} verschiedene Per. Char. (ε), als welche man diejenigen wählt, bei denen die Zahlen ε, ε' nur die Werte 0 und 1 haben.

Durch jede lineare ganzzahlige Transformation (39) geht ein System zusammengehöriger Halben der Perioden ω in ein System zusammengehöriger Halben der Perioden ω' über, dessen Per. Char. $(\bar{\varepsilon})$ in ihren Elementen $\bar{\varepsilon}_\mu$, $\bar{\varepsilon}_\mu'$ durch die Kongruenzen

$$(125)\quad \begin{aligned}\bar{\varepsilon}_\mu &\equiv \sum_{\nu=1}^{p}(c_{\mu\nu}\varepsilon_\nu+c_{\mu,p+\nu}\varepsilon_\nu') \pmod 2,\\ \bar{\varepsilon}_\mu' &\equiv \sum_{\nu=1}^{p}(c_{p+\mu,\nu}\varepsilon_\nu+c_{p+\mu,p+\nu}\varepsilon_\nu') \pmod 2\end{aligned}\qquad (\mu=1,2,\dots p)$$

bestimmt ist. Man sagt dann, daß die Per. Char. (ε) durch die Transformation (39) in die Per. Char. $(\bar{\varepsilon})$ übergeht. Unter den 2^{2p} Per. Char. (ε) nimmt dabei die Per. Char. (0), bei der $\varepsilon_1=\dots=\varepsilon_p=\varepsilon_1'=\dots=\varepsilon_p'=0$ ist, den $2^{2p}-1$ anderen gegenüber eine Ausnahmestellung ein, da sie und nur sie bei jeder Transformation in sich übergeht. Man teilt daher die 2^{2p} Per. Char. (ε) in zwei Klassen; die erste Klasse besteht aus der einzigen Per. Char. (0), welche die uneigentliche Per. Char. genannt wird, die andere aus den $2^{2p}-1$ übrigen, welche die eigentlichen Per. Char. heißen. Unter der Summe $(\sigma)=(\varepsilon\eta\xi\dots)$ mehrerer Per. Char. (ε), (η), (ξ), ... wird jene Per. Char. verstanden, deren Elemente σ_μ, σ_μ' durch die Kongruenzen

$$(126)\quad \sigma_\mu\equiv\varepsilon_\mu+\eta_\mu+\xi_\mu+\cdots,\quad \sigma_\mu'\equiv\varepsilon_\mu'+\eta_\mu'+\xi_\mu'+\cdots \pmod 2$$
$$(\mu=1,2,\dots p)$$

bestimmt sind. Man nennt gegebene Per. Char. (ε), (η), ... unabhängig, wenn nicht die Summe irgendeiner Anzahl derselben der uneigentlichen Per. Char. (0) gleich ist. Eine Summe von ν unter gegebenen Per. Char. (ε_1), (ε_2), ... wird auch eine Kombination ν^{ter} Ordnung dieser Per. Char. genannt und mit $(\sum_{\nu}\varepsilon)$ bezeichnet.

Bezeichnen weiter (ε) und (η) irgend zwei Per. Char., $(\bar{\varepsilon})$ und $(\bar{\eta})$ die daraus durch die nämliche lineare ganzzahlige Transformation her-

vorgehenden, so ist stets

$$(127)\quad \sum_{\mu=1}^{p}(\bar{\varepsilon}_\mu \bar{\eta}_\mu' - \bar{\varepsilon}_\mu' \bar{\eta}_\mu) \equiv \sum_{\mu=1}^{p}(\varepsilon_\mu \eta_\mu' - \varepsilon_\mu' \eta_\mu) \pmod 2;$$

es bleibt daher der Ausdruck

$$(128)\quad |\varepsilon, \eta| = (-1)^{\sum_{\mu=1}^{p}(\varepsilon_\mu \eta_\mu' - \varepsilon_\mu' \eta_\mu)}$$

bei jeder linearen ganzzahligen Transformation seinem Werte nach ungeändert.

Zwei Per. Char. (ε) und (η) heißen syzygetisch oder azygetisch, je nachdem $|\varepsilon, \eta| = +1$ oder -1 ist.

Es gelten dann die Sätze:

Die uneigentliche Per. Char. (0) ist zu jeder der 2^{2p} Per. Char. syzygetisch; jede eigentliche Per. Char. (ε) dagegen ist zu 2^{2p-1} der Per. Char. syzygetisch, zu den 2^{2p-1} anderen azygetisch.

Unter den 2^{2p} Per. Char. sind stets 2^{2p-r} in vorgeschriebener Weise syzygetisch und azygetisch zu r gegebenen unabhängigen Per. Char.; durch ihr (syzygetisches oder azygetisches) Verhalten zu $2p$ unabhängigen Per. Char. ist also eine Per. Char. eindeutig bestimmt.

24. Thetacharakteristiken. Zwei Funktionen $\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)$ und $\vartheta[\eta](\!(v)\!)$, bei denen die Charakteristikenelemente ε, ε' und η, η' den $2p$ Kongruenzen (122) genügen, unterscheiden sich, wie oben bemerkt, auf Grund der Formel (119) nur um einen Faktor ± 1; zwei solche Th. Char. werden im folgenden als nicht verschieden angesehen. Es gibt dann im ganzen nur 2^{2p} verschiedene Th. Char., als welche man diejenigen wählt, bei denen die Zahlen ε, ε' nur die Werte 0 und 1 haben.

Bei jeder linearen ganzzahligen Transformation entspricht nach (111) einer Funktion $\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)_a$ eine Funktion $\vartheta[\hat{\varepsilon}](\!(v')\!)_{a'}$, die mit ihr durch eine Gleichung von der Form

$$(129)\quad \vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)_a = c\, e^{-V} \vartheta[\hat{\varepsilon}](\!(v')\!)_{a'},$$

verknüpft ist; dabei genügen die Elemente $\hat{\varepsilon}_\mu$, $\hat{\varepsilon}_\mu'$ der Th. Char. $[\hat{\varepsilon}]$ den $2p$ Kongruenzen:

$$(130)\quad \begin{aligned} \hat{\varepsilon}_\mu &\equiv \sum_{\nu=1}^{p}(c_{\mu\nu}\varepsilon_\nu + c_{\mu,p+\nu}\varepsilon_\nu' + c_{\mu\nu}c_{\mu,p+\nu}) \pmod 2, \\ \hat{\varepsilon}_\mu' &\equiv \sum_{\nu=1}^{p}(c_{p+\mu,\nu}\varepsilon_\nu + c_{p+\mu,p+\nu}\varepsilon_\nu' + c_{p+\mu,\nu}c_{p+\mu,p+\nu}) \pmod 2, \\ &\qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \end{aligned}$$

auf Grund deren stets

$$\sum_{\mu=1}^{p} \hat{\varepsilon}_\mu \hat{\varepsilon}_\mu' \equiv \sum_{\mu=1}^{p} \varepsilon_\mu \varepsilon_\mu' \pmod 2 \tag{131}$$

ist; es bleibt daher der Charakter

$$|\varepsilon| = (-1)^{\sum_{\mu=1}^{p} \varepsilon_\mu \varepsilon_\mu'} \tag{132}$$

einer Th. Char. bei jeder linearen ganzzahligen Transformation seinem Werte nach ungeändert.

Nennt man wie oben eine Th. Char. $[\varepsilon]$ gerade oder ungerade, je nachdem $|\varepsilon| = +1$ oder $= -1$ ist, so zerfallen die 2^{2p} Th. Char. in zwei Klassen, von denen die eine die g_p geraden, die andere die u_p ungeraden enthält; die Anzahlen g_p und u_p aber sind[65])

$$g_p = 2^{p-1}(2^p + 1), \quad u_p = 2^{p-1}(2^p - 1). \tag{133}$$

Unter der Summe $[\sigma] = [\varepsilon\eta\zeta \ldots]$ mehrerer Th. Char. $[\varepsilon]$, $[\eta]$, $[\zeta]$, ... wird wieder jene Th. Char. verstanden, deren Elemente σ_μ, σ_μ' durch die Kongruenzen (126) bestimmt sind. Man nennt gegebene Th. Char. $[\varepsilon]$, $[\eta]$, ... wesentlich unabhängig, wenn nicht die Summe einer geraden Anzahl derselben der Th. Char. [0] gleich ist. Eine Summe von ν unter gegebenen Th. Char. $[\varepsilon_1]$, $[\varepsilon_2]$, ... wird auch eine Kombination ν^{ter} Ordnung dieser Th. Char. genannt und mit $[\sum^{\nu}\varepsilon]$ bezeichnet. Die Kombinationen ungerader Ordnung heißen die wesentlichen Kombinationen der gegebenen Th. Char.

Drei Th. Char. $[\varepsilon]$, $[\eta]$, $[\zeta]$ heißen syzygetisch oder azygetisch, je nachdem der Ausdruck

$$|\varepsilon, \eta, \zeta| = |\varepsilon| \cdot |\eta| \cdot |\zeta| \cdot |\varepsilon\eta\zeta| \tag{134}$$

$= +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem also von den vier Th. Char. $[\varepsilon]$, $[\eta]$, $[\zeta]$, $[\varepsilon\eta\zeta]$ eine gerade oder ungerade Anzahl gerade (oder ungerade) ist.

25. Beziehungen zwischen den Per. Char. und Th. Char. Das verschiedene Verhalten der Per. Char. und der Th. Char. bei linearer ganzzahliger Transformation zeigt sich vor allem darin, daß die Per. Char. (0) stets in sich übergeht, daß also symbolisch geschrieben $(\bar{0}) = (0)$ ist, während die Th. Char. [0] in die Th. Char. $[\hat{0}]$ übergeht,

65) Zuerst angegeben von *Riemann* in seiner Vorlesung von W.-S. 61/62, vgl. Ges. math. W. Nachtr. 1902, p. 7, später von *Prym*, „Riem. Thetaf.“, III, p. 52, auch *Borel*, S. M. F. Bull. 26 (1898), p. 89; *Moore*, Amer. M. S. Bull. 1 (1895), p. 252.

deren Elemente $\hat{o}_\mu$, $\hat{o}_\mu'$ durch die Kongruenzen

$$(135)\qquad \hat{o}_\mu \equiv \sum_{\nu=1}^{p} c_{\mu\nu} c_{\mu, p+\nu}, \quad \hat{o}_\mu' \equiv \sum_{\nu=1}^{p} c_{p+\mu,\nu} c_{p+\mu, p+\nu} \pmod 2$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots p)$$

bestimmt sind. Für eine beliebige Per. Char. (ε) und die aus denselben Elementen gebildete Th. Char. $[\varepsilon]$ erhält man die Elemente $\hat{\varepsilon}_\mu$, $\hat{\varepsilon}_\mu'$ der transformierten Th. Char. $[\hat{\varepsilon}]$ aus den Elementen $\bar{\varepsilon}_\mu$, $\bar{\varepsilon}_\mu'$ der transformierten Per. Char. $(\bar{\varepsilon})$, indem man zu diesen die Größen $\hat{o}_\mu$, $\hat{o}_\mu'$ addiert; es ist also symbolisch geschrieben $[\hat{\varepsilon}] = [\bar{\varepsilon}\hat{0}]$. Gehen weiter die Per. Char. (ε), (η), ... durch eine Transformation in die Per. Char. $(\bar{\varepsilon})$, $(\bar{\eta})$, ... über, so geht durch diese Transformation die Summe $(\varepsilon\eta \ldots)$ stets in die Summe $(\bar{\varepsilon}\bar{\eta} \ldots)$ über; gehen dagegen die Th. Char. $[\varepsilon]$, $[\eta]$, ... durch eine Transformation in die Th. Char. $[\hat{\varepsilon}]$, $[\hat{\eta}]$, ... über, so geht die Summe einer ungeraden Anzahl $[\varepsilon\eta \ldots]$ von ihnen in $[\hat{\varepsilon}\hat{\eta} \ldots]$ über, die Summe $[\varepsilon\eta \ldots]$ einer geraden Anzahl dagegen in $[\hat{0}\hat{\varepsilon}\hat{\eta} \ldots]$ Die Summe einer ungeraden Anzahl von Th. Char. transformiert sich also wie eine Th. Char., die Summe einer geraden Anzahl von Th. Char. aber wie eine Per. Char. Man wird daher Th. Char. als Summen einer ungeraden, Per. Char. als Summen einer geraden Anzahl gewisser Fundamentalcharakteristiken darstellen, die dann bei einer Transformation als Th. Char. behandelt werden.

Zwischen den für Per. Char. definierten Symbolen $|\varepsilon, \eta|$ und den für Th. Char. definierten $|\varepsilon|$ und $|\varepsilon, \eta, \zeta|$ bestehen, wenn die auftretenden Per. Char. und Th. Char., (ε), (η), (ζ) und $[\varepsilon]$, $[\eta]$, $[\zeta]$, die nämlichen Elemente haben, die Gleichungen

$$(136)\qquad \begin{aligned} |\varepsilon| \cdot |\eta| \cdot |\varepsilon\eta| &= |\varepsilon, \eta|, \\ |\varepsilon, \eta, \zeta| &= |\varepsilon, \eta| \cdot |\eta, \zeta| \cdot |\zeta, \varepsilon| \end{aligned}$$

und hieraus ergeben sich die weiteren

$$(137)\qquad |\varepsilon\eta, \varepsilon\zeta| = |\varepsilon, \eta, \zeta|, \qquad |\varkappa, \varkappa\varepsilon, \varkappa\eta| = |\varepsilon, \eta|,$$

von denen die erste zeigt, daß mit den Th. Char. $[\varepsilon]$, $[\eta]$, $[\zeta]$ immer gleichzeitig die Per. Char. $(\varepsilon\eta)$ und $(\varepsilon\zeta)$ syzygetisch und azygetisch sind, die zweite aber, daß mit den Per. Char. (ε) und (η) immer gleichzeitig die Th. Char. $[\varkappa]$, $[\varkappa\varepsilon]$ und $[\varkappa\eta]$ und zwar bei beliebiger Th. Char. $[\varkappa]$ syzygetisch und azygetisch sind; woraus noch folgt, daß drei syzygetische oder azygetische Th. Char. durch Addition einer beliebigen Th. Char. wieder in drei syzygetische oder azygetische Th. Char. übergehen, daß also stets

$$(138)\qquad |\varkappa\varepsilon, \varkappa\eta, \varkappa\zeta| = |\varepsilon, \eta, \zeta| \qquad \text{ist.}$$

Wenn zwischen drei Th. Char. $[\varepsilon]$, $[\varkappa]$, $[\lambda]$ die Gleichung $[\varepsilon] = [\varkappa\lambda]$ besteht, so sagt man auch, die Per. Char. (ε) sei in die beiden Th. Char. $[\varkappa]$ und $[\lambda]$ zerlegbar, und schreibt $(\varepsilon) = [\varkappa] + [\lambda]$. Bezüglich dieser Zerlegungen gelten die Sätze:

Jede eigentliche Per. Char. läßt sich auf 2^{2p-1} Weisen in zwei, immer verschiedene Th. Char. zerlegen.

Jede eigentliche Per. Char. läßt sich auf $g_{p-1} = 2^{p-2}(2^{p-1}+1)$ Weisen in zwei gerade, auf $u_{p-1} = 2^{p-2}(2^{p-1}-1)$ Weisen in zwei ungerade, endlich auf $g_{p-1} + u_{p-1} = 2^{2p-2}$ Weisen in eine gerade und eine ungerade Th. Char. zerlegen.

Die uneigentliche Per. Char. (0) läßt sich auf 2^{2p} Weisen in zwei, immer gleiche Th. Char. zerlegen.

Den zweiten Satz kann man auch so aussprechen:

Addiert man zu den sämtlichen 2^{2p} Th. Char. eine beliebige der $2^{2p}-1$ eigentlichen Per. Char., so gehen dadurch von den g_p geraden Th. Char. $2g_{p-1} = 2^{p-1}(2^{p-1}+1)$ wieder in gerade, die übrigen 2^{2p-2} in ungerade über, während andererseits von den u_p ungeraden Th. Char. $2u_{p-1} = 2^{p-1}(2^{p-1}-1)$ wieder in ungerade, die übrigen 2^{2p-2} in gerade übergehen.[66])

Betrachtet man von den Zerlegungen einer gegebenen eigentlichen Per. Char. (ε) nur die in zwei gleichartige Th. Char., also die g_{p-1} Zerlegungen in zwei gerade und die u_{p-1} Zerlegungen in zwei ungerade Th. Char., so sagt man von den darin auftretenden $2g_{p-1}$ geraden und $2u_{p-1}$ ungeraden Th. Char., daß sie in der Gruppe (ε) enthalten, und zwar von zwei Th. Char. $[\varkappa]$ und $[\lambda]$, für welche $(\varepsilon) = [\varkappa] + [\lambda]$ ist, daß sie in der Gruppe (ε) gepaart enthalten seien. Es gibt dann im ganzen $2^{2p}-1$ Gruppen, von denen jede durch eine der eigentlichen Per. Char. bezeichnet wird, und bezüglich der in zwei und mehreren Gruppen gemeinsam enthaltenen Th. Char. gelten die folgenden Sätze[67]):

Sind die beiden Per. Char. (ε) und (η) azygetisch, so enthalten je zwei der drei Gruppen (ε), (η), $(\varepsilon\eta)$ g_{p-1} gerade und u_{p-1} ungerade Th. Char. gemeinsam, von denen aber keine zwei gepaart auftreten; alle drei Gruppen haben keine Th. Char. gemeinsam und enthalten zusammen $3g_{p-1}$ verschiedene gerade und $3u_{p-1}$ verschiedene ungerade Th. Char.

66) Zuerst aber ohne Beweis von *Riemann* in seiner Vorlesung vom W.-S. 61/62 angegeben; Beweis von *Prym*, „Riem. Thetaf.“, III; siehe aber auch *Riemann*, Ges. math. W. Nachtr. 1902, p. 61.

67) Zuerst bei *Jordan*, „Traité“, § 321—325, wo noch weitere solche Sätze sich finden; hierzu *Krazer*, „Thetaf.“, p. 259; vgl. auch *Clifford*, Math. Pap. 1882, p. 356.

Sind die beiden eigentlichen und verschiedenen Per. Char. (ε) und (η) syzygetisch, so treten in den drei Gruppen (ε), (η), $(\varepsilon\eta)$ alle geraden und alle ungeraden Th. Char. auf, und zwar kommen von ihnen $3 \cdot 2^{2p-3}$ gerade und $3 \cdot 2^{2p-3}$ ungerade Th. Char. nur in einer der drei Gruppen vor, während die übrigen $4g_{p-2}$ geraden und $4u_{p-2}$ ungeraden Th. Char. allen drei Gruppen gemeinsam angehören. Diese $4g_{p-2}$ geraden bzw. $4u_{p-2}$ ungeraden Th. Char. ordnen sich in g_{p-2} bzw. u_{p-2} Systeme von je 4 derart, daß die 4 Th. Char. eines solchen Systems in jeder der drei Gruppen zwei Paare bilden.[68])

26. Fundamentalsysteme von Per. Char. Ist für jedes Paar verschiedener Zahlen μ und ν von 1 bis n $|a_\mu, a_\nu| = -1$, so heißt die Reihe der Per. Char. $(a_1), (a_2), \ldots (a_n)$ eine azygetische; ist dann n gerade, so ist auch $(a_{n+1}) = (a_1 a_2 \ldots a_n)$ zu allen n Per. Char. (a) azygetisch und man nennt $(a_1), (a_2), \ldots, (a_n), (a_{n+1})$ eine geschlossene azygetische Reihe, da sie nicht erweitert werden kann. Auch folgt, daß die n Per. Char. einer azygetischen Reihe stets unabhängig sind, solange sie nicht geschlossen ist.

Eine geschlossene azygetische Reihe von $2p+1$ Per. Char. heißt ein Fundamentalsystem von Per. Char. (F. S. von Per. Char.). Die Anzahl der verschiedenen F. S. von Per. Char. beträgt

$$N = \frac{(2^{2p}-1)(2^{2p-2}-1)\ldots(2^2-1)}{(2p+1)!}\,2^{p^2}. \tag{139}$$

Die Summe aller $2p+1$ Per. Char. eines F. S. aber nicht die Summe

68) Per. Char. und Th. Char. sind von *Riemann* in seiner Vorlesung vom W.-S. 61/62 [Ges. math. W. Nachtr. 1902, p. 5, dazu auch *Prym*, Schweiz. Nat. Ges. N. Denkschr. 22 (1867)] eingeführt worden, der die letzteren schlechtweg „Charakteristiken", die ersteren „Gruppencharakteristiken" nennt, insofern als jede von ihnen zu einer Gruppe von solchen Produkten je zweier *Abel*schen Funktionen gehört, welche beim Überschreiten der Querschnitte der *Riemann*schen Fläche die nämlichen Faktoren annehmen. Da diese Faktoren durch die Summe der Th. Char. der beiden im Produkte vereinigten *Abel*schen Funktionen bestimmt sind, so haben die Th Char. aller Paare einer Gruppe dieselbe Summe. In diesem Sinne bei *Weber* „$p = 3$" und *Noether* [Erl. Ber. 10 (1878), p. 87 und 11 (1879), p. 198; Math. Ann. 14 (1879), p. 248 und 16 (1880), p. 270], der die Th. Char „eigentliche Charakteristiken" nennt. In der Bezeichnungsweise folgen wir *Prym*, der eine Per. Char. mit (ε), eine Th. Char. mit $[\varepsilon]$ bezeichnet, während *Noether* gerade umgekehrt verfährt. Die Unterscheidung zwischen Per. Char. und Th Char. ist schon bei *Weber* in der Bezeichnung unterlassen und wird in der Folge ganz verwischt, bis *Noether* [Math. Ann. 28 (1887), p. 372] wieder auf deren Notwendigkeit hingewiesen. *Klein* [Math. Ann. 36 (1890), p. 34, vorher schon bei *Burkhardt*, Math. Ann. 35 (1890), p. 208 u. 246] nennt die Per. Char. „Elementarcharakteristiken", die Th. Char. aber „Primcharakteristiken", näheres in Anm. 141.

von weniger unter ihnen ist der uneigentlichen Per. Char. (0) gleich. Jede der $2^{2p} - 1$ eigentlichen Per. Char. läßt sich immer, und zwar auf zwei Weisen, als Summe von Per. Char. eines gegebenen F. S. darstellen. Die beiden Darstellungen enthalten zusammen alle $2p + 1$ Per. Char. des F. S. und zwar jede nur einmal; die eine enthält also stets eine gerade, die andere eine ungerade Anzahl von Per. Char.; die erstere werden wir (vgl. Nr. 25) als die kanonische betrachten.

Aus einem F. S. von Per. Char. $(a_1), (a_2), \ldots (a_{2p+1})$ geht immer wieder ein F. S. von Per. Char. hervor, wenn man irgendeine gerade Anzahl seiner Per. Char. $(a_1), (a_2), \ldots (a_{2\lambda})$ durch die Per. Char. (sa_1), $(sa_2), \ldots (sa_{2\lambda})$ ersetzt, wo $(s) = (a_1 a_2 \ldots a_{2\lambda})$ ist. Man kann auf diese Weise von einem F. S. zu jedem beliebigen anderen gelangen.

Durch eine lineare ganzzahlige Transformation geht aus einem F. S. von Per. Char. immer wieder ein F. S. von Per. Char. hervor. Man kann auf diese Weise von einem F. S. zu jedem beliebigen anderen gelangen.

Sind $(a_1), (a_2), \ldots (a_{2p+1})$ die $2p + 1$ Per. Char. eines F. S. und bezeichnet man mit $[n]$ die Summe der unter den $2p + 1$ Th. Char. $[a_1], [a_2], \ldots [a_{2p+1}]$ vorkommenden ungeraden Th. Char., so werden von den Formen $\left[n + \sum^{p \pm 4\varrho} a\right]$ und ebenso von den Formen $\left[n + \sum^{p+1 \pm 4\varrho} a\right]$, $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$, die sämtlichen g_p geraden Th. Char. und jede nur einmal; von den Formen $\left[n + \sum^{p+2 \pm 4\varrho} a\right]$ und ebenso von den Formen $\left[n + \sum^{p+3 \pm 4\varrho} a\right]$ die sämtlichen u_p ungeraden Th. Char. und jede nur einmal geliefert. Von den $2p + 1$ Th. Char.

$$(140) \qquad [h_1] = [na_1], [h_2] = [na_2], \ldots [h_{2p+1}] = [na_{2p+1}]$$

sagt man, daß sie eine Hauptreihe von Th. Char. bilden, und man erhält, je nachdem $p \equiv 0, 1$ oder $\equiv 2, 3 \pmod 4$ ist, von den Formen $\left[\sum^{4\varrho+1} h\right]$ die sämtlichen geraden oder ungeraden Th. Char. und jede nur einmal, von den Formen $\left[\sum^{4\varrho+3} h\right]$ die sämtlichen ungeraden oder geraden Th. Char. und jede nur einmal geliefert, während die Kombinationen gerader Ordnung $\left(\sum^{2\varkappa} h\right)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$ die sämtlichen $2^{2p} - 1$ eigentlichen Per. Char. und zwar jede nur einmal liefern. Da $[n]$ auch die Summe aller $2p + 1$ Th. Char. der Hauptreihe und daher zugleich mit diesen bekannt ist, so kann man aus (140) auch die Per. Char. des F. S. aus den Th. Char. der Hauptreihe berechnen in der Form

$$(141) \qquad (a_1) = (nh_1), (a_2) = (nh_2), \ldots (a_{2p+1}) = (nh_{2p+1}).$$

27. Fundamentalsysteme von Thetacharakteristiken. Ein Fundamentalsystem von Thetacharakteristiken (F. S. von Th. Char.) werden $2p+2$ Th. Char. $[a_0']$, $[a_1']$, ... $[a'_{2p+1}]$ genannt, die zu je dreien azygetisch sind, für welche also die Gleichungen $|a_\lambda', a_\mu', a_\nu'| = -1$ bestehen, sobald λ, μ, ν irgend drei verschiedene der Zahlen $0, 1, \ldots 2p+1$ bezeichnen. Addiert man eine der $2p+2$ Charakteristiken eines F. S. von Th. Char. zu den $2p+1$ übrigen und faßt die $2p+1$ entstehenden Charakteristiken als Per. Char. auf, so bilden dieselben ein F. S. von Per. Char. Addiert man umgekehrt zu den $2p+1$ Charakteristiken eines F. S. von Per. Char. und der uneigentlichen Per. Char. (0) eine willkürliche Charakteristik und faßt die $2p+2$ entstehenden Charakteristiken als Th. Char. auf, so bilden dieselben ein F. S. von Th. Char. Die Anzahl der verschiedenen F. S. von Th. Char. beträgt

$$N' = 2^{2p}\frac{(2^{2p}-1)(2^{2p-2}-1)\ldots(2^2-1)}{(2p+2)!}2^{p^2}. \tag{142}$$

Die Summe der $2p+2$ Th. Char. eines F. S. ist $[0]$; dagegen sind weniger unter ihnen wesentlich unabhängig. In jedem F. S. von Th. Char. genügt die Anzahl s der ungeraden Th. Char. der Kongruenz $s \equiv p \pmod 4$. Ist umgekehrt $s \equiv p \pmod 4$, so gibt es

$$N' = \frac{(2^{2p}-1)(2^{2p-2}-1)\ldots(2^2-1)}{\mu!\,(2p+2-\mu)!}2^{p^2} \tag{143}$$

F. S. von Th. Char., welche genau s ungerade Th. Char. enthalten. Bilden $[a_0']$, $[a_1']$, ... $[a'_{2p+1}]$ ein F. S. von Th. Char. und ist $[n']$ die Summe der ungeraden unter ihnen, so läßt sich jede beliebige Th. Char. $[\varepsilon]$ immer und zwar auf zwei Weisen darstellen in der Form $[\varepsilon] = \left[n' + \sum^{p \pm 2\nu+1} a'\right]$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ und es ist eine in dieser Form gegebene Th. Char. gerade oder ungerade, je nachdem ν gerade oder ungerade ist, d. h. es werden von den Formen $\left[n' + \sum^{p \pm 4\varrho+1} a'\right]$ $(\varrho = 0, 1, 2, \ldots)$ die sämtlichen g_p geraden Th. Char. und zwar jede zweimal, von den Formen $\left[n' + \sum^{p \pm 4\varrho+3} a'\right]$ die sämtlichen u_p ungeraden Th. Char. und zwar jede zweimal geliefert.

Durch eine lineare ganzzahlige Transformation geht aus einem F. S. von Th. Char. immer wieder ein F. S. von Th. Char. hervor und zwar eines mit der gleichen Anzahl ungerader Th. Char. Man kann auf diese Weise von einem F. S. von Th. Char. mit s ungeraden Th. Char. zu jedem anderen derartigen gelangen.[69])

69) Das Verfahren von *Weierstraß* [zuerst bei *Königsberger*, J. f. Math. 64 (1865), p. 20, auch bei *Pringsheim*, Math. Ann. 12 (1877), p. 436], die Indizes

28. Gruppen von Periodencharakteristiken. Alle Kombinationen von r unabhängigen Per. Char. $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), \ldots (\varepsilon_r)$ bilden zusammen mit der uneigentlichen Per. Char. (0) eine Gruppe E von 2^r verschiedenen Per. Char. Die Zahl r heißt der Rang, die Zahl 2^r die Ordnung der Gruppe E, die r Per. Char. $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), \ldots (\varepsilon_r)$ oder irgend r andere unabhängige Per. Char. von E die Basis der Gruppe E.

Diejenigen unter den Per. Char. von E, welche zu den sämtlichen 2^r Per. Char. von E syzygetisch sind[70]), bilden die syzygetische Untergruppe A von E; ist m ihr Rang, so ist stets $m \equiv r \pmod 2$ und zugleich stets $m \gtrless p$. Sind $(\alpha_1), (\alpha_2), \ldots (\alpha_m)$ eine Basis von A, so kann eine Basis von E stets in der Form $(\alpha_1), \ldots (\alpha_m), (\beta_1), \ldots (\beta_{2n})$ $(m + 2n = r)$ dargestellt werden, wo die Per. Char. (β) zueinander azygetisch sind; eine solche Basis wird eine normale genannt.

Durch eine lineare ganzzahlige Transformation der Perioden geht aus einer Gruppe von Per. Char. immer wieder eine Gruppe von Per. Char. hervor; dabei bleibt nicht nur der Rang der Gruppe selbst, sondern auch der Rang ihrer syzygetischen Untergruppe ungeändert.

---

aller 2^{2p} Thetafunktionen durch Komposition von $2p+1$ ausgezeichneten zu bilden, ist das früheste Beispiel eines F. S. von Per. Char. Weiter erfuhr man sodann durch *Prym* [Schweiz. Nat. Ges. N. Denkschr. 22 (1867), p. 11, dazu auch „Riem. Thetaf.", Einleitung p. VII] und später genauer durch die Veröffentlichung der Vorlesung *Riemanns* vom W.-S. 1861/62 (Ges. math. W. Nachtr. 1902, p. 40), daß *Riemann* bereits in dieser F. S. von Per. Char. eingeführt und sich ihrer nicht nur im hyperelliptischen Falle, sondern auch im allgemeinen Falle $p = 3$ bedient hat. *Prym* charakterisiert sie durch die Eigenschaft [ebenso *Schottky*, „Abr.", p. 18; dazu J. f. Math 139 (1911), p. 13], daß es zu den $2p+1$ Per. Char. eines F. S. immer eine zunächst noch unbekannte Th. Char. $[n]$ gibt, derart daß eine Th. Char. von der Form $\left[n + \sum^{p+\mu} a\right]$ gerade ist, wenn $\mu \equiv 0$ oder $1 \pmod 4$, ungerade, wenn $\mu \equiv 2$ oder $3 \pmod 4$ ist, und zeigt dann, daß die Th. Char. $[n]$ gleich ist der Summe der ungeraden unter den $2p+1$ Charakteristiken $[a]$. Die Eigenschaft, daß die $2p+1$ Per. Char. eines F. S. paarweise azygetisch sind, wurde zuerst von *Stahl* [J. f. Math. 88 (1880), p. 273; vgl. dazu *Riemann*, Ges. math. W. Nachtr. p. 60 Anm. (10)] angegeben.

Bei *Weber* „$p = 3$" bilden die 7 ungeraden Th. Char. $[\beta_1], [\beta_2], \ldots [\beta_7]$ eines „vollständigen Systems" eine Hauptreihe, und da ihre Summe $[p]$ ist, so bilden die 7 Per. Char. $(p\beta_1), (p\beta_2), \ldots (p\beta_7)$ ein F. S. von Per. Char. Auch die „ausgezeichneten" Systeme von $2p+1$ Charakteristiken bei *Noether* a. a. O. sind Hauptreihen von Th. Char.

Zur Theorie der F. S. von Per. Char. und Th. Char. vgl. weiter *Frobenius*, J. f. Math. 89 (1880), p. 185; *Prym*, „Riem. Thetaf.", IV; *Schottky*, „Abr.", J. f. Math. 102 (1888), p. 304 und Acta math. 27 (1903), p. 235.

70) Man wird bemerken, daß eine beliebige eigentliche Per. Char. entweder zu allen 2^r Per. Char. einer Gruppe syzygetisch ist, oder zu 2^{r-1} von ihnen syzygetisch, zu den anderen 2^{r-1} azygetisch.

Man kann durch lineare Transformation von jeder Gruppe zu jeder anderen von gleichem Range und gleichem Range der syzygetischen Untergruppe gelangen.

Zu den 2^r Per. Char. einer Gruppe E vom Range r gibt es 2^{2p-r} Per. Char., welche zu allen Per. Char. von E syzygetisch sind, sie bilden selbst wieder eine Gruppe Z vom Range $2p - r$, die man die zu E adjungierte Gruppe nennt; es ist dann auch E die zu Z adjungierte Gruppe. Die Gruppen E und Z haben die syzygetische Untergruppe A gemeinsam und es ist diese zugleich ihr größter gemeinsamer Teiler. Konjugiert zu einer Gruppe E vom Range r nennt man weiter eine solche Gruppe H vom Range $2p - r$, deren Basischarakteristiken $(\eta_1), (\eta_2), \ldots (\eta_{2p-r})$ zusammen mit den Basischarakteristiken $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), \ldots (\varepsilon_r)$ von E $2p$ unabhängige Per. Char. bilden. Sind je zwei Per. Char. einer Gruppe syzygetisch, so heißt die Gruppe selbst syzygetisch. Der Rang einer syzygetischen Gruppe kann nicht größer als p sein. Eine syzygetische Gruppe vom Range p heißt eine *Göpel*sche Gruppe. Die Anzahl der verschiedenen *Göpel*schen Gruppen beträgt

$$G = (2^p + 1)(2^{p-1} + 1) \ldots (2 + 1). \tag{144}$$

Für jede *Göpel*sche Gruppe ist die adjungierte Gruppe mit der ursprünglichen identisch.

29. Systeme von Thetacharakteristiken. Addiert man zu den sämtlichen Per. Char. einer Gruppe E eine beliebige Th. Char. $[\varkappa]$ und faßt die entstehenden 2^r Charakteristiken als Th. Char. auf, so sagt man von ihnen, daß sie ein System von 2^r Th. Char. bilden. Man kann die 2^r Th. Char. eines Systems auch als die wesentlichen Kombinationen von $r + 1$ wesentlich unabhängigen unter ihnen definieren. Aus einer Gruppe E vom Range r entstehen auf diese Weise im ganzen 2^{2p-r} verschiedene Systeme von Th. Char., welche zusammen alle 2^{2p} überhaupt existierenden Th. Char. und jede nur einmal enthalten; man sagt von ihnen, daß sie einen Komplex bilden. Man erhält die 2^{2p-r} Systeme des Komplexes und jedes nur einmal, wenn man an Stelle von $[\varkappa]$ der Reihe nach die 2^{2p-r} Per. Char. einer zu E konjugierten Gruppe H treten läßt. Man nennt daher auch die 2^{2p-r} Systeme eines Komplexes zueinander konjugiert. Adjungiert heißen zwei Systeme von Th. Char., wenn jene zwei Gruppen von Per. Char. es sind, aus denen sie abgeleitet sind.

Die aus einer *Göpel*schen Gruppe von Per. Char. abgeleiteten Systeme von Th. Char. werden *Göpel*sche Systeme genannt. In jedem Komplexe von 2^p *Göpel*schen Systemen gibt es eines, das aus 2^p ge-

raden Th. Char. besteht; jedes der $2^p - 1$ anderen enthält 2^{p-1} gerade und 2^{p-1} ungerade Th. Char.

Ist A eine syzygetische Gruppe von Per. Char. vom Range m, so gibt es in dem zugehörigen Komplexe von 2^{2p-m} Systemen von Th. Char. 2^{2q} ($q = p - m$), deren 2^m Th. Char. jedesmal sämtlich von demselben Charakter sind, und zwar $g_q = 2^{q-1}(2^q + 1)$ Systeme, die aus lauter geraden und $u_q = 2^{q-1}(2^q - 1)$ Systeme, die aus lauter ungeraden Th. Char. bestehen. Sind (a_μ) $(\mu = 1, 2, \ldots 2^m)$ die 2^m Per. Char. der Gruppe A, $(a_\mu b_\nu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots 2^m;\ \nu = 1, 2, \ldots 2^{2q})$ die 2^{2p-m} Per. Char. der adjungierten Gruppe (vgl. Nr. **36**) und geht eines der 2^{2q} genannten Systeme aus A durch Addition der Th. Char. $[\varkappa]$ hervor, so erhält man alle 2^{2q} durch Addition der 2^{2q} Th. Char. $[\varkappa b_\nu]$. Diese 2^{2q} Systeme von je 2^m Th. Char. gleichen Charakters verhalten sich wie die 2^{2q} q-reihigen Th. Char.. Sind $[\varkappa_1]$, $[\varkappa_2]$, $[\varkappa_3]$ drei syzygetische oder azygetische Th. Char., so können die ihnen entsprechenden Systeme K_1, K_2, K_3 selbst zueinander syzygetisch oder azygetisch genannt werden, da es irgend drei aus ihnen entnommene Th. Char. sind. Man kann jetzt weiter aus den 2^{2q} Systemen auf mannigfache Art $2q + 2$ zu je dreien azygetische herausgreifen; diese bilden dann ein Fundamentalsystem in dem gleichen Sinne, wie die $2q + 2$ zu je dreien azygetische q-reihige Th. Char, indem man aus ihnen jedes der übrigen Systeme zusammensetzen kann und von einer Schar von Formen die sämtlichen geraden, von einer zweiten die sämtlichen ungeraden Systeme geliefert werden. Oder man kann auch Hauptreihen von $2q + 1$ Systemen bilden, welche von gleichem Charakter und zu je dreien azygetisch sind; ihre Kombinationen 5., 9., ... Ordnung liefern dann jene Systeme, welche von gleichem, die Kombinationen 3., 7., ... Ordnung jene, welche von entgegengesetztem Charakter sind wie die Systeme der Hauptreihe.

Durch die beiden Prozesse der linearen Transformation und der Addition einer Th. Char. zu den sämtlichen Th. Char. eines Systems geht ein System von Th. Char. immer wieder in ein System von Th. Char. über. Man kann insbesondere auf diese Weise von jedem *Göpel*schen Systeme zu jedem anderen gelangen.[71])

30. Änderung des Querschnittsystems einer Riemannschen Fläche. Da die Periodizitätsmodulen $\omega_{\mu\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots 2p)$ eines Integrals 1. Gattung u_μ an den $2p$ Querschnitten der *Riemann*schen

71) Zu Art. 29 u. 30: *Frobenius,* J. f. Math. 96 (1884), p. 81; auch *Schottky,* J. f. Math. 102 (1888), p. 304 und Acta math. 27 (1903), p. 235. Zur Charakteristikentheorie überhaupt *Brill* und *Noether,* D. M. V. Jahresber. 3 (1894), Abschnitt IX. Eine geometrische Deutung der Charakteristikentheorie bei *Coble,* Amer. M. S. Trans. 14 (1913), p. 241.

Fläche stets die Werte dieses Integrals auf gewissen geschlossenen Wegen sind, so müssen sich die bei irgendeiner anderen Wahl der Zerschneidung auftretenden neuen Periodizitätsmodulen $\omega'_{\mu\alpha}$ homogen und linear mit ganzzahligen Koeffizienten aus den ursprünglichen zusammensetzen lassen und diese Koeffizienten müssen infolge der zwischen den ω und zwischen den ω' bestehenden bilinearen Relationen den Bedingungen (40) der Transformationszahlen genügen.[72]) Es entspricht also jeder Änderung des Querschnittsystems eine ganzzahlige Transformation, und da sich aus demselben Grunde wie vorher auch die ω ganzzahlig aus den ω' zusammensetzen lassen müssen, so ist die in Rede stehende Transformation eine lineare. Daß umgekehrt aber auch jeder linearen ganzzahligen Transformation eine Änderung des Querschnittsystems der *Riemann*schen Fläche entspricht, beweist man, indem man es von jenen einfachen Transformationen zeigt, aus denen sich nach Nr. **12** jede beliebige lineare ganzzahlige Transformation zusammensetzen läßt.[73])

31. Die Gruppe der mod. 2 inkongruenten Transformationen. Wenn man die Wirkung einer Änderung des Querschnittsystems oder, was nach Vorigem dasselbe, einer linearen ganzzahligen Transformation auf die 2^{2p} aus halben Zahlen gebildeten Per. Char. (ε) oder Th. Char. $[\varepsilon]$ untersucht, so erscheinen zwei Transformationen T und T', deren Transformationszahlen $c_{\alpha\beta}$ und $c'_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots 2p)$ den $4p^2$ Kongruenzen $c_{\alpha\beta} \equiv c'_{\alpha\beta}$ (mod. 2) genügen, als äquivalent, weil sie eine gegebene Charakteristik (ε) bzw. $[\varepsilon]$ in die nämliche neue $(\bar{\varepsilon})$ bzw. $[\hat{\varepsilon}]$ überführen. Sieht man deshalb zwei solche Transformationen T und T' als nicht verschieden an, so reduziert sich die unendliche Gruppe der linearen ganzzahligen Transformationen auf eine endliche, welche die Gruppe G der mod. 2 inkongruenten linearen ganzzahligen Transformationen genannt wird und die auch definiert werden kann durch die Gesamtheit aller jenen Gleichungensysteme

$$\omega'_{\mu\alpha} = \sum_{\beta=1}^{2p} \varepsilon_{\alpha\beta}\, \omega_{\mu\beta}, \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \cdots p \\ \alpha = 1, 2, \cdots 2p \end{pmatrix} \tag{145}$$

deren Koeffizienten $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ausschließlich die Werte 0, 1 besitzen und den $p(2p-1)$ Kongruenzen

72) Daß die Bedingungsgleichungen (40) bei jeder Querschnittänderung zwischen den Koeffizienten der die ω und ω' verbindenden linearen Gleichungen bestehen, hat ohne Hilfe der Integrale mit rein geometrischen Hilfsmitteln der analysis situs *Wellstein* bewiesen [Math. Ann. 52 (1899), p. 433].

73) *Thomae*, Z. f. Math. **12** (1867), p. 372; J. f. Math. 75 (1873), p. 230.

$$(146)\quad \sum_{\varrho=1}^{p}(\varepsilon_{\varrho\alpha}\varepsilon_{p+\varrho,\beta} - \varepsilon_{p+\varrho,\alpha}\varepsilon_{\varrho\beta}) \equiv \begin{cases} 1, \text{ wenn } \beta = p+\alpha, \\ 0, \text{ wenn } \beta \gtrless p+\alpha, \end{cases}$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots 2p;\ \alpha < \beta)$$

genügen.

Die Ordnung der Gruppe G ist

$$(147)\qquad \Omega = (2^{2p}-1)(2^{2p-2}-1)\cdots(2^2-1)\cdot 2^{p^2}.$$

Die Gruppe G ist holoedrisch isomorph zu der Gruppe H jener Substitutionen der Per. Char., durch welche je zwei syzygetische Per. Char. wieder in zwei syzygetische und je zwei azygetische Per. Char. wieder in zwei azygetische übergehen. Als erzeugende Substitutionen der Gruppe H können die 2^{2p} Substitutionen S_ε dienen, welche eine Per. Char. $(\varkappa)$ ungeändert lassen, wenn $(\varkappa)$ zu (ε) syzygetisch ist, dagegen $(\varkappa)$ in $(\varepsilon\varkappa)$ überführen, wenn $(\varkappa)$ zu (ε) azygetisch ist. Die Gruppe H ist als Substitutionsgruppe aller 2^{2p} Per. Char. intransitiv, da die uneigentliche Per. Char. (0) stets in sich übergeht; hinsichtlich der $2^{2p}-1$ eigentlichen Per. Char. ist sie transitiv.

Faßt man die Th. Char. ins Auge, so entspricht der Substitution S_ε jetzt eine Substitution der Th. Char. S'_ε, welche eine gerade (ungerade) Th. Char. $[\varkappa]$ mit $[\varkappa\varepsilon]$ vertauscht, wenn auch $[\varkappa\varepsilon]$ gerade (ungerade) ist, dagegen $[\varkappa]$ ungeändert läßt, wenn $[\varkappa\varepsilon]$ ungerade (gerade) ist. Die von diesen 2^{2p} erzeugenden Substitutionen S'_ε gebildete Gruppe H' ist dann gleichfalls mit G holoedrisch isomorph. Sie kann auch definiert werden[74]) als die Gruppe jener Substitutionen, welche 1. eine gerade Th. Char. wieder in eine gerade, eine ungerade Th. Char. wieder in eine ungerade, 2. drei syzygetische Th. Char. wieder in drei syzygetische, drei azygetische Th. Char. wieder in drei azygetische überführen und bei welchen 3., wenn die Summe einer geraden Anzahl aus den ursprünglichen Th. Char. $= [0]$ ist, dies dann auch für die Summe der entsprechenden neuen stattfindet. Die Gruppe H' ist als Substitutionsgruppe aller 2^{2p} Th. Char. intransitiv, da die geraden Th. Char. unter sich und ebenso die ungeraden Th. Char. unter sich permutiert werden. Hinsichtlich der geraden Th. Char. ist sie transitiv, hinsichtlich der ungeraden zweimal transitiv.

Im Falle $p = 2$ ist die Gruppe H' holoedrisch isomorph mit der Gruppe der 720 Vertauschungen von 6 Elementen; in Übereinstimmung damit ergibt für diesen Fall die Gleichung (147) den Wert $\Omega = 720$. Man weiß, daß diese Gruppe die Gruppe der 360 geraden Permuta-

74) *Frobenius*, J. f. Math. 89 (1880), p. 187.

tionen als Normalteiler enthält. Daß für $p > 2$ die Gruppe G eine einfache ist, hat *Jordan* bewiesen.[75])

32. Monodromie der Verzweigungspunkte. Betrachtet man die Verzweigungspunkte einer *Riemann*schen Fläche als veränderliche Größen, so werden die Periodizitätsmodulen der Integrale Funktionen derselben, welche bei stetiger Änderung der die Querschnitte vor sich herschiebenden Verzweigungspunkte sich gleichfalls stetig ändern. Ist schließlich jeder Verzweigungspunkt wieder an eine Stelle gerückt, wo früher ein Verzweigungspunkt, er selber oder ein anderer, gewesen ist, so ist aus dem ursprünglichen Querschnittsystem ein neues hervorgegangen, von dem man sagt, es sei aus ihm durch Monodromie der Verzweigungspunkte entstanden.

Im Falle $p = 2$ gilt der Satz, daß sich alle Querschnittsänderungen auf die angegebene Weise durch Monodromie der Verzweigungspunkte erzielen lassen. Man beweist ihn, indem man berücksichtigt, daß allen Querschnittsänderungen, wie oben gezeigt, lineare ganzzahlige Transformationen entsprechen, und nun von den 4 erzeugenden Transformationen, aus denen sich nach Nr. **12** alle linearen ganzzahligen Transformationen zusammensetzen lassen, im einzelnen dartut, daß die durch sie erzielte Querschnittsänderung auch durch Monodromie der Verzweigungspunkte erreicht werden kann.[76])

Es entsprechen solchen Monodromieänderungen, welche die gleiche Permutation der 6 Verzweigungspunkte hervorbringen, Transformationen, welche einander mod. 2 kongruent sind, solchen Monodromieänderungen also, bei denen jeder der 6 Verzweigungspunkte wieder an seine alte Stelle kommt, Transformationen, welche der Identität mod. 2 kongruent sind. Den 720 Permutationen der 6 Verzweigungspunkte aber entsprechen die 720 mod. 2 inkongruenten Transformationen.[77])

75) Zu diesem Paragraphen *Jordan*, „Traité“, Paris C. R. 88 (1879), p. 1020 u. 1068, J. de l'Éc. polyt. 46 (1879), p. 35, Math. Ann. 1 (1869), p. 583. *Jordans* „Groupe abélien“ Art. 217—223 ist die Gruppe G, während die in den Art. 230 bis 239 gegebene „zweite Definition“ sich mit der Definition der Gruppe H deckt; endlich ist der in Art. 318—335 behandelte „Groupe de Steiner“ mit der Gruppe H' identisch; vgl. dazu *Dickson*, Amer. M. S. Trans. 3 (1902), p. 38 u. 377; Amer. M. S. Bull. 4 (1898), p. 495.

Hinsichtlich der Wirkungen der Substitutionen der Gruppe H auf die F. S. von Per. Char. und Gruppen von Per. Char. und ebenso der Substitutionen der Gruppe H' auf die F. S. von Th. Char. und Systeme von Th. Char. siehe bei diesen.

76) *Burkhardt*, Math. Ann. 35 (1890), p. 213, *Jordan*, „Traité“, p. 360.

77) Man wird dazu bemerken, daß die von *Jordan* p. 360 angegebenen Er-

Der Satz, daß jede Querschnittsänderung durch Monodromie der Verzweigungspunkte erzielt werden kann, gilt nicht mehr im hyperelliptischen Falle $p = 3$. In diesem Falle verschwindet für $(v) = (0)$ eine der 36 geraden Thetafunktionen (Nr. 74). Da die Gruppe H' in bezug auf die geraden Th. Char. transitiv ist, so kann man durch passende lineare Transformation, also durch passende Wahl des Querschnittsystems, jede der 36 geraden Thetafunktionen an ihre Stelle bringen. Die sämtlichen möglichen Querschnittsysteme zerfallen dadurch in 36 Klassen, derart daß bei allen Querschnittsystemen einer Klasse die nämliche gerade Thetafunktion verschwindet. Nur solche Querschnittsänderungen, welche von einem Querschnittsystem zu einem anderen der nämlichen Klasse führen, können durch Monodromie der Verzweigungspunkte erzielt werden.[78])

Im allgemeinen Falle $p = 3$ dagegen kann man die Koeffizienten der Grundgleichung von irgendwelchen Anfangswerten beginnend durch stetige Änderung so zu diesen zurückführen, daß dabei das irgendeiner ursprünglichen Zerschneidung der *Riemann*schen Fläche entsprechende System von Periodizitätsmodulen ω in das irgendeiner anderen Zerschneidung entsprechende ω' übergeht.[79])

33. Thetafunktionen höherer Ordnung mit halben Charakteristiken. Eine Thetafunktion n^{ter} Ordnung mit der Charakteristik $[\varepsilon]$ ist eine einwertige und für endliche v stetige Funktion $\Theta_n[\varepsilon]\langle\langle v\rangle\rangle$ der komplexen Veränderlichen $v_1, v_2, \ldots v_p$, welche bei beliebigen ganzzahligen $\varkappa, \varkappa'$ der Gleichung

$$\begin{aligned}&\Theta_n[\varepsilon]\langle\langle v + \{2\varkappa\}\rangle\rangle\\ (148)\qquad &= \Theta_n[\varepsilon]\langle\langle v\rangle\rangle\, e^{-n\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'} - 2n\sum_{\mu=1}^{p}\varkappa_\mu v_\mu + \sum_{\mu=1}^{p}(\varkappa'_\mu\varepsilon_\mu - \varkappa_\mu\varepsilon'_\mu)\pi i}\end{aligned}$$

genügt. Solche Funktionen gibt es zu gegebenem $[\varepsilon]$ unendlich viele, die sich aber aus n^p linear unabhängigen linear zusammensetzen lassen. Unter ihnen sind die wichtigsten diejenigen, die gerade oder ungerade Funktionen ihrer Argumente sind. Bezüglich dieser gilt der Satz:

Ist n gerade, so gibt es zu der Charakteristik $[0]$

$$(149)\qquad \begin{aligned}&\mathfrak{g} = \tfrac{1}{2}(n^p + 2^p) \text{ linear unabhängige gerade und}\\ &\mathfrak{u} = \tfrac{1}{2}(n^p - 2^p) \text{ linear unabhängige ungerade}\end{aligned}$$

zeugenden unter diesen Transformationen nur jene liefern, bei denen $c_{\alpha\alpha} \equiv 1 \pmod 4$, $c_{\alpha\beta} \equiv 0 \pmod 2$ ist, also nur einen Teil der die Monodromiegruppe umfassenden arithmetischen Gruppe.

78) *Jordan*, „Traité", p. 364; *Klein*, Math. Ann. 36 (1890), p. 48, *Thompson*, Diss. Göttingen 1892 = Amer. J. 15 (1893), p. 91.

79) *Klein*, a. a. O. p. 47.

Thetafunktionen n^{ter} Ordnung, während für jede andere Charakteristik $[\varepsilon]$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \tfrac{1}{2} n^p \text{ linear unabhängige gerade und} \\ \mathfrak{u} &= \tfrac{1}{2} n^p \text{ linear unabhängige ungerade} \end{aligned} \tag{150}$$

solche Funktionen existieren. Ist n ungerade, so gibt es zu gerader Charakteristik $[\varepsilon]$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \tfrac{1}{2}(n^p + 1) \text{ linear unabhängige gerade und} \\ \mathfrak{u} &= \tfrac{1}{2}(n^p - 1) \text{ linear unabhängige ungerade,} \end{aligned} \tag{151}$$

dagegen zu ungerader Charakteristik $[\varepsilon]$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \tfrac{1}{2}(n^p - 1) \text{ linear unabhängige gerade und} \\ \mathfrak{u} &= \tfrac{1}{2}(n^p + 1) \text{ linear unabhängige ungerade} \end{aligned} \tag{152}$$

Thetafunktionen n^{ter} Ordnung.[80])

Eine gerade bzw. ungerade Thetafunktion n^{ter} Ordnung mit der Charakteristik $[\varepsilon]$ läßt sich also aus $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{u}$ linear unabhängigen solchen Funktionen linear zusammensetzen mit Hilfe von Koeffizienten, die von den Variablen u unabhängig sind.

Eine beliebige Thetafunktion n^{ter} Ordnung mit der Charakteristik $[\varepsilon]$ aber kann auf Grund der Gleichung

$$\begin{aligned} \Theta_n[\varepsilon](\!(v)\!) = &\tfrac{1}{2}(\Theta_n[\varepsilon](\!(v)\!) + \Theta_n[\varepsilon](\!(-v)\!)) \\ &+ \tfrac{1}{2}(\Theta_n[\varepsilon](\!(v)\!) - \Theta_n[\varepsilon](\!(-v)\!)) \end{aligned} \tag{153}$$

in die Summe einer geraden und einer ungeraden solchen Funktion zerlegt und daher gleichfalls aus den vorher genannten $\mathfrak{g} + \mathfrak{u} = n^p$ linear unabhängigen geraden und ungeraden zur Charakteristik $[\varepsilon]$ gehörigen Thetafunktionen n^{ter} Ordnung zusammengesetzt werden.

Aus der Gleichung (148) folgt für $(v) = -\{\varkappa\}$

$$\Theta_n[\varepsilon](\!(+\{\varkappa\})\!) = \varkappa^{n \cdot \varepsilon, \varkappa} \cdot \Theta_n[\varepsilon](\!(-\{\varkappa\})\!) \tag{154}$$

und man schließt daraus[81]):

Die geraden Thetafunktionen gerader Ordnung mit der Charakteristik $[\varepsilon]$ verschwinden für alle solchen Systeme $\{\varkappa\}$ korrespondierender Halben der Periodizitätsmodulen, deren Per. Char. $(\varkappa)$ zur Per. Char. (ε) azygetisch ist; die ungeraden für solche, deren Per. Char. $(\varkappa)$ zu (ε) syzygetisch ist.

Für die geraden Thetafunktionen gerader Ordnung mit der Charakteristik $[0]$ sagt der Satz nichts aus; die ungeraden Thetafunktionen gerader Ordnung mit der Charakteristik $[0]$ verschwinden aber für alle Systeme korrespondierender Halben der Periodizitätsmodulen.

---

80) Für $p = 2$ zuerst vollständig bei *Weber*, Math. Ann. 14 (1879), p. 175, für beliebiges p bei *Schottky*, „Abr.“, p. 9.

81) *Humbert*, J. de Math. 9_4 (1893), p. 38.

Die geraden Thetafunktionen ungerader Ordnung verschwinden bei gerader Charakteristik $[\varepsilon]$, sobald $[\varkappa\varepsilon]$ ungerade, und bei ungerader Charakteristik $[\varepsilon]$, sobald $[\varkappa\varepsilon]$ gerade ist; sobald also $[\varepsilon]$ und $[\varkappa\varepsilon]$ von verschiedenem Charakter sind. Die ungeraden Thetafunktionen ungerader Ordnung verschwinden bei gerader Charakteristik $[\varepsilon]$, sobald auch $[\varkappa\varepsilon]$ gerade, und bei ungerader Charakteristik $[\varepsilon]$, sobald auch $[\varkappa\varepsilon]$ ungerade ist, sobald also $[\varepsilon]$ und $[\varkappa\varepsilon]$ von gleichem Charakter sind.

34. Thetarelationen. Die algebraische Mannigfaltigkeit M_p. Ein Produkt $\vartheta[\varepsilon_1](\!(v)\!)\,\vartheta[\varepsilon_2](\!(v)\!)\ldots\vartheta[\varepsilon_n](\!(v)\!)$ von n Thetafunktionen mit den Charakteristiken $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2], \ldots [\varepsilon_n]$, die auch teilweise oder alle einander gleich sein können, ist eine Thetafunktion n^{ter} Ordnung mit der Charakteristik $[\varepsilon_1\,\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n]$. Umgekehrt können auf Grund dessen alle zu einer Charakteristik $[\varepsilon]$ gehörigen Thetafunktionen n^{ter} Ordnung als homogene ganze rationale Funktionen n^{ten} Grades der Funktionen $\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)$ dargestellt werden. Da es nun hierbei zu einer bestimmten Charakteristik $[\varepsilon]$ und einer bestimmten Ordnung n mehr homogene ganze rationale Verbindungen der Thetafunktionen erster Ordnung als linear unabhängige Thetafunktionen von der Ordnung n gibt, so gelangt man zu linearen Beziehungen zwischen jenen (Thetarelationen). Die gleichen Überlegungen gelten, wenn man von Thetafunktionen höherer Ordnung ausgeht, und führen zu dem Satze, daß zwischen $p+2$ Thetafunktionen beliebiger (aber gleicher) Ordnung und beliebiger (aber gleicher) Charakteristik sicher eine algebraische Relation besteht, welche durch Nullsetzen einer aus ihnen gebildeten homogenen ganzen rationalen Funktion gegeben wird.[81a])

Die geraden Thetafunktionen gerader Ordnung von der Charakteristik $[0]$ sind als homogene ganze rationale Funktionen der Quadrate von 2^p Thetafunktionen erster Ordnung darstellbar, wenn nur diese 2^p Thetaquadrate linear unabhängig sind.[82]) Man kann ferner jeden $2p$-fach periodischen Thetaquotienten auf die Form $\Phi + \Psi\sqrt{X}$ bringen, wo Φ, Ψ, X homogene rationale Funktionen 0^{ten}, -2^{ten}, 4^{ten} Grades der vorhergenannten 2^p Thetaquadrate bedeuten. Daraus folgt, daß die algebraischen Gleichungen zwischen den Thetaquadraten eine geeignete Grundlage für die Untersuchung des Körpers der zugehörigen

81a) Über den Grad dieser Gleichung siehe *Poincaré,* J. de Math. 1_5 (1895), p. 226.

82) *Frobenius* [J. f. Math. 96 (1884), p. 106] hat ohne Beweis angegeben, daß 2^p Thetaquadrate, deren Charakteristiken ein System von Th. Char. (Nr. **29**) bilden, linear unabhängig sind; für *Göpel*sche Systeme zeigt es auch *Krazer,* „Thetaf.“, p. 365.

$2p$-fach periodischen Funktionen geben. Diese Gleichungen bilden in ihrer Gesamtheit einen Modul, dessen charakteristische Funktion im Sinne *Hilberts*[83]) durch

$$\chi^{(m)} = 2^{p-1}(1 + m^p) \tag{155}$$

gegeben ist, wenn m den Grad der Gleichung bedeutet. Die Gleichungen geraden Grades des Moduls sind sämtlich rationale Folgerungen derjenigen vierten Grades.

Setzt man die 2^p linear unabhängigen Thetaquadrate proportional den homogenen Punktkoordinaten eines Raumes von $2^p - 1$ Dimensionen, so wird in diesem Raume dadurch eine algebraische Mannigfaltigkeit von p Dimensionen definiert, welche mit M_p bezeichnet werden soll und welche durch die Relationen vierten Grades zwischen den 2^p Thetaquadraten vollständig definiert ist. Sie ist von der Ordnung $p!\,2^{p-1}$ und ist eine Verallgemeinerung der *Kummer*schen Fläche, in welche sie für $p = 2$ übergeht (s. Nr. 68) und deren wesentliche Eigenschaften, insbesondere hinsichtlich ihrer Kollineationen und Korrelationen, bei ihr wiederkehren.

Jedem Wertesysteme (v) entspricht ein und nur ein Punkt von M_p; jedoch umgekehrt einem Punkte von M_p unendlich viele Wertesysteme (v), welche alle in der Form

$$\pm v_\mu + \sum_{\nu=1}^{p} \varkappa_\nu a_{\mu\nu} + \lambda_\mu \pi i, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p)$$

enthalten sind, wo die $\varkappa$ und λ beliebige ganze Zahlen bezeichnen. Von den (v) wird also M_p (abgesehen von ganzen Vielfachen der Perioden) zusammenhängend doppelt überdeckt, indem (v) und $(-v)$ die nämliche Stelle liefern. Die beiden Überdeckungen bilden zusammen eine geschlossene, relativ zu M_p unverzweigte Mannigfaltigkeit, können aber in der Umgebung jeder nicht singulären Stelle gesondert werden; dazu kann u. a. jede ungerade Thetafunktion verwendet werden.

Die M_p hat bei allgemeinen $a_{\mu\nu}$ keine anderen singulären Stellen als diejenigen, welche den 2^{2p} Systemen korrespondierender Halben der Periodizitätsmodulen entsprechen; diese erweisen sich als 2^{p-1}-fache Punkte von M_p.

Setzt man ein beliebiges Thetaquadrat gleich Null, so wird dadurch aus M_p eine Mannigfaltigkeit von $p - 1$ Dimensionen herausgegriffen, deren Ordnung $p!\,2^{p-2}$ ist und die doppelt gezählt der vollständige Schnitt von M_p mit einer linearen Mannigfaltigkeit R_{2p-2}

83) *Hilbert*, Math. Ann. 36 (1890), p. 479.

ist. Setzt man zur Abkürzung $2^p - 1 = N$, $p!\,2^{p-1} = m$ und nimmt die Ordnungszahl in die Bezeichnung der Mannigfaltigkeit als oberen Index auf, so besitzt M_p^m, den 16 längs Kegelschnitten berührenden ausgezeichneten Ebenen einer *Kummer*schen Fläche entsprechend, 2^{2p} längs einer $M_{p-1}^{m:2}$ berührende R_{N-1}. Und den bei den *Kummer*schen Flächen auftretenden Konfigurationen $(16)_6$ analog bilden hier die 2^{2p} singulären Punkte der M_p mit den eben genannten singulären R_{N-1} eine Konfiguration $(2^{2p})_{2^{p-1}(2^p-1)}$ derart, daß je $2^{p-1}(2^p-1)$ der 2^{2p} Punkte auf einer der R_{N-1} liegen und je $2^{p-1}(2^p-1)$ der 2^{2p} R_{N-1} durch einen der Punkte hindurchgehen.

Endlich geht die M_p, wie die *Kummer*sche Fläche, durch 2^{2p} Kollineationen, die eine Gruppe bilden, in sich über und ebenso durch 2^{2p} Korrelationen, von denen $u_p = 2^{p-1}(2^p-1)$ Nullsysteme und $g_p = 2^{p-1}(2^p+1)$ Polarsysteme sind.

Ein vollständiger Schnitt der M_p mit $p-1$ algebraischen Mannigfaltigkeiten von $2^r - 2$ Dimensionen hat im allgemeinen das Geschlecht

$$\pi = p!\,2^{p-2} n_1 n_2 \ldots n_{p-1} \sum_{i=1}^{p-1} n_i + 1, \tag{156}$$

wo $n_1, n_2, \ldots n_{p-1}$ die Ordnungen der schneidenden Mannigfaltigkeiten sind; im Falle, daß alle $n = 1$ sind, ist also

$$\pi = p!\,2^{p-2}(p-1) + 1. \tag{157}$$

Jede geschlossene Kurve auf der M_p führt entweder schon nach einmaliger Durchlaufung zu den Anfangswerten der v zurück (abgesehen von ganzen Perioden) oder erst nach zweimaliger. Das erstere tritt jedenfalls immer dann ein, wenn die beiden Überdeckungen der M_p mit den v längs der gezogenen Kurve völlig getrennt verlaufen, diese also durch keinen singulären Punkt der M_p hindurchgeht. Die Entscheidung kann auf algebraischem Wege in jedem Falle durch irgendeine ungerade Thetafunktion oder die früher eingeführte Form $\sqrt{X}$ getroffen werden.

Die Ordnung einer algebraischen Kurve auf der M_p ist im ersten Falle stets von der Form $2mp$, im zweiten Falle von der Form mp, wo m eine bestimmte ganze, für die Kurve charakteristische Zahl ist. Im ersten Falle soll die Kurve selbst, im zweiten Falle dagegen jenes Gebilde, welches außer den algebraischen Formen auf der Kurve auch noch die Form $\sqrt{X}$ enthält, als Gebilde G auf der M_p bezeichnet werden.

Dieses algebraische Gebilde G von einer Dimension ist dann von der Ordnung $2mp$; auf ihm sind die v unverzweigte allenthalben

endliche Funktionen, die sich beim Durchlaufen geschlossener Wege nur um additive Konstanten ändern, also Integrale 1. Gattung. Das Geschlecht q von G ist also im allgemeinen $> p$; G ist aber von spezieller Art, da es auf ihm Systeme von p Integralen 1. Gattung gibt, deren Perioden sich aus den $2p$ Thetaperioden ganzzahlig zusammensetzen. Umgekehrt gibt jedes algebraische Gebilde, auf welchem p solche Integrale 1. Gattung existieren, durch Einsetzen derselben für die Argumente v in die Thetafunktionen ein Gebilde G auf der M_p.

Damit ist der Zusammenhang der allgemeinen Thetafunktionen von p Veränderlichen mit speziellen algebraischen Gebilden höheren Geschlechts hergestellt; von diesem wird später weiter die Rede sein (s. Nr. **114** u. **118**).

Das Gebilde M_p wurde erstmals von *Klein* in einer Vorlesung vom W. S. 1886/87[84]) in Betracht gezogen und im Anschlusse daran zuerst für den Fall $p = 3$ und sodann für beliebiges p von *Wirtinger*[85]) näher behandelt. Seine Verknüpfung mit einem eindimensionalen algebraischen Gebilde G rührt von *Wirtinger* her.[86])

Wirtinger hat die Aufgabe gestellt, in ähnlicher Weise die algebraischen Relationen zu untersuchen, welche zwischen den Nullwerten der geraden Thetafunktionen bestehen. Auch ihre Gesamtheit bildet einen Modul und dieser definiert eine algebraische Mannigfaltigkeit von $\frac{1}{2}p(p+1)$ Dimensionen, die entsteht, wenn man die Modulen a alle mit der Konvergenzbedingung verträglichen Werte annehmen läßt.

Endlich kann man aber auch nach dem Modul jener Relationen fragen, welche zwischen den Thetaquadraten bestehen, wenn man diese als Funktionen sämtlicher Größen v und a betrachtet. Die Formen dieses Moduls, der aber erst für $p \geqq 4$ zustande kommt, besitzen rein numerische Koeffizienten und definieren eine algebraische Mannigfaltigkeit von $p + \frac{1}{2}p(p+1) = \frac{1}{2}p(p+3)$ Dimensionen.

35. Additionstheoreme der Thetaquotienten. Das Produkt $\vartheta[\varkappa](u+v)\,\vartheta[\lambda](u-v)$ ist als Funktion der Variablen u betrachtet eine Thetafunktion zweiter Ordnung mit der Charakteristik $[\varkappa\lambda]$ und daher linear und homogen durch 2^p linearunabhängige solche Funktionen z. B. durch 2^p linearunabhängige Thetaprodukte $\vartheta[\varepsilon_\mu](u)\,\vartheta[\varkappa\lambda\varepsilon_\mu](u)$ $(\mu = 1, 2, \ldots 2^p)$ darstellbar. Da das gleiche auch in bezug auf die Variablen v gilt, so schließt man, daß sich das eingangs genannte Produkt in der Gestalt

84) Vgl. *Reichardt*, N. Acta Leop. 50 (1887), Nachtrag p. 483.
85) Gött. Nachr. 1889, p. 474, Monatsh. f. Math. 1 (1890), p. 113.
86) „Thetaf.“, Acta math. 26 (1902), p. 144.

$$(158)\qquad \vartheta[\varkappa](\!(u+v)\!)\,\vartheta[\lambda](\!(u-v)\!) = \sum_{\mu=1}^{2^p}{\sum_{\nu=1}^{2^p}}' c_{\mu\nu}\,\vartheta[\varepsilon_\mu](\!(u)\!)\,\vartheta[\varkappa\lambda\varepsilon_\mu](\!(u)\!)\,\vartheta[\eta_\nu](\!(v)\!)\,\vartheta[\varkappa\lambda\eta_\nu](\!(v)\!)$$

durch die Funktionen $\vartheta[\varepsilon](\!(u)\!)$, $\vartheta[\eta](\!(v)\!)$ darstellen läßt. Die Bestimmung der von den Variablen u, v unabhängigen Koeffizienten $c_{\mu\nu}$ kann geschehen, indem man in (158) an Stelle dieser Variablen Systeme zusammengehöriger Halben der Periodizitätsmodulen einführt; sie ergeben sich dann als rationale Funktionen — 2^{ten} Grades der Thetanullwerte $\vartheta[\varepsilon](\!(0)\!)$. Wenn man zwei Produkte $\vartheta[\varkappa](\!(u+v)\!)\,\vartheta[\lambda](\!(u-v)\!)$ und $\vartheta[\varkappa_0](\!(u+v)\!)\,\vartheta[\lambda](\!(u-v)\!)$ in dieser Weise darstellt und die beiden Gleichungen durcheinander dividiert, auch noch auf der rechten Seite Zähler und Nenner durch $\vartheta^2[\varkappa_0](\!(u)\!)\,\vartheta^2[\varkappa_0](\!(v)\!)$ dividiert, erhält man ein reines Additionstheorem für Thetaquotienten, indem $\frac{\vartheta[\varkappa](\!(u+v)\!)}{\vartheta[\varkappa_0](\!(u+v)\!)}$ rational durch Quotienten $\frac{\vartheta[\varepsilon](\!(u)\!)}{\vartheta[\varkappa_0](\!(u)\!)}$ und $\frac{\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)}{\vartheta[\varkappa_0](\!(v)\!)}$ ausgedrückt erscheint.

36. Die Riemannsche Thetaformel. *Rosenhain* (s. Nr. 6) hat, wie es *Jacobi* in seiner Vorlesung über die elliptischen Funktionen getan hatte, die sämtlichen Thetarelationen, deren er bei seinen Untersuchungen über die Umkehrung der ultraelliptischen Integrale bedurfte, einschließlich der Additionstheoreme ihrer Quotienten, aus einer einzigen allgemeinen Formel zwischen Produkten von je 4 Thetafunktionen abgeleitet. Die entsprechende Formel für beliebiges p hat *Riemann*[87]) aufgestellt und 1865 *Prym* mitgeteilt, der sie deshalb die *Riemann*sche Thetaformel genannt und von ihr gezeigt hat, daß sie in der Tat im Falle eines beliebigen p die gleichen Dienste leisten könne, die sie *Rosenhain* im Falle $p = 2$ geleistet hat[88]).

87) Ges. math. W. Nachtr. (1902), p. 98.

88) *Prym*, „Riem. Thetaf.“, auch J. f. Math. 93 (1882), p. 124; Acta math. 3 (1883), p. 201. Unabhängig von *Riemann* wurde die *Riemann*sche Thetaformel 1879 von *H. St. Smith* [Lond. M. S. Proc. 10 (1879), p. 91 = Coll. math. pap. 2 (1894), p. 279] und 1880 von *Frobenius* [J. f. Math. 89 (1880), p. 210] aufgestellt; vgl. auch *Capelli*, Acc. Linc. Rend. 14_5 (1905), II, p. 59. Ableitung von Relationen zwischen den Nullwerten der geraden Thetafunktionen beliebig vieler Variablen aus der *Riemann*schen Thetaformel bei *Hutchinson*, Amer. M. S. Trans. 1 (1900), p. 391.

Caspary (J. f. Math. 97 (1884), p. 165) leitet die auf einer *Göpel*schen Gruppe beruhende halbe Umkehrung (163) ab, indem er sie mit Hilfe einer Transformation zweiter Ordnung in eine identische Gleichung zwischen Thetafunktionen mit den Modulen $2a$ überführt.

Caspary hat (Math. Ann. 28 (1887), p. 496, Paris C. R. 104 (1887), p. 1255) zuerst darauf hingewiesen, daß analoge Formeln auch für Produkte von 6 Thetafunktionen bestehen, und *Krazer* und *Prym* („N. G.“, p. 51) haben gezeigt, wie

Sind die Variablen $v_\mu^{(\nu)} \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, 3, 4 \\ \mu = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix}$ mit den Variablen $u_\mu^{(\nu)}$ verknüpft durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2v_\mu^{(1)} &= u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} + u_\mu^{(3)} + u_\mu^{(4)}, \\ 2v_\mu^{(2)} &= u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(3)} - u_\mu^{(4)}, \\ 2v_\mu^{(3)} &= u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(2)} + u_\mu^{(3)} - u_\mu^{(4)}, \\ 2v_\mu^{(4)} &= u_\mu^{(1)} - u_\mu^{(2)} - u_\mu^{(3)} + u_\mu^{(4)} \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{159}$$

und setzt man

$$\begin{aligned} x_{[\varepsilon]} &= \vartheta[\varepsilon](v^{(1)})\,\vartheta[\varepsilon + \varrho](v^{(2)})\,\vartheta[\varepsilon + \sigma](v^{(3)})\,\vartheta[\varepsilon - \varrho - \sigma](v^{(4)}), \\ y_{[\eta]} &= \vartheta[\eta](u^{(1)})\,\vartheta[\eta + \varrho](u^{(2)})\,\vartheta[\eta + \sigma](u^{(3)})\,\vartheta[\eta - \varrho - \sigma](u^{(4)}), \end{aligned} \tag{160}$$

so bestehen zwischen den Größen x und y die Gleichungen

$$2^p y_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} |\varepsilon, \eta|\, x_{[\varepsilon]}, \tag{161}$$

bei denen die Summation über alle 2^{2p} Th. Char. $[\varepsilon]$ auszudehnen ist und $[\eta]$ eine beliebige Th. Char., (ϱ), (σ) aber beliebige Per. Char. bezeichnen.

Denkt man sich die Per. Char. (ϱ), (σ) festgehalten und läßt an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die 2^{2p} Th. Char. treten, so entsteht ein System S von 2^{2p} Gleichungen, welche alle auf ihren rechten Seiten die nämlichen 2^{2p} Größen $x_{[\varepsilon]}$ haben; aus den 2^{2p} Gleichungen dieses Systems S können auf folgende Weise durch lineare Verbindung neue Gleichungen zwischen den Größen x und y abgeleitet werden.

Sind $(a_0), (a_1), \ldots (a_{r-1})$ die $r = 2^m$ Per. Cher. einer beliebigen Gruppe A vom Range m, $(b_0), (b_1), \ldots (b_{s-1})$ die $s = 2^{2p-m}$ Per. Char. der zu A adjungierten Gruppe B (Nr. 28) und bezeichnen $[\eta]$ und $[\xi]$ irgend zwei Th. Char., so ist

$$2^{p-m} \sum_{\varrho=0}^{r-1} |\xi, a_\varrho|\, y_{[\eta a_\varrho]} = |\xi, \eta| \sum_{\sigma=0}^{s-1} |\eta, b_\sigma|\, x_{[\xi b_\sigma]}, \tag{162}$$

woraus insbesondere für $m = p$ die „halbe Umkehrung“ der *Riemann*schen Thetaformel

man die *Riemann*sche Thetaformel auf Produkte einer beliebigen geraden Anzahl von Thetafunktionen ausdehnen kann.

Eine Ausdehnung seiner dreigliedrigen Sigmaformel auf den Fall $p > 1$ hat *Weierstraß*, Berlin Ber. 1882, p. 505 = Math. W. 3 (1903), p. 155 gegeben, vgl. dazu *Caspary*, J. f. Math. 96 (1884), p. 182 und weiter *Frobenius*, ebd. p. 101 und *Caspary*, p. 324.

$$(163)\qquad \sum_{\varrho=0}^{2^p-1} |\xi,\ a_\varrho|\, y_{[\eta a_\varrho]} = |\xi,\ \eta|\sum_{\sigma=0}^{2^p-1} |\eta,\ b_\sigma|\, x_{[\xi b_\sigma]}$$

hervorgeht. Ist dabei die Gruppe A eine *Göpel*sche, so fällt die Gruppe B mit ihr zusammen.

Ist die Gruppe A eine syzygetische, so lassen sich die 2^{2p-m} Per. Char. der adjungierten Gruppe B in die Gestalt $(a_\mu b_\nu)$ $(\mu = 1, 2, \ldots 2^m;$ $\nu = 1, 2, \ldots 2^{2p-2m})$ bringen, wo die 2^{2p-2m} Per. Char. (b_ν) selbst eine Gruppe vom Range $2(p-m)$ bilden, deren Charakteristiken dadurch definiert sind, daß sie von den 2^m Per. Char. (a_μ) verschieden, aber zu ihnen allen syzygetisch sind. Setzt man dann

$$(164)\qquad \begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{2^m} |\eta,\ a_\mu b_\nu|\, x_{[\xi a_\mu b_\nu]} &= X_{[b_\nu]}, \\ |\eta,\ \xi|\sum_{\mu=1}^{2^m} |\xi,\ a_\mu b_\nu|\, y_{[\eta a_\mu b_\nu]} &= Y_{[b_\nu]}, \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots 2^{2(p-m)}$$

so sind die $2^{2(p-m)}$ Größen X und die $2^{2(p-m)}$ Größen Y durch die nämlichen Systeme linearer Gleichungen miteinander verknüpft, wie die dem Falle $p-m$ entsprechenden, ebensovielen Größen x, y.

Es lassen sich also auf mannigfache Art $2^{2(p-m)}$ Aggregate von Produkten von je 4 Thetafunktionen von p Veränderlichen bilden, zwischen denen dieselben linearen Gleichungen bestehen wie zwischen einzelnen Produkten von je 4 Thetafunktionen von $p-m$ Veränderlichen.[89])

37. Das Additionstheorem der allgemeinen Thetafunktionen für $p \geqq 3$. Es seien

$$[\alpha_0],\ [\alpha_1],\ \ldots\ [\alpha_7],\quad [\beta_1],\ \ldots\ [\beta_{p-3}],\quad [\gamma_1],\ \ldots\ [\gamma_{p-3}]$$

die $2p+2$ Th. Char. eines F. S. (Nr. 27), $[n]$ die Summe der ungeraden unter ihnen und $[\varkappa] = [n\beta_1 \ldots \beta_{p-3}]$; es seien ferner $(l_0), (l_1), \ldots (l_{r-1})$ die $r = 2^{p-3}$ Per. Char. jener Gruppe, welche sich auf den $p-3$ Basischarakteristiken $(\beta_1\gamma_1), \ldots (\beta_{p-3}\gamma_{p-3})$ aufbaut; es sei endlich $[\omega]$ eine beliebige Th. Char. Bezeichnet man dann mit $x_{[\varepsilon]}$, $y_{[\eta]}$ die Ausdrücke

$$(165)\qquad \begin{aligned} x_{[\varepsilon]} &= \vartheta[\varepsilon](u)\,\vartheta[\varepsilon+\varrho](v)\,\vartheta[\varepsilon+\sigma](w)\,\vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma](-u-v-w) \\ y_{[\eta]} &= \vartheta[\eta](0)\,\vartheta[\eta+\varrho](u+v)\,\vartheta[\eta+\sigma](u+w)\,\vartheta[\eta-\varrho-\sigma](-v-w), \end{aligned}$$

89) Auf diese Analogie der Thetarelationen im Falle eines beliebigen p mit solchen zu niedrigeren p gehörigen hat zuerst *Frobenius*, J. f. Math. 96 (1884), p. 94 aufmerksam gemacht; sodann besonders *Schottky*, Acta math. 27 (1903), p. 245, endlich *Jung*, J. f. Math. 128 (1905), p. 78; weiteres darüber in Nr. 91.

so sind diese Größen miteinander verknüpft durch die Gleichungen

$$(166) \qquad \sum_{\varrho=0}^{r-1} |\omega\alpha_0, l_\varrho|\, y_{[\varkappa l_\varrho]} = \sum_{\mu=0}^{7}\sum_{\varrho=0}^{r-1} |\varkappa, \omega\alpha_\mu l_\varrho|\, x_{[\omega\alpha_\mu l_\varrho]}.$$

Im Grenzfalle $p = 3$ fallen die Th. Char. $[\beta]$ und $[\gamma]$ und also auch die Gruppe (l) weg und die Formel nimmt die einfachere Gestalt

$$(167) \qquad y_{[\varkappa]} = \sum_{\mu=0}^{7} |\varkappa, \omega\alpha_\mu|\, x_{[\omega\alpha_\mu]}$$

an, in der also $[\alpha_0], [\alpha_1], \ldots [\alpha_7]$ die 8 Th. Char. eines F. S. sind, $[\varkappa]$ die Summe der ungeraden unter ihnen und $[\omega]$ eine beliebige Th. Char. bezeichnet.

Aus der Formel (166) können Additionstheoreme für die Thetaquotienten folgendermaßen abgeleitet werden. Man setze $(w) = (-u)$; vermehrt man sodann die Per. Char. (ϱ) der Reihe nach um die $r = 2^{p-3}$ Per. Char. $(l_0), (l_1), \ldots (l_{r-1})$, so entstehen aus der obigen r Gleichungen, deren linke Seiten lineare Funktionen der nämlichen r Thetaprodukte sind und welche nach jedem einzelnen dieser Produkte aufgelöst werden können. Durch Division zweier solcher Gleichungen, von denen die eine die Funktion $\vartheta[\varepsilon](u+v)$, die andere die Funktion $\vartheta[\eta](u+v)$ enthält, während daneben in beiden Gleichungen die nämliche Funktion $\vartheta[\zeta](u-v)$ auftritt, erhält man ein Additionstheorem für den Thetaquotienten $\frac{\vartheta[\varepsilon](u)}{\vartheta[\eta](u)}$.[90])

38. Weitere Folgerung aus der Riemannschen Thetaformel. Zur Aufstellung der zwischen den 2^{2p} Funktionen $\vartheta[\varepsilon](v)$ bestehenden Thetarelationen dient auch folgende Formel, die gleichfalls ohne Mühe aus der *Riemann*schen Thetaformel abgeleitet wird.

Es seien

$$[\alpha_0], [\alpha_1], \ldots [\alpha_5], [\beta_1], \ldots [\beta_{p-2}], [\gamma_1], \ldots [\gamma_{p-2}]$$

die $2p+2$ Th. Char. eines F. S., $[\varkappa]$ die Summe der ungeraden unter ihnen und $[\varkappa] = [\varkappa\beta_1 \ldots \beta_{p-2}]$; es seien ferner $(l_0), (l_1), \ldots (l_{r-1})$ die $r = 2^{p-2}$ Per. Char. jener Gruppe, welche sich auf den $p-2$ Basischarakteristiken $(\beta_1\gamma_1), \ldots (\beta_{p-2}\gamma_{p-2})$ aufbaut; es sei endlich $[\omega]$ eine

90) Nachdem die auf den Fall $p = 3$ bezügliche Formel (167) schon vorher von *Weber* [„$p = 3$“, p. 35] mitgeteilt worden war, wurde die allgemeine Formel (166) ziemlich gleichzeitig von *Stahl* [J. f. Math. 88 (1880), p. 127], *Noether* [Math. Ann. 16 (1880), p. 319 auch Erl. Ber. 12 (1880), p. 1] und *Frobenius* [J. f. Math. 89 (1880), p. 216] angegeben; die Ableitung aus der *Riemann*schen Thetaformel bei *Prym*, „Riem. Thetaf.“, p. 99.

beliebige Th. Char. Bezeichnet man dann mit $x_{[\varepsilon]}$ den Ausdruck

(168) $x_{[\varepsilon]} = \vartheta[\varepsilon](u)\vartheta[\varepsilon+\varrho](v)\vartheta[\varepsilon+\sigma](w)\vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma](-u-v-w)$,

so sind diese Größen miteinander verknüpft durch die Gleichungen

$$(169)\quad 2\sum_{\varrho=0}^{r-1} |\varkappa\alpha_0,\ \varkappa\alpha_0 l_\varrho|\, x_{[\omega\varkappa\alpha_0 l_\varrho]} = \sum_{\mu=0}^{5}\sum_{\varrho=0}^{r-1} |\varkappa\alpha_0,\ \varkappa\alpha_\mu l_\varrho|\, x_{[\omega\varkappa\alpha_\mu l_\varrho]}.$$

Im Grenzfalle $p=2$ fallen die Th. Char. $[\beta]$ und $[\gamma]$ und also auch die Gruppe (l) weg und die Formel (169) geht, wenn man die 6 ungeraden Th. Char. mit $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, ... $[\omega_6]$ und eine beliebige Th. Char. mit $[\varkappa]$ bezeichnet, in

$$(170)\qquad 2x_{[\varkappa\omega_1]} = \sum_{\mu=1}^{6} |\omega_1,\ \omega_\mu|\, x_{[\varkappa\omega_\mu]} \qquad \text{über.}^{91})$$

V. Die allgemeinen Thetafunktionen mit r^{tel} Charakteristiken.

39. Die Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(v)$. Sind die Charakteristikenelemente g, h einer Thetafunktion rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner r, ist also

$$(171)\qquad g_\mu = \frac{\varepsilon_\mu}{r}, \qquad h_\mu = \frac{\varepsilon'_\mu}{r}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p)$$

wo die ε, ε' ganze Zahlen bezeichnen, so werde die Charakteristik mit $[\varepsilon]_r$, die zugehörige Thetafunktion mit $\vartheta[\varepsilon]_r(v)$ bezeichnet.

Die Funktion $\vartheta[\varepsilon]_r(v)$ ist dann definiert durch die Gleichung

$$(172)\quad \vartheta[\varepsilon]_r(v) = \sum_{m_1,\cdots m_p}^{-\infty,\cdots+\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu+\frac{\varepsilon_\mu}{r}\right)\left(m_{\mu'}+\frac{\varepsilon_{\mu'}}{r}\right)+2\sum_{\mu=1}^{p}\left(m_\mu+\frac{\varepsilon_\mu}{r}\right)\left(v_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{r}\pi i\right)}$$

und ist mit der Funktion $\vartheta(v)$ verknüpft durch die Gleichung

$$(173)\quad \vartheta[\varepsilon]_r(v) = \vartheta\left(v_1+\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\varepsilon_\mu}{r}a_{1\mu}+\frac{\varepsilon'_1}{r}\pi i, \cdots | v_p+\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\varepsilon_\mu}{r}a_{p\mu}+\frac{\varepsilon'_p}{r}\pi i\right)$$
$$\cdot e^{\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}\frac{\varepsilon_\mu\varepsilon_{\mu'}}{r^2}+2\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\varepsilon_\mu}{r}\left(v_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{r}\pi i\right)},$$

d. h. sie geht abgesehen von einem Exponentialfaktor aus der Funktion $\vartheta(v)$ hervor, wenn man deren Argumentensystem (v) um das System

91) Die Formel (169) ist von *Prym* („Riem. Thetaf.", p. 106) aufgestellt worden, nachdem *Krazer* („$p=2$") sie im speziellen Falle $p=2$ angegeben und gezeigt hatte, daß die sämtlichen Beziehungen zwischen den 16 Thetafunktionen zweier Veränderlichen aus ihr abgeleitet werden können.

$$(174)\qquad \{\varepsilon\}_r = \sum_{\mu=1}^{p} \frac{\varepsilon_\mu}{r} a_{1\mu} + \frac{\varepsilon_1'}{r}\pi i \,|\cdots|\, \sum_{\mu=1}^{p} \frac{\varepsilon_\mu}{r} a_{p\mu} + \frac{\varepsilon_p'}{r}\pi i$$

zusammengehöriger r^{tel} der Periodizitätsmodulen mit der Per. Char. $(\varepsilon)_r$ vermehrt. So entspricht der Th. Char. $[\varepsilon]_r$ also die Per. Char. $(\varepsilon)_r$, wenn man $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ relativ gegen $\vartheta(\!(v)\!)$ betrachtet.

Die durch die Gleichung (172) definierte Thetafunktion $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ genügt den $2p$ Gleichungen

$$(175)\qquad \vartheta[\varepsilon]_r(v_1|\cdots|v_\nu + \pi i|\cdots|v_p) = \vartheta[\varepsilon]_r(\!(u)\!)\, e^{\frac{2\varepsilon_\nu \pi i}{r}},$$

$$(176)\qquad \vartheta[\varepsilon]_r(v_1 + a_{1\nu}|\cdots|v_p + a_{p\nu}) = \vartheta[\varepsilon]_r(\!(u)\!)\, e^{-a_{\nu\nu} - 2v_\nu - \frac{2\varepsilon_\nu' \pi i}{r}}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots p)$$

oder, was dasselbe sagt, bei beliebigen ganzzahligen $\varkappa, \varkappa'$ der Gleichung

$$(177)\qquad \vartheta[\varepsilon]_r(\!(v + \{r\varkappa\}_r)\!) = \vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)\, e^{-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'} - 2\sum_{\mu=1}^{p}\varkappa_\mu v_\mu + \frac{2}{r}\sum_{\mu=1}^{p}(\varepsilon_\mu\varkappa_\mu' - \varepsilon_\mu'\varkappa_\mu)\pi i},$$

in welcher $\{r\varkappa\}_r$ jenes System zusammengehöriger Ganzen der Periodizitätsmodulen bezeichnet, welches aus (174) für $\varepsilon_\mu = r\varkappa_\mu$, $\varepsilon_\mu' = r\varkappa_\mu'$ $(\mu = 1, 2, \ldots p)$ hervorgeht.

Endlich genügt die Funktion $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ den Gleichungen

$$(178)\qquad \vartheta[\varepsilon + r\varkappa]_r(\!(v)\!) = \vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)\, e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_{\mu=1}^{p}\varepsilon_\mu\varkappa_\mu'},$$

$$(179)\qquad \vartheta[\varepsilon]_r(\!(v + \{\eta\}_r)\!) = \vartheta[\varepsilon + \eta]_r(\!(v)\!)\, e^{-\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}\frac{\eta_\mu\eta_{\mu'}}{r^2} - 2\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\eta_\mu}{r}\left(v_\mu + \frac{\varepsilon_\mu' + \eta_\mu'}{r}\pi i\right)}$$

$$(180)\qquad \vartheta[\varepsilon]_r(\!(-v)\!) = \vartheta[-\varepsilon]_r(\!(v)\!).$$

Die Formel (178) sagt aus, daß zwei Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ und $\vartheta[\eta]_r(\!(v)\!)$, für welche die Charakteristikenelemente $\varepsilon, \varepsilon'$ und η, η' den $2p$ Kongruenzen

$$(181)\qquad \varepsilon_\mu \equiv \eta_\mu, \quad \varepsilon_\mu' \equiv \eta_\mu' \pmod r \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p)$$

genügen, nur um einen Faktor, der eine r^{te} Einheitswurzel ist, voneinander verschieden sind, und man schließt daraus, daß es im ganzen überhaupt nur r^{2p} wesentlich verschiedene Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ gibt, als welche man diejenigen wählen kann, bei denen die $\varepsilon, \varepsilon'$ nur die Werte $0, 1, \ldots r-1$ besitzen.

Die Formel (179) zeigt weiter, daß man von jeder dieser r^{2p} Funktionen zu jeder anderen von ihnen, abgesehen von einem Exponential-

faktor, gelangen kann, indem man ihr Argumentensystem (v) um ein passend gewähltes System zusammengehöriger r^{tel} der Periodizitätsmodulen vermehrt. Dadurch erscheinen die r^{2p} Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ untereinander gleichberechtigt.

Die Formel (180) endlich zeigt, daß sich die Funktion $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(-v)\!)$ stets aber auch nur dann von der Funktion $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ nur um einen konstanten Faktor unterscheidet, wenn die beiden Charakteristiken $[\varepsilon]_r$ und $[-\varepsilon]_r$ einander kongruent sind, also $[2\varepsilon]_r \equiv [0]$ ist. Dieser Fall kommt, wenn r gerade ist, unter den r^{2p} Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ 2^{2p}-mal vor und liefert bekanntlich $2^{p-1}(2^p+1)$ gerade, $2^{p-1}(2^p-1)$ ungerade Funktionen. Die $r^{2p} - 2^{2p}$ übrigen und ebenso im Falle eines ungeraden r die sämtlichen $r^{2p} - 1$ von $\vartheta[0](\!(v)\!)$ verschiedenen Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ gehen gemäß der Formel (180), abgesehen von einem Exponentialfaktor, der eine r^{te} Einheitswurzel ist, paarweise ineinander über, wenn man das Argumentensystem (v) in $(-v)$ verwandelt.

40. Periodencharakteristiken $(\varepsilon)_r$. Sind $\omega_{1\alpha}, \ldots \omega_{p\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots 2p)$ die $2p$ Periodensysteme einer *Abel*schen Funktion und die ε, ε' ganze Zahlen, so nennt man ein Größensystem von der Form

$$(182)\quad \frac{1}{r}\sum_{\nu=1}^{p}(\varepsilon_\nu \omega_{1\nu} + \varepsilon_\nu' \omega_{1,p+\nu}),\ \ldots\ \frac{1}{r}\sum_{\nu=1}^{p}(\varepsilon_\nu \omega_{p\nu} + \varepsilon_\nu' \omega_{p,p+\nu})$$

ein System zusammengehöriger r^{tel} der Perioden, den Komplex der $2p$ Zahlen ε, ε' aber seine Per. Char. $(\varepsilon)_r$.

Zwei Systeme (182), bei denen die Charakteristikenelemente ε, ε' und η, η' den $2p$ Kongruenzen (181) genügen, sind einander kongruent nach den Perioden; zwei solche Per. Char. $(\varepsilon)_r$ und $(\eta)_r$ werden im folgenden als nicht verschieden angesehen. Es gibt dann im ganzen nur r^{2p} verschiedene Per. Char. $(\varepsilon)_r$, als welche man diejenigen wählen kann, bei denen die Zahlen ε, ε' nur die Werte $0, 1, \ldots r-1$ haben.

Durch jede lineare ganzzahlige Transformation (39) geht ein System zusammengehöriger r^{tel} der Perioden ω mit der Per. Char. $(\varepsilon)_r$ in ein System zusammengehöriger r^{tel} der Perioden ω' über, dessen Per. Char. $(\bar{\varepsilon})_r$ in ihren Elementen $\bar{\varepsilon}_\mu$, $\bar{\varepsilon}'_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots p)$ durch die Kongruenzen

$$(183)\quad \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_\mu &\equiv \sum_{\nu=1}^{p}(c_{\mu\nu}\varepsilon_\nu + c_{\mu,p+\nu}\varepsilon_\nu') \pmod r, \\ \bar{\varepsilon}'_\mu &\equiv \sum_{\nu=1}^{p}(c_{p+\mu,\nu}\varepsilon_\nu + c_{p+\mu,p+\nu}\varepsilon_\nu') \pmod r \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p)$$

bestimmt ist. Man sagt dann, daß die Per. Char. $(\varepsilon)_r$ durch die Transformation (39) in die Per. Char. $(\bar{\varepsilon})_r$ übergeht. Unter den r^{2p} Per. Char. $(\varepsilon)_r$ nimmt dabei die Per. Char. $(0)_r$, bei der $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_p = \varepsilon_1' = \cdots = \varepsilon_p' = 0$ ist, den $r^{2p} - 1$ anderen gegenüber eine Ausnahmestellung ein, da sie und nur sie bei jeder Transformation in sich übergeht. Man teilt daher die r^{2p} Per. Char. in zwei Klassen; die erste Klasse besteht aus der einzigen Per. Char. (0), welche die uneigentliche Per. Char. genannt wird, die andere aus den $r^{2p} - 1$ übrigen, welche die eigentlichen Per. Char. heißen. Unter der Summe $(\sigma)_r = (\varepsilon\eta\zeta\ldots)_r$ mehrerer Per. Char. $(\varepsilon)_r$, $(\eta)_r$, $(\xi)_r$, ... wird jene Per. Char. verstanden, deren Elemente σ_μ, σ_μ' durch die Kongruenzen

$$(184)\quad \sigma_\mu \equiv \varepsilon_\mu + \eta_\mu + \xi_\mu + \cdots, \quad \sigma_\mu' \equiv \varepsilon_\mu' + \eta_\mu' + \xi_\mu' + \cdots \pmod{r}$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots p)$$

bestimmt sind; dabei können die Per. Char. $(\varepsilon)_r$, $(\eta)_r$, $(\xi)_r$, ... auch teilweise oder alle einander gleich sein und es soll die Summe von g gleichen Per. Char. $(\varepsilon)_r$ mit $(\varepsilon^g)_r$ bezeichnet werden.

Man nennt gegebene Per. Char. $(\varepsilon_1)_r, (\varepsilon_2)_r, \ldots (\varepsilon_m)_r$ unabhängig, wenn die Gleichung $(\varepsilon_1^{g_1}\varepsilon_2^{g_2}\ldots\varepsilon_m^{g_m})_r = (0)$, in der die g positive ganze Zahlen bezeichnen, nur durch $g_1 \equiv g_2 \equiv \cdots \equiv g_m \equiv 0 \pmod{r}$ befriedigt werden kann; man nennt ferner eine aus gegebenen Per. Char. $(\varepsilon_1)_r, (\varepsilon_2)_r, \ldots (\varepsilon_m)_r$ zusammengesetzte Per. Char. $(\varepsilon_1^{g_1}\varepsilon_2^{g_2}\ldots\varepsilon_m^{g_m})_r$, bei der die g positive ganze Zahlen oder Null sind, eine Kombination n^{ter} Ordnung dieser Per. Char., wenn $g_1 + g_2 + \cdots + g_m = n$ ist, und bezeichnet sie mit $\left(\sum^n \varepsilon\right)_r$.[92])

Bezeichnen weiter $(\varepsilon)_r$ und $(\eta)_r$ irgend zwei Per. Char., $(\bar{\varepsilon})_r$ und $(\bar{\eta})_r$ die daraus durch die nämliche lineare ganzzahlige Transformation hervorgehenden, so ist stets

$$(185)\qquad \sum_{\mu=1}^{p} (\bar{\varepsilon}_\mu \bar{\eta}_\mu' - \bar{\varepsilon}_\mu' \bar{\eta}_\mu) \equiv \sum_{\mu=1}^{p} (\varepsilon_\mu \eta_\mu' - \varepsilon_\mu' \eta_\mu) \pmod{r};$$

es bleibt also der Wert des Ausdrucks

92) Man wird bemerken, daß die Definition der Unabhängigkeit von Per. Char., in dem Falle, wo r keine Primzahl ist, schon für jede einzelne Per Char. $(\varepsilon)_r$ eine Bedingung nach sich zieht. Da nämlich die Gleichung $(\varepsilon^g)_r = (0)$ nur durch $g \equiv 0 \pmod{r}$ soll befriedigt werden können, so dürfen die $2p$ Charakteristikenelemente ε, ε' von $(\varepsilon)_r$ mit r keinen Faktor gemeinsam haben; es ist diese Bedingung gleichbedeutend damit, daß die r Per. Char. (0), $(\varepsilon)_r$, $(\varepsilon^2)_r$, ..., $(\varepsilon^{r-1})_r$ alle voneinander verschieden sind.

$$|\varepsilon, \eta| = e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_{\mu=1}^{p}(\varepsilon_\mu \eta'_\mu - \varepsilon'_\mu \eta_\mu)} \tag{186}$$

bei jeder linearen ganzzahligen Transformation ungeändert.

Zwei Per. Char. $(\varepsilon)_r$ und $(\eta)_r$ heißen syzygetisch, wenn

$$|\varepsilon, \eta| = +1$$

ist. Unter den r^{2p} Per. Char. $(x)_r$ gibt es stets r^{2p-q}, welche den Gleichungen

$$|\varepsilon_1, x| = e^{\frac{2\pi i}{r}\delta_1}, \quad |\varepsilon_2, x| = e^{\frac{2\pi i}{r}\delta_2}, \quad \ldots \quad |\varepsilon_q, x| = e^{\frac{2\pi i}{r}\delta_q} \tag{187}$$

genügen, wo die δ willkürlich gegebene ganze Zahlen, $(\varepsilon_1)_r$, $(\varepsilon_2)_r$, ... $(\varepsilon_q)_r$ aber q unabhängige Per. Char. bezeichnen; insbesondere gibt es also stets r^{2p-q} Per. Char., welche zu q gegebenen unabhängigen Per Char. syzygetisch sind.

Alle Kombinationen von q unabhängigen Per. Char. $(\varepsilon_1)_r$, $(\varepsilon_2)_r$, ... $(\varepsilon_q)_r$ bilden zusammen mit der uneigentlichen Per. Char. (0) eine Gruppe E von r^q verschiedenen Per. Char. Die Zahl q heißt der Rang, die Zahl r^q die Ordnung der Gruppe E, die q Per. Char. $(\varepsilon_1)_r$, $(\varepsilon_2)_r$, ... $(\varepsilon_q)_r$ oder irgend q andere unabhängige Per. Char. von E die Basis der Gruppe E.

Die r^{2p-q} zu q unabhängigen Per. Char. $(\varepsilon_1)_r$, $(\varepsilon_2)_r$, ... $(\varepsilon_q)_r$ syzygetischen Per. Char. sind syzygetisch zu allen r^q Per. Char. der Gruppe E und bilden selbst eine Gruppe H vom Range $2p - q$, welche man zur Gruppe E adjungiert nennt. Es ist dann auch E zu H adjungiert.

Diejenigen unter den Per. Char. einer Gruppe E, welche zu den sämtlichen 2^q Per. Char. von E syzygetisch sind, bilden die syzygetische Untergruppe A von E. Die Per. Char. von A gehören immer auch der adjungierten Gruppe H an und es ist A der größte gemeinsame Teiler von E und H. Sind je zwei Per. Char. einer Gruppe syzygetisch, so heißt die Gruppe selbst syzygetisch. Der Rang einer syzygetischen Gruppe kann nicht größer als p sein. Eine syzygetische Gruppe vom Range p heißt eine *Göpel*sche Gruppe. Eine *Göpel*sche Gruppe ist mit ihrer adjungierten Gruppe identisch.

41. Thetacharakteristiken $[\varepsilon]_r$. Betrachtet man zwei Th. Char. $[\varepsilon]_r$ und $[\eta]_r$, deren Elemente ε, ε' und η, η' den $2p$ Kongruenzen (181) genügen, als nicht verschieden, so gibt es im ganzen nur r^{2p} verschiedene Th. Char. $[\varepsilon]_r$, als welche man diejenigen wählen kann, bei denen die ε, ε' nur Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots r-1$ sind.

Unter der Summe $[\sigma]_r = [\varepsilon\eta\zeta\cdots]_r$ mehrerer Th. Char. $[\varepsilon]_r$, $[\eta]_r$, $[\zeta]_r$, ... wird jene Th. Char. verstanden, deren Elemente σ, σ' durch die Kongruenzen (184) bestimmt sind; dabei können die Th. Char. $[\varepsilon]_r$, $[\eta]_r$,

$[\zeta]_r, \ldots$ auch teilweise oder alle einander gleich sein und es wird die Summe von g gleichen Th. Char. $[\varepsilon]_r$ mit $[\varepsilon^g]_r$ bezeichnet. Man nennt ferner eine aus gegebenen Th. Char. $[\varepsilon_1]_r, [\varepsilon_2]_r, \ldots [\varepsilon_m]_r$ zusammengesetzte Th. Char. $[\varepsilon_1^{g_1} \varepsilon_2^{g_2} \ldots \varepsilon_m^{g_m}]_r$, bei der die g positive ganze Zahlen oder Null sind, eine Kombination n^{ter} Ordnung dieser Th. Char., wenn $g_1 + g_2 + \cdots + g_m = n$ ist, und bezeichnet sie mit $\left[\sum^n \varepsilon\right]_r$. Diejenigen Kombinationen $\left[\sum^n \varepsilon\right]_r$, bei denen die Ordnungszahl $n \equiv 1 \pmod r$ ist, heißen die wesentlichen Kombinationen der gegebenen Th. Char. und wesentlich unabhängig werden Th. Char. $[\varepsilon_1]_r$, $[\varepsilon_2]_r, \ldots [\varepsilon_m]_r$ genannt, wenn keine aus ihnen gebildete Kombination $[\varepsilon_1^{g_1} \varepsilon_2^{g_2} \ldots \varepsilon_m^{g_m}]_r$, bei der $g_1 + g_2 + \cdots + g_m \equiv 0 \pmod r$ ist, der Th. Char. [0] gleich ist, ohne daß jede einzelne der m Zahlen $g_1, g_2, \ldots g_m \equiv 0 \pmod r$ ist.

Addiert man zu den sämtlichen Per. Char. einer Gruppe E eine beliebige Th. Char. $[\varkappa]$ und faßt die entstehenden r^q Charakteristiken als Th. Char. auf, so sagt man von ihnen, daß sie ein System von Th. Char. bilden, und nennt q den Rang des Systems. Die r^q Th. Char. eines Systems vom Range q können auch als die wesentlichen Kombinationen von $q + 1$ wesentlich unabhängigen unter ihnen definiert werden; solche $q + 1$ Th. Char. eines Systems sollen eine Basis desselben genannt werden.

Läßt man an Stelle der vorher genannten Th. Char. $[\varkappa]$ der Reihe nach die r^{2p-q} Per. Char. einer Gruppe Z vom Range $2p - q$ treten, deren Basischarakteristiken zusammen mit den q Basischarakteristiken von E $2p$ unabhängige Per. Char. bilden, so erhält man auf die angegebene Weise aus einer Gruppe von r^q Per. Char. im ganzen r^{2p-q} verschiedene Systeme von Th. Char., welche zusammen alle r^{2p} überhaupt existierenden Th. Char. und jede nur einmal enthalten; von solchen r^{2p-q} Systemen sagt man, daß sie einen Komplex bilden. Eine Gruppe Z der vorher bezeichneten Art heißt zur Gruppe E konjugiert und entsprechend nennt man auch die r^{2p-q} Systeme eines Komplexes einander konjugiert. Adjungiert werden zwei Systeme von Th. Char. genannt, wenn die beiden Gruppen von Per. Char. es sind, aus denen sie abgeleitet wurden. Endlich soll jedes aus einer *Göpel*schen Gruppe von Per. Char. abgeleitete System ein *Göpel*sches System genannt werden.[93])

93) Der Versuch *v. Braunmühls* [Erl. Ber. 18 (1886), p. 37; Münch. Abh. 16_2 (1887), p. 327; Math. Ann. 32 (1888), p. 513 und 37 (1890), p. 61], für den Fall $r > 2$ den „Charakter“

$$|\varepsilon| = e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu=1}^{p} \varepsilon_\mu \varepsilon_{\mu'}}$$

42. Relationen zwischen den Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$. Ebenso wie die Untersuchungen über die Relationen zwischen den 2^{2p} Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_2(\!(v)\!)$ sich im wesentlichen auf die Relationen zwischen den Quadraten dieser Funktionen als den Thetafunktionen zweiter Ordnung mit der Charakteristik [0] beschränken, so werden auch die Untersuchungen über die zwischen den r^{2p} Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ bestehenden Relationen solche Verbindungen dieser Funktionen heranziehen, welche Thetafunktionen r^{ter} Ordnung mit der Charakteristik [0] sind; dies sind aber außer den „Thetapotenzen" $\vartheta^r[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ auch die „vollständigen Thetaprodukte", d. h. Produkte von r Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$, deren Charakteristikensumme [0] ist. Bezüglich dieser Funktionen gelten die beiden Sätze:

Zwischen $r^p + 1$ Thetapotenzen und vollständigen Thetaprodukten besteht immer eine homogene lineare Relation.

Durch r^p linear unabhängige Thetapotenzen oder vollständige Thetaprodukte läßt sich jede weitere dieser Funktionen homogen und linear ausdrücken.

43. Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel. Auch für die Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ können die eben genannten Relationen, ebenso wie die Additionstheoreme ihrer Quotienten, aus der folgenden allgemeinen Formel gewonnen werden, welche als die Verallgemeinerung der *Riemann*schen Thetaformel erscheint.[94])

Bezeichnen $w_\mu^{(1)}$, $w_\mu^{(2)}$ $(\mu = 1, 2, \cdots p)$ $2p$ unabhängige Veränderliche, $t_\mu^{(1\nu)}$, $t_\mu^{(2\nu)}$ $\begin{pmatrix}\nu = 1, 2, \cdots r\\ \mu = 1, 2, \cdots p\end{pmatrix}$ $2rp$ Veränderliche, welche die $2p$ Gleichungen

$$t_\mu^{(11)} + \cdots + t_\mu^{(1r)} = 0, \quad t_\mu^{(21)} + \cdots + t_\mu^{(2r)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p) \tag{188}$$

einer Th. Char. $[\varepsilon]_r$ einzuführen, ist ebenso wie der, F. S. von Per. Char. oder Th. Char. für $r > 2$ zu definieren, verfehlt, da die geschaffenen Begriffe nicht auf wesentlichen, d. h. gegenüber linearen ganzzahligen Transformationen invarianten Eigenschaften der Charakteristiken beruhen; auch sind die von *v. Braunmühl* vorgenommenen Abzählungen nur für den Fall einer Primzahl r richtig. Vgl. dazu *Krazer,* Acta math. 17 (1893), p. 281. Unter welchen Bedingungen für die Modulen eine Thetafunktion zweier Veränderlichen verschwindet, wenn für diese ein System zusammengehöriger 3^{tel} der Periodizitätsmodulen gesetzt wird, hat *Thomae,* Z. f. Math. 36 (1891), p. 41 untersucht.

94) Zuerst für den Fall $p = 1$ und $r = 3$ bei *Krazer,* Math. Ann. 22 (1883), p. 416 = Hab. Schr. Würzburg 1883 [vgl. dazu *Schleicher,* Progr. Bayreuth 1890, *Sievert,* Progr. Nürnberg 1891, ferner Nürnberg 1893, Bayreuth 1895 und Progr. Bayreuth 1906], sodann für beliebiges p und r bei *Krazer* und *Prym,* Acta math. 3 (1883), p. 240, auch „N. G.", p. 37; s. auch *Krause,* Math. Ann. 26 (1886), p. 587.

erfüllen, und setzt man, indem man unter den ϱ, ϱ' ganze Zahlen versteht, welche den $2p$ Bedingungen

$$(189)\quad \varrho_\mu^{(1)} + \varrho_\mu^{(2)} + \cdots + \varrho_\mu^{(2r)} = r s_\mu, \quad \varrho_\mu^{\prime(1)} + \varrho_\mu^{\prime(2)} + \cdots + \varrho_\mu^{\prime(2r)} = r s'_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

genügen, in denen die s, s' ganze Zahlen bezeichnen,

$$\begin{aligned} x_{[\varepsilon]} = {} & \vartheta[\varepsilon + s - \varrho^{(1)}]_r\big(w^{(2)} - t^{(11)}\big) \cdots \vartheta[\varepsilon + s - \varrho^{(r)}]_r\big(w^{(2)} - t^{(1r)}\big) \\ & \vartheta[\varepsilon + s - \varrho^{(r+1)}]_r\big(w^{(1)} - t^{(21)}\big) \cdots \vartheta[\varepsilon + s - \varrho^{(2r)}]_r\big(w^{(1)} - t^{(2r)}\big) \\ & \cdot e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum_{\mu=1}^{p} \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum_{\mu=1}^{p} s_\mu \varepsilon'_\mu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (190)\quad y_{[\eta]} = {} & \vartheta[\eta + \varrho^{(1)}]_r\big(w^{(1)} + t^{(11)}\big) \cdots \vartheta[\eta + \varrho^{(r)}]_r\big(w^{(1)} + t^{(1r)}\big) \\ & \vartheta[\eta + \varrho^{(r+1)}]_r\big(w^{(2)} + t^{(21)}\big) \cdots \vartheta[\eta + \varrho^{(2r)}]_r\big(w^{(2)} + t^{(2r)}\big) \\ & \cdot e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum_{\mu=1}^{p} \eta_\mu \eta'_\mu} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum_{\mu=1}^{p} s_\mu \eta'_\mu}, \end{aligned}$$

so sind die Größen x und y miteinander verknüpft durch die Gleichungen

$$(191)\qquad r^p y_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} |\,\varepsilon, \eta\,|\, x_{[\varepsilon]},$$

bei denen die Summation über alle r^{2p} Th. Char. auszudehnen ist und $[\eta]$ eine beliebige Th. Char bezeichnet.

Denkt man sich die Per. Char. $(\varrho^{(1)}), \ldots (\varrho^{(2r)})$ festgehalten und läßt an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die r^{2p} Th. Char. treten, so entsteht aus (191) ein System von r^{2p} Gleichungen, welche alle auf ihren rechten Seiten die nämlichen r^{2p} Größen $x_{[\varepsilon]}$ haben; aus diesen r^{2p} Gleichungen können durch lineare Verbindung neue Gleichungen zwischen den Größen x und y abgeleitet werden.

Sind $(a_0)_r, (a_1)_r, \ldots (a_{s-1})_r$ die $s = r^m$ Per. Char. einer beliebigen Gruppe A vom Range m, $(b_0)_r, (b_1)_r, \ldots (b_{t-1})_r$ die $t = r^{2p-m}$ Per. Char. der dazu adjungierten Gruppe B (Nr. **40**) und bezeichnen $[\eta]$ und $[\xi]$ irgend zwei Th. Char., so besteht zwischen den Größen x und y die Gleichung

$$(192)\qquad r^{p-m} \sum_{\sigma=0}^{s-1} |\,a_\sigma, \xi\,|\, y_{[\eta a_\sigma]} = |\,\xi, \eta\,| \sum_{\tau=0}^{t-1} |\,b_\tau, \eta\,|\, x_{[\xi b_\tau]},$$

aus der insbesondere für $m = p$ die halbe Umkehrung der Formel (191)

$$(193)\qquad \sum_{\sigma=0}^{r^p-1} |\,a_\sigma, \xi\,|\, y_{[\eta a_\sigma]} = |\,\xi, \eta\,| \sum_{\tau=0}^{r^p-1} |\,b_\tau, \eta\,|\, x_{[\xi b_\tau]}$$

hervorgeht. Ist dabei die Gruppe A eine *Göpel*sche, so fällt die Gruppe B mit ihr zusammen.

44. Auftreten der Funktionen $\vartheta[\varepsilon]_r(\!(v)\!)$ bei nicht ganzzahliger linearer Transformation der Thetafunktionen. Wie schon *Jacobi*[95]) bemerkt hat, zerfällt die $\vartheta(v)_a$ darstellende Reihe, wenn man in ihr die geraden Glieder von den ungeraden trennt, in zwei Reihen, von denen jede für sich eine Thetafunktion mit den Argumenten $2v$ und den Modulen $4a$ darstellt. *Schröter*[96]) hat diese Zerspaltung einer Thetareihe in mehrere durch Zusammenfassen derjenigen Glieder, bei denen die Summationsbuchstaben einander nach dem Modul r kongruent sind, auf den Fall eines beliebigen r ausgedehnt und ist dadurch zu der Formel

$$\vartheta(v)_a = \sum_{\varrho=0}^{r-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varrho}{r} \\ 0 \end{bmatrix} (rv)_{r^2 a} \tag{194}$$

gelangt, aus der durch Umkehrung die zuerst von *Gordan*[97]) mitgeteilte Formel

$$r\vartheta(rv)_{r^2 a} = \sum_{\sigma=0}^{r-1} \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sigma}{r} \end{bmatrix} (v)_a \tag{195}$$

hervorgeht. Solche Formeln bestehen auch für Thetafunktionen von beliebig vielen Variablen[98]); hier bilden sie aber nur den speziellen Fall einer viel allgemeineren Formel, die man erhält, wenn man in der $\vartheta(\!(v)\!)_a$ definierenden p-fach unendlichen Reihe an Stelle der bisherigen Summationsbuchstaben neue einführt durch eine beliebige lineare Substitution mit rationalen Koeffizienten von nicht verschwindender Determinante. Diese Formel ist von *Krazer* und *Prym*[99]) aufgestellt worden; sie entspricht einer nicht ganzzahligen linearen Transformation, welche als elementare lineare Transformation 1. Art bezeichnet wird.[100])

45. Die Krazer-Prymsche Fundamentalformel für die Theorie der Thetafunktionen mit rationalen Charakteristiken. Für Produkte von je zwei einfach unendlichen Thetareihen hat *Schröter*[101]) die Formel

$$\vartheta(v_1)_{p_1 a}\vartheta(v_2)_{p_2 a} = \sum_{\varrho=0}^{r-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varrho}{r} \\ 0 \end{bmatrix} (p_2 v_1 - p_1 v_2)_{p_1 p_2 r a} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{p_1 \varrho}{r} \\ 0 \end{bmatrix} (v_1 + v_2)_{ra}, \tag{196}$$

95) Ges. Werke 1 (1881), p. 515.

96) Diss. Königsberg 1854, p. 19.

97) J. f. Math. 66 (1866), p. 191.

98) *Thomae,* Diss. Göttingen 1864 und *Königsberger,* J. f. Math. 64 (1865), p. 33.

99) „N. G.“, p. 70.

100) Vgl. *Krazer,* „Thetaf.“, p. 65 und 198.

101) Diss. Königsberg 1854, p. 7.

wo $r = p_1 + p_2$ gesetzt ist, aufgestellt, die man auch nach den rechts stehenden Thetaprodukten aufgelöst in der Gestalt

$$(197)\; r\,\vartheta(p_2 v_1 - p_1 v_2)_{p_1 p_2 r a}\,\vartheta(v_1 + v_2)_{r a} = \sum_{\sigma=0}^{r-1} \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \\ \overline{r} \end{bmatrix} (v_1)_{p_1 a}\, \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \\ \overline{r} \end{bmatrix} (v_2)_{p_2 a}$$

schreiben kann. Später haben *Schröter*[102]) selbst und *Hoppe*[103]) die Formel (196) durch eine etwas allgemeinere Formel von demselben Typus ersetzt, während andererseits *Königsberger*[104]) sie auf Thetafunktionen beliebig vieler Argumente ausgedehnt hat.

Die Formeln (196) und (197) sind als spezielle Fälle in einem Formelpaar enthalten, welches zwischen Produkten von einer beliebigen Anzahl von Thetafunktionen besteht und von dem zuerst die (197) entsprechende Formel von *Gordan*[105]), die andere, (196) entsprechende, erst viel später von *Krause*[106]) angegeben wurde, ohne daß dieser die Übereinstimmung seiner Formel mit der *Gordan*schen bemerkte. *Krause* nannte die Formeln „Additionstheoreme zwischen Thetafunktionen mit verschiedenen Modulen". Auch *Krazer* und *Prym*[107]) haben diese Formeln aufgestellt und auf die Bedeutung hingewiesen, die sie für die Darstellung einer Funktion $\vartheta(\!(nv)\!)_{na}$ durch Funktionen $\vartheta(\!(v)\!)_a$ haben.[108])

Bei *Krazer* und *Prym* treten die genannten Formeln als spezielle Fälle einer weit allgemeineren Formel[109]) auf, welche entsteht, wenn man in der ein Produkt von n Thetafunktionen von je p Veränderlichen darstellenden np-fach unendlichen Reihe an Stelle der bisherigen Summationsbuchstaben neue einführt durch eine lineare Substitution mit rationalen Koeffizienten[110]), und welche als „Fundamentalformel für die Theorie der Thetafunktionen mit rationalen Charakteristiken" bezeichnet wird. Setzt man die Modulen aller in ihr

102) Hab.-Schr. Breslau 1855, p. 6.

103) Arch. d. Math. 70 (1884), p. 400.

104) J. f. Math. 64 (1865), p. 24.

105) J. f. Math. 66 (1866), p. 189.

106) Leipz. Ber. 38 (1886), p. 39, Math Ann. 27 (1886), p. 419, ferner Leipz. Ber. 45 (1893), p. 99, 349, 523, 805 und 48 (1896), p. 291; D. M. V. Jahresber. 4 (1897), p. 121; vgl. auch *Mertens,* Progr. Köln 1889.

107) „N. G.", p. 27.

108) Vgl. § 19 und *Krazer,* „Thetaf.", p. 168.

109) „N. G.", p. 20. Eine von *Weierstraß* aufgestellte, aber erst 1903 im 3. Bande seiner Math. Werke p. 123 veröffentlichte und als Verallgemeinerung einer *Jacobi*schen Thetaformel bezeichnete Formel stimmt mit der *Krazer-Prym*schen überein.

110) Dazu *Krazer,* Math. Ann. 52 (1899), p. 369.

auftretenden Thetafunktionen einander gleich, so geht sie in die von *Prym*[111]) mitgeteilte „allgemeine Thetaformel" über, die nun ihrerseits die *Riemann*sche Thetaformel und deren Verallgemeinerungen[112]) als spezielle Fälle enthält.

VI. Das Jacobische Umkehrproblem bei Riemann, Clebsch und Gordan und in den Vorlesungen von Weierstraß.

46. Riemann. Im vorigen wurde, der historischen Entwicklung vorgreifend, die formale Theorie der Thetafunktionen im Zusammenhang dargestellt, obgleich sie sich erst unter dem Einfluß der zentralen Stellung, welche diese Funktion in *Riemann*s Arbeiten einnimmt, nach und nach entwickelte.

Die tiefe Einsicht *Riemann*s in die Natur der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale hat ihn in den Stand gesetzt, die zu einem algebraischen Gebilde gehörige Thetafunktion unmittelbar aufzustellen und auf dieser Grundlage dann im Einklang mit seinem allgemeinen Programm, Funktionen durch ihre Rand- und Unstetigkeitsbedingungen zu bestimmen, nicht nur das Umkehrproblem zu lösen, sondern auch noch eine ganze Reihe von weiteren die *Abel*schen Integrale betreffenden Fragen in großer Vollständigkeit zu beantworten.

Riemann beginnt also die zweite Abteilung seiner Theorie der *Abel*schen Funktionen[113]) (Art. 17) mit der Aufstellung der p-fach unendlichen Thetareihe (64), gibt deren Periodizitätseigenschaften (65), (66) an und weist nach, daß diese die Funktion bis auf einen konstanten Faktor bestimmen.

Sodann legt er der weiteren Untersuchung eine kanonische Zerschneidung der *Riemann*schen Fläche T in eine einfach zusammenhängende T' (II B 2, Nr. 6) zugrunde und ordnet dieser ein System von p transzendent normierten Integralen erster Gattung v_μ (II B 2, Nr. 18) von der Beschaffenheit zu, daß der Periodizitätsmodul von v_μ an dem Querschnitte a_μ gleich πi, an den übrigen Querschnitten a aber gleich 0 ist Die $\frac{1}{2}(p-1)p$ Relationen, welche *Riemann* zwischen den Periodizitätsmodulen irgend zweier Integrale erster Gattung aufstellt (Art. 20), ergeben dann für die Periodizitätsmodulen $a_{\mu\nu}$ der Integrale v_μ an den Querschnitten b_ν ein symmetrisches System $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$. Aus dem Umstande aber, daß ein Integral $\int w\, d\bar{w}$, wo w irgendein Integral erster

111) „Riem. Thetaf." II, Acta math. 3 (1883), p. 216.

112) Acta math. 3 (1883), p. 240; „N. G.", p. 33 u. 47.

113) J. f. Math. 54 (1857), p. 115 = Ges. math. Werke 1876, p. 81, 2. Aufl. 1892, p. 88.

Gattung und $\overline{w}$ den zu w konjugierten komplexen Wert bezeichnet, über die ganze Begrenzung von T' erstreckt einen positiven Wert, gleich dem Flächeninhalte des konformen Abbildes von T' vermittels w, besitzt, schließt *Riemann* (Art. 21), daß der reelle Teil der quadratischen Form $\sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu$ eine negative definite Form ist und daß infolgedessen die mit diesen Größen $a_{\mu\nu}$ als Modulen gebildete p-fach unendliche Thetareihe konvergiert, also eine ganze transzendente Funktion der v definiert.

Wird nun in dieser Reihe

$$v_\mu = v_\mu(z) - e_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{198}$$

gesetzt, indem man unter z eine Stelle der *Riemann*schen Fläche T und unter $e_1, \ldots e_p$ ein sonst beliebiges Wertesystem versteht, für welches nur $\vartheta(\!(v(z) - e)\!)$ nicht identisch, d. h. nicht für alle Lagen der Stelle z, verschwindet, und wird dann der Reihenwert als Funktion der gemeinsamen oberen Grenze z der Integrale v_μ betrachtet, so entsteht die *Riemann*sche Thetafunktion

$$\vartheta(\!(v(z) - e)\!) = \sum_{m_1, \ldots m_p}^{-\infty, \ldots +\infty} e^{\sum_\mu \sum_\nu a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu + 2 \sum_\mu m_\mu (v_\mu(z) - e_\mu)}, \tag{199}$$

für welche

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu\colon \vartheta^+ = \vartheta^-, \\ &\text{längs } b_\nu\colon \vartheta^+ = \vartheta^- \cdot e^{-2(v_\nu^- - e_\nu) - a_{\nu\nu}} \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p) \tag{200}$$

ist

Indem *Riemann* den letzten Gleichungen das Verhalten von $\log \vartheta$ an den Querschnitten entnimmt, kann er die Werte der über die ganze Begrenzung von T' erstreckten Integrale $\int d \log \vartheta$ und $\int \log \vartheta \, dv_\mu$ berechnen und erhält (Art. 22), immer vorausgesetzt, die Größen e seien so gewählt, daß die Thetafunktion nicht identisch verschwindet, die beiden grundlegenden Sätze,

1. daß $\vartheta(\!(v(z) - e)\!)$ an p Stellen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ der *Riemann*schen Fläche 0^1 wird,

2. daß zwischen diesen Nullstellen $\eta_1, \ldots \eta_p$ und den Parametern $e_1, \ldots e_p$ die p Gleichungen

$$e_\mu = \sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(\eta_\nu) + h_\mu \pi i + \sum_{\nu=1}^{p} g_\nu a_{\mu\nu} + k_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p) \tag{201}$$

bestehen. Es bezeichnen dabei die g, h ganze Zahlen, welche dadurch definiert sind, daß

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu\colon \log\vartheta^+ = \log\vartheta^- - 2g_\nu\pi i,\\ (202)\quad &\text{längs } b_\nu\colon \log\vartheta^+ = \log\vartheta^- - 2(u_\nu - e_\nu) - a_{\nu\nu} - 2h_\nu\pi i\\ &\qquad\qquad (\nu = 1, 2, \cdots p) \end{aligned}$$

ist, die k dagegen Konstanten, die von den Parametern e und den Nullpunkten η unabhängig sind und außer von der Beschaffenheit der *Riemann*schen Fläche T und des zu ihrer Zerschneidung benutzten Querschnittsystems noch von den Anfangswerten der Integrale v abhängen. Man kann insbesondere, wie es *Riemann* für die folgenden Untersuchungen tut, diese letzteren sich so gewählt denken, daß die p Größen k sämtlich verschwinden.[114])

Durch die Gleichungen (201) ist bereits die eindeutige Lösbarkeit des *Jacobi*schen Umkehrproblems für alle jene Wertesysteme e dargetan, für welche $\vartheta(\!(v(z) - e)\!)$ nicht identisch verschwindet.

Diesen letzteren Fall hat *Riemann* in den Art. 23 und 24 behandelt und hier schon jenen Satz ausgesprochen, der den Kernpunkt der Lehre von dem Verschwinden der Thetafunktion bildet, nämlich daß

$$\vartheta\left(\left(\sum_{\nu=1}^{p-1} v(\eta_\nu)\right)\right) = 0 \tag{203}$$

ist für jede Lage der $p-1$ Punkte η. Aus diesem Satze folgert *Riemann* hier, daß das Kongruenzensystem

$$\left(\sum_{\nu=1}^{2p-2} v(z^{(\nu)})\right) \equiv (0) \tag{204}$$

besteht, wenn die $z^{(\nu)}$ die $2p-2$ Nullpunkte eines Differentials erster Gattung (II B 2, Nr. 20) oder, was dasselbe, durch eine Gleichung $\varphi = 0$

114) Bei der Vermehrung des Wertes der Integrale v_μ um Konstanten c_μ geht nämlich k_μ in $k_\mu - (p-1)c_\mu$ über, verschwindet also, wenn $c_\mu = \frac{k_\mu}{p-1}$ genommen wird. Die Art der Abhängigkeit der Konstanten k_μ von der Beschaffenheit der *Riemann*schen Fläche T und von dem Charakter des zur Zerschneidung dieser Fläche benutzten Querschnittsystems ist von *Prym* und *Rost* (*Prym*sche Funktionen 1911, 2. Teil, p. 107) eingehend untersucht worden. Im hyperelliptischen Falle haben für bestimmte Querschnittsysteme und bei der Wahl eines Verzweigungspunktes als gemeinsamer unterer Grenze der Integrale v_μ *Neumann* („Riem. Th.", 2. Aufl. 1884, p. 362) und *Christoffel* [Math. Ann. 54 (1901), p. 391 = Ges. math. Abh. 2 (1910), p. 316] die Bestimmung von k_μ durch direkte Ausführung der dabei auftretenden Integrationen durchgeführt, nachdem schon früher *Prym* (Schweiz. Nat. Ges. N. Denkschr. 22, 1867) diese Bestimmung auf einem anderen Wege erzielt hatte. Über die Berechnung der durch (202) definierten ganzen Zahlen g, h bei *Thomae*, Leipz. Ber. 52 (1900), p. 105.

miteinander verknüpft sind[115]), und dann weiter, daß das Umkehrproblem unendlich vieldeutig wird, wenn die Kongruenzen

$$e_\mu \equiv -\sum_{\nu=1}^{p-2} v_\mu(x^{(\nu)}) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p) \tag{205}$$

erfüllt werden können.

Dem Beweise, den *Riemann* in Art. 23 und später[116]) für den Satz (203) gegeben hat, haften aber gewisse Mängel an, auf welche zuerst *C. Neumann*[117]) aufmerksam gemacht hat. Diesem ist es dann auch gelungen, einen einwandfreien Beweis für den genannten Satz zu liefern[118]), aus dem sich auch der Beweis des allgemeineren, abschließenden Satzes ergibt, den *Riemann* gleichfalls schon ausgesprochen hat:

„Ist $\vartheta(\!(r)\!) = 0$, so lassen sich $p-1$ Punkte $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{p-1}$ so bestimmen, daß

$$(r) \equiv \left(\sum_{\nu=1}^{p-1}{}' u(\eta_\nu)\right) \tag{206}$$

ist und umgekehrt. Wenn außer der Funktion $\vartheta(\!(v)\!)$ auch ihre ersten bis m^{ten} Derivierten für $(v) = (r)$ sämtlich gleich Null, die $m+1^{\text{ten}}$ aber nicht sämtlich gleich Null sind, so können m von diesen Punkten η, ohne daß die Größen r sich ändern, beliebig gewählt werden und dadurch sind die übrigen $p-1-m$ vollständig bestimmt. Und umgekehrt: Wenn m und nicht mehr von den Punkten η, ohne daß sich die Größen r ändern, beliebig gewählt werden können, so sind außer der Funktion $\vartheta(\!(v)\!)$ auch ihre ersten bis m^{ten} Derivierten für $(v) = (r)$ sämtlich gleich Null, die $m+1^{\text{ten}}$ aber nicht sämtlich gleich Null."

Die Systeme der $p-1$ Punkte η bilden in diesem Falle eine Spezialschar vom Überschusse $m+1$ (II B 2, Nr. 25).

Durch diesen Satz ist eine vollständige Diskussion der Mannigfaltigkeit $\vartheta(\!(v)\!) = 0$ im Gebiete der v auf Grund ihrer Darstellung durch Integrale erster Gattung gegeben und damit die Möglichkeit geschaffen, einerseits mit Hilfe der Thetafunktion Ausdrücke von ge-

115) Immer vorausgesetzt, daß die Anfangswerte der v so gewählt sind, daß die *Riemann*schen Konstanten k_μ verschwinden; andernfalls würde $(-2k)$ auf der rechten Seite von (204) stehen.

116) J. f. Math. 65 (1866), p. 161 = Ges. math. Werke 1876, p. 198; 2. Aufl. 1892, p. 212.

117) Leipz. Ber. 35 (1883), p. 99; vgl. auch „Riem. Th.", 2. Aufl. 1884, p. 334.

118) a. a. O. p. 347; vgl. dazu *v. Dalwigk*, N. Acta Leop. 57 (1892), p. 221, insbesondere aber *Rost*, Hab.-Schr. Würzburg 1901.

gebenen Null- und Unendlichkeitspunkten auf der *Riemann*schen Fläche zu bilden, andererseits die Thetafunktion selbst und andere mit ihrer Hilfe gebildete Ausdrücke am algebraischen Gebilde zu untersuchen.

In Art. 25 behandelt *Riemann* den Zusammenhang von $\log \vartheta(\!(v)\!)$ mit den Integralen dritter und zweiter Gattung, wie er unten in den Nr. **51—53** dargestellt ist, und gibt Andeutungen über die Bestimmung von $\log \vartheta(\!(0)\!)$ durch die $3p-3$ Klassenmodulen; eine Aufgabe, welche später für den hyperelliptischen Fall und für $p=3$ wirklich ausgeführt wurde (vgl. dazu die Nr. **83** u. **84**), im allgemeinen Falle $p>3$ aber ihre Hauptschwierigkeit darin hat, daß die mit den Periodizitätsmodulen $a_{\mu\nu}$ der Integrale erster Gattung gebildeten Thetafunktionen, wie schon *Riemann*[119]) angegeben hat, spezielle sind.

Da nämlich das algebraische Gebilde vom Geschlecht p nur von $3p-3$ wesentlichen Konstanten abhängt, die Anzahl der in den Thetafunktionen auftretenden Modulen $a_{\mu\nu}$ aber $\frac{1}{2}p(p+1)$ ist, so müssen zwischen diesen $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ Relationen bestehen, wenn die vorgelegten Thetafunktionen zu einem algebraischen Gebilde gehören oder, wie wir in der Folge sagen werden, *Riemann*sche sein sollen. Diese sind also nur für $p \lesseqgtr 3$ die allgemeinsten, für $p=4$ besteht bei ihnen schon eine Relation zwischen den 10 Thetamodulen $a_{\mu\nu}$. Diese ist von *Schottky* aufgestellt worden, während die bei größerem p bestehenden Beziehungen bis jetzt nicht bekannt sind.[120])

Anknüpfend an Nr. **34** kann man die Stellung der *Riemann*schen Thetafunktionen innerhalb der allgemeinen auch dahin charakterisieren, daß auf der zu ihnen gehörigen M_p sich solche Gebilde G finden müssen, welche vom Geschlecht p sind.

In Art. 26 betrachtet *Riemann* „algebraische Funktionen von z", das sind Funktionen, die in der einfach zusammenhängenden Fläche T' einwertig sind und an den Querschnitten r^{te} Einheitswurzeln als Faktoren annehmen (II B 2, Nr. **40**). Die r^{ten} Potenzen dieser Funktionen sind also wie T verzweigt und man nennt sie selbst daher auch „Wurzelfunktionen".[121]) Solche Funktionen lassen sich durch Quotienten zweier Produkte von gleich vielen Thetafunktionen und Potenzen der Größen e^{v_μ} ausdrücken (vgl. Nr. **56**).

---

119) Ges. math. W., p. 94, 2. Aufl. p. 101.

120) Näheres hierüber in Nr. **92**. Über den speziellen hyperelliptischen Fall, bei welchem die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Thetamodulen von noch weniger, nämlich $2p-1$ wesentlichen Konstanten abhängen, siehe Nr. **74**.

121) So zuerst genannt von *Weber*, „$p=3$", p. 110.

Die einfachsten derartigen Funktionen sind die von *Riemann* in Art. 27 betrachteten Quotienten von nur zwei Thetafunktionen

$$\frac{\vartheta\left(\left(v+\begin{Bmatrix} g \\ h \end{Bmatrix}\right)\right)}{\vartheta(\!(v)\!)} e^{2\sum_{\mu=1}^{p} g_\mu v_\mu}, \tag{207}$$

die unter Einführung der Th. Char. auch in der Gestalt

$$\frac{\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(v)\!)}{\vartheta(\!(v)\!)} \tag{208}$$

geschrieben werden können und in denen die g, h rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner r bezeichnen. Setzt man in ihnen

$$v_\mu = v_\mu(z) - \sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(\xi_\nu), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{209}$$

so sind sie auch als Funktionen der p Stellen ξ_ν, für welche sie als Funktionen von z betrachtet ∞^1 werden, Wurzelfunktionen und können auch als solche mit den früher entwickelten Mitteln dargestellt werden.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall $r = 2$ (vgl. Nr. **57**) geworden, da er *Riemann* auf die den einzelnen ungeraden Thetacharakteristiken zugeordneten φ-Funktionen mit paarweise zusammenfallenden Nullpunkten geführt hat. Die Quadratwurzeln aus diesen Funktionen nennt *Riemann* geradezu „*Abel*sche Funktionen". Die Untersuchung dieser unverzweigten $\sqrt{\varphi}$, die im hyperelliptischen Falle durch Rechnung bewältigt und für den allgemeinen Fall $p = 3$ unter Zugrundelegung der singularitätenfreien Kurve 4. Ordnung den Arbeiten *Steiner*s und *Hesse*s (III C 5, Nr. **51** f.) entnommen werden konnte, gab *Riemann* Anlaß zur Entwicklung der Charakteristikentheorie und sie erwiesen sich als das wichtigste Hilfsmittel, das algebraische Gebilde mit den Thetafunktionen in genauere Beziehung zu setzen und durch sie darzustellen. Diese zuletzt genannten Entwicklungen hat *Riemann* nur in seiner Vorlesung von W.-S. 1861/62 gegeben, und sie sind erst nach seinem Tode veröffentlicht worden.[122])

Bei der Fülle der von *Riemann* erhaltenen Resultate konnte ein großer Teil der jetzt folgenden Forschung sich damit beschäftigen, diese Resultate auf anderem Wege zu gewinnen, sie zu erweitern und zu vertiefen. Vorher aber bedurften die sehr kurzen Andeutungen *Riemann*s, um in weiteren Kreisen Verständnis zu finden, der speziellen Ausführung. Dieser hat sich zuerst für den Fall $p = 2$

122) Ges. math. W., p. 450; 2. Aufl. p. 487; insbes. aber Nachtr. p. 1.

Prym[123]) und sodann für den allgemeinen hyperelliptischen Fall *C. Neumann*[124]) und wieder *Prym*[125]) gewidmet, während später für den allgemeinen Fall $p = 3$ *Weber*[126]) die von *Riemann* in seinen Vorlesungen gegebenen Resultate wieder aufnahm.

Durch *Riemanns* Arbeit war die Erforschung der Thetafunktion und ihrer Beziehungen zum algebraischen Gebilde in den Mittelpunkt des Interesses gerückt. Die explizite Lösung des Umkehrproblems erschien als ein auf mannigfache Art zu erreichendes Ergebnis dieser Beziehungen; die Thetafunktion selbst aber ergibt sich bei *Riemann* nicht als notwendiges Glied einer organischen Entwicklung, sondern tritt unvermittelt als ein neues Element auf. Dieser Einwand[127]), lediglich methodischer Natur, hat den Anstoß zur algebraischen und funktionentheoretischen Durchbildung der ganzen Theorie gegeben, wie sie zunächst durch *Clebsch* und *Gordan* in ihrem Werke über die Theorie der *Abel*schen Funktionen und unabhängig davon von *Weierstraß* in seinen Vorlesungen über die Theorie der *Abel*schen Transzendenten geschah. Über beide soll jetzt berichtet werden.

47. Clebsch und Gordan geben den Gleichungen des *Jacobi*schen Umkehrproblems die Gestalt

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = v_h, \qquad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{210}$$

wobei sie die Integrale 1. Gattung u so normiert denken, daß ihre

---

123) Diss. Berlin 1863 und Wien Denkschr. 24 (1865), II, p. 1; 2. Ausgabe 1885.

124) Die Umkehrung der *Abel*schen Integrale 1863 und „Riem. Th." 1865, 2. Aufl. 1884.

125) Schweiz. Nat. Ges. N. Denkschr. 22 (1867).

126) „$p = 3$"; siehe noch die ausführliche Darstellung der *Riemann*schen Theorie, welche *Thomae* (Über eine spezielle Klasse *Abel*scher Functionen, 1877 und Über eine spezielle Klasse *Abel*scher Functionen vom Geschlecht 3, 1879) für zwei spezielle Klassen algebraischer Funktionen gegeben hat, von denen die eine, zum Geschlecht $p = 2n$ gehörige, durch

$$s^3 = \frac{(z-k_1)(z-k_2)\ldots(z-k_{n+1})}{(z-l_1)(z-l_2)\ldots(z-l_{n+1})},$$

die zweite, zum Geschlecht $p = 3$ gehörige, durch

$$s^3 = (z-k)(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)$$

bestimmt ist.

127) Bei *Neumann*, „Riem. Th ", p. IV und bei *Clebsch* und *Gordan*, „A. F.", p. V.

Systeme zusammengehöriger Periodizitätsmodulen Größen von der Form

$$m_h 2\pi i + q_1 a_{1h} + q_2 a_{2h} + \cdots + q_p a_{ph} \quad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{211}$$

sind, bei ganzzahligen m und q.

Das zugrunde liegende algebraische Gebilde G wird bei *Clebsch* und *Gordan* als eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung aufgefaßt, welche die Grundkurve genannt wird. Ist $F(x, s) = 0$ ihre Gleichung, so heißt jede symmetrische Funktion der p Werte, welche eine homogene Funktion 0^{ter} Dimension $\frac{\varphi}{\psi}$ von x, s für $x = x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$ annimmt, eine *Abel*sche Funktion der Größen v.

Die Integralsummen 3. und 2. Gattung

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi\eta} = T_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(p)} \\ c^{(1)} c^{(2)} \ldots c^{(p)} \end{pmatrix}, \tag{212}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} dZ_{\xi} = \Upsilon_{\xi}\begin{pmatrix} x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(p)} \\ c^{(1)} c^{(2)} \ldots c^{(p)} \end{pmatrix} \tag{213}$$

heißen *Abel*sche Transzendenten; bei Änderung der u um ein Größensystem (211) wächst $T_{\xi\eta}$ bzw. Υ_{ξ} um

$$q_1 \int_{\eta}^{\xi} du_1 + q_2 \int_{\eta}^{\xi} du_2 + \cdots + q_p \int_{\eta}^{\xi} du_p, \tag{214}$$

$$q_1 \frac{\partial u_1(\xi)}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial u_2(\xi)}{\partial \xi} + \cdots + q_p \frac{\partial u_p(\xi)}{\partial \xi}. \tag{215}$$

Bezeichnet man mit η die Schnittpunkte der Grundkurve $F = 0$ mit der Kurve $\psi = 0$, mit ξ die Schnittpunkte von $F = 0$ mit einer Kurve $\varphi - \lambda\psi = 0$, so ist nach dem *Abel*schen Theorem (II B 2, Nr. 42)

$$\log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}} - \lambda\right] - \log\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(i)}} - \lambda\right] = -\sum \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi\eta}, \tag{216}$$

$$(i = 1, 2, \ldots p)$$

wo die letzte Summe über die Schnittpunktpaare ξ, η zu erstrecken ist, und man erhält hieraus

$$\prod_{i=1}^{p}\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}} - \lambda\right] = \prod_{i=1}^{p}\left[\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(i)}} - \lambda\right] \cdot e^{-\sum T_{\xi\eta}\left(\begin{smallmatrix} x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(p)} \\ c^{(1)} c^{(2)} \ldots c^{(p)} \end{smallmatrix}\right)}. \tag{217}$$

Bezeichnet man daher mit $M_1, M_2, \ldots M_p$ die Koeffizienten jener Gleichung p^{ten} Grades

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^p + M_1\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^{p-1} + \cdots + M_{p-1}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) + M_p = 0, \tag{218}$$

welche die Werte $\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}}$, $i = 1, 2, \ldots p$, als Wurzeln hat, so folgt

$$\lambda^p + M_1 \lambda^{p-1} + \cdots + M_{p-1} \lambda + M_p = N, \tag{219}$$

wo N außer Konstanten nur Funktionen T enthält, und man braucht diese Gleichung nur für p verschiedene Werte von λ anzuschreiben, um daraus $M_1, M_2, \ldots M_p$ zu berechnen, die sich also als rationale Verbindungen verschiedener Transzendenten $e^{T\xi\eta}$ ergeben.

Die Transzendente $T_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(p)} \\ \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(p)} \end{pmatrix}$, welche von $2p + 2$ Punkten, nämlich von ξ, η, den p Punkten x und den p Punkten α abhängt, kann zunächst durch speziellere, nur von $p + 2$ Punkten abhängige ausgedrückt werden.

Zu dem Ende konstruiere man zwei adjungierte Kurven $n - 2^{\text{ten}}$ Grades, welche beide durch die von ξ, η verschiedenen Schnittpunkte der Geraden $\xi\eta$ mit der Grundkurve $F = 0$ hindurchgehen und von denen die eine die p Punkte x, die andere die p Punkte α enthält. Sie sind dadurch im allgemeinen vollständig bestimmt, und wenn man ihre p letzten Schnittpunkte mit der Grundkurve $F = 0$ mit $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(p)}$ bzw. $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots \beta^{(p)}$ bezeichnet, so ist nach dem *Abel*schen Theorem

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi\eta} + \sum_{i=1}^{p} \int_{\beta^{(i)}}^{y^{(i)}} d\Pi_{\xi\eta} = 0 \tag{220}$$

und deshalb

$$T_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(p)} \\ \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(p)} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} T_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(p)} \\ y^{(1)} y^{(2)} \ldots y^{(p)} \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} T_{\xi\eta}\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(p)} \\ \beta^{(1)} \beta^{(2)} \ldots \beta^{(p)} \end{pmatrix}. \tag{221}$$

Da die y durch die x und ebenso die β durch die α bestimmt sind, so hängt jede der beiden rechts auftretenden Funktionen nur von $p + 2$ Punkten ab; diese „speziellen Transzendenten" sollen dementsprechend mit $T_{\xi\eta}(x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(p)})$ und $T_{\xi\eta}(\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(p)})$ oder kürzer mit $T_{\xi\eta}(x)$ und $T_{\xi\eta}(\alpha)$ bezeichnet werden.

Nun zeigen *Clebsch* und *Gordan* weiter, daß jede spezielle Transzendente $T_{\xi\eta}(x)$ die Differenz zweier gleichartiger Funktionen ist, von denen die eine nur ξ, die andere nur η enthält.

Zu dem Ende beachte man, daß man durch je $p - 1$ der Punkte x, z. B. durch $x^{(1)}, \ldots x^{(i-1)}, x^{(i+1)}, \ldots x^{(p)}$ immer eine adjungierte Kurve $n - 3^{\text{ten}}$ Grades legen kann; diese schneidet dann die Grundkurve in $p - 1$ weiteren Punkten, die mit $x^{1i}, x^{2i}, \ldots x^{i-1,i}, x^{i+1,i}, \ldots x^{pi}$ bezeichnet werden. Die p Transzendenten

$$T_{x^{(i)}\eta}(x^{1i} x^{2i} \ldots x^{i-1,i} \xi x^{i+1,i} \ldots x^{pi}) = T^{(i)} \tag{222}$$

nennen *Clebsch* und *Gordan* das System der $T_{\xi\eta}(x)$ „adjungierten Transzendenten“ und zeigen, daß

$$(223)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial T^{(1)}}{\partial x^{(1)}}dx^{(1)}+\cdots+\frac{\partial T^{(p)}}{\partial x^{(p)}}dx^{(p)}\right)=dU(x^{(1)},\ldots x^{(p)};\xi)$$

ein vollständiges Differential ist und daß sich durch die so definierte Funktion U die Transzendente $T_{\xi\eta}(x)$ nunmehr darstellen lasse in der Form

$$(224)\qquad \tfrac{1}{2}T_{\xi\eta}(x)=U(x^{(1)},x^{(2)},\ldots x^{(p)};\xi)-U(x^{(1)},x^{(2)},\ldots x^{(p)};\eta),$$

womit die Zerlegung von $T_{\xi\eta}(x)$ in zwei gleichartige Funktionen mit je $p+1$ Argumenten durchgeführt ist.

Die Funktion $U(x^{(1)},\ldots x^{(p)};\xi)$ wird nur unendlich, wenn ξ mit einem der Punkte x zusammenfällt oder, bei beliebigem ξ, wenn die x auf einer φ-Kurve liegen, und zwar verhält sich in allen diesen Fällen U wie der negative Logarithmus einer verschwindenden Größe. Die Funktion $V=e^{-U}$ ist also eine Funktion der Punkte $x^{(1)}, x^{(2)},\ldots x^{(p)};\xi$, welche niemals unendlich groß wird und nur verschwindet, wenn ξ mit einem der Punkte x zusammenfällt oder, bei beliebigem ξ, wenn die Punkte x durch eine φ-Kurve verknüpft sind.

Mit der Funktion V haben *Clebsch* und *Gordan* im wesentlichen die *Riemann*sche Thetafunktion erhalten.

Betrachtet man nämlich V, das in Wirklichkeit nur von p Größen, nämlich

$$(225)\qquad \sum_{i=1}^{p}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}}du_h-\int_{\mu}^{\xi}du_h \qquad (h=1,2,\ldots p),$$

abhängig ist, als Funktion der p Variablen

$$(226)\qquad w_h=\sum_{i=1}^{p}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}}du_h-\int_{\mu}^{\xi}du_h+K_h, \qquad (h=1,2,\ldots p)$$

wo μ ein fester Punkt ist und die K_h Konstanten bezeichnen, so ist V eine einwertige und für alle endlichen Werte ihrer Argumente stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

Bestimmt man die Konstanten K aus den Gleichungen

$$(227)\qquad 2K_h+\sum_{i=1}^{p}\int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}}du_h+\sum_{i=1}^{p}\int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}}du_h-\int_{\mu}^{\xi}du_h-\int_{\mu}^{\eta}du_h=0,$$
$$(h=1,2,\ldots p)$$

so ändert sich, der Gleichung

$$(228)\qquad V(x^{(1)},x^{(2)},\ldots x^{(p)};\xi)=\pm V(y^{(1)},y^{(2)},\ldots y^{(p)};\eta)$$

entsprechend, V nicht oder nur sein Zeichen, wenn man die w sämtlich gleichzeitig ihr Vorzeichen ändern läßt.

Läßt man weiter die w_h um Ausdrücke von der Form (211) wachsen, so erlangt V den Faktor

$$e^{\sum w_h \varrho_h + \frac{1}{2}\sum a_{hk}\varrho_h\varrho_k + \left(\sum \varkappa_h m_h + \sum \lambda_h \varrho_h\right)\pi i}, \tag{229}$$

in welchem die $\varkappa, \lambda$ ganze Zahlen bezeichnen, deren Bedeutung später erkannt wird. Auf Grund dieser Eigenschaft läßt sich V, wenn

$$\omega_h = w_h - \lambda_h \pi i - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \varkappa_i a_{ih} \qquad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{230}$$

gesetzt wird, nach ganzen Potenzen der Größen e^{ω_h} entwickeln in der Gestalt

$$V = A_0 e^{\frac{1}{2}\sum \varkappa_h \omega_h}\, \Theta(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p), \tag{231}$$

wo

$$\Theta(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p) = \sum_{r_1, \ldots r_p}^{-\infty, \ldots +\infty} e^{-\frac{1}{2}\sum r_h r_k a_{hx} + \sum r_h \omega_h} \tag{232}$$

ist. Die Konstante A_0 bestimmt sich, indem man für $x^{(1)}, \ldots x^{(p)}; \xi$ jene Anfangswerte einführt, bei denen $U = 0$, also $V = 1$ wird.

In den die Konstanten K_h definierenden Gleichungen (227) sind ξ, η zwei beliebige Punkte der Grundkurve, $x^{(1)}, \ldots x^{(p)}$, $y^{(1)}, \ldots y^{(p)}$ die $2p$ weiteren Schnittpunkte einer gleichfalls beliebigen durch die Schnittpunkte der Geraden $\xi\eta$ mit der Grundkurve gehenden adjungierten Kurve $n - 2^{\text{ten}}$ Grades. Läßt man ξ, η mit dem festen Punkte μ zusammenfallen, wodurch die Gerade $\xi\eta$ zur Tangente an die Grundkurve in μ wird, und läßt auch die $2p$ Punkte x, y paarweise zusammenfallen in p Punkte, die mit $\varepsilon^{(1)}, \ldots \varepsilon^{(p)}$ bezeichnet seien, so wird

$$K_h = -\sum_{i=1}^{p} \int_{c^{(i)}}^{\varepsilon^{(i)}} du_h. \qquad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{233}$$

Solche adjungierte Kurven $n - 2^{\text{ten}}$ Grades, welche durch die $n - 2$ Schnittpunkte der Grundkurve mit einer ihrer Tangenten gehen und sie in p weiteren Punkten berühren, gibt es 2^{2p}. Sind $\alpha^{(1)}, \ldots \alpha^{(p)}$ die p Berührungspunkte einer zweiten, so ist stets

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{\varepsilon^{(i)}}^{\alpha^{(i)}} du_h = \lambda_h \pi i + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \varkappa_i a_{ih}, \qquad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{234}$$

wo die $\varkappa, \lambda$ ganze Zahlen sind, und umgekehrt entspricht jedem aus

Werten 0, 1 gebildeten Systeme von $2p$ Zahlen $\varkappa$, λ eine solche Kurve (vgl. Nr. 57).

Wählt man in (230) und (234) für die $\varkappa$, λ die gleichen Werte, so folgt

$$\omega_h = \sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h \tag{235}$$

und man erhält so 2^{2p} verschiedene Thetafunktionen

$$\Theta\left(\sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h\right), \tag{236}$$

von denen jede entweder durch die p Berührungspunkte $\alpha^{(1)}, \ldots \alpha^{(p)}$ der ihr zugeordneten adjungierten Kurve $n - 2^{\text{ten}}$ Grades oder durch die in (229) auftretenden ganzen Zahlen $\varkappa$, λ charakterisiert werden kann.

Es können jetzt die speziellen Transzendenten $T(x^{(1)}, \ldots x^{(p)}; \xi)$ und damit auch die in (212) definierten allgemeinen $T_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(p)} \\ c^{(1)} c^{(2)} \ldots c^{(p)} \end{pmatrix}$ und die in (217) auftretenden Produkte $\prod_{i=1}^{p} \frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}} - \lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(i)}} - \lambda}$ durch Thetafunktionen ausgedrückt werden. Die letzteren Ausdrücke liefern dann eine Lösung des *Jacobi*schen Umkehrproblems (210). Läßt man weiter $p - 1$ der Punkte x mit $p - 1$ der Punkte c zusammenfallen, so erhält man Ausdrücke für ein einzelnes Integral 3. Gattung und für einen einzelnen Quotienten $\frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_x - \lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_c - \lambda}$ durch Thetafunktionen. Alle diese Fragen werden unten in den Nr. 49—53 im Zusammenhange dargestellt werden. Ebenso wird in Nr. 54 die umgekehrte Aufgabe gelöst, passend gewählte Kombinationen von Thetafunktionen durch algebraische Funktionen auszudrücken, welche *Clebsch* und *Gordan* am Schlusse des neunten Abschnittes behandeln. Sie sprechen ihr Endresultat dort in dem Satze aus:

Nennt man ein Produkt

$$\Theta(\omega + m^{(1)})\Theta(\omega + m^{(2)}) \ldots \Theta(\omega + m^{(\varrho)}) \tag{237}$$

ein vollständiges Thetaprodukt, sobald die Größen m den p Gleichungen

$$m_h^{(1)} + m_h^{(2)} + \cdots + m_h^{(\varrho)} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{238}$$

genügen, so ist der Quotient zweier vollständigen Thetaprodukte von

gleichviel Faktoren und mit denselben Variabeln ω eine rationale Funktion der Koordinaten der Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(p)}$; ξ, welche mit den ω durch die Gleichungen (235) verbunden sind,

schließen daraus den weiteren Satz (vgl. Nr. **34**):

Zwischen je $p+2$ vollständigen Thetaprodukten von gleichviel Faktoren besteht eine homogene algebraische Gleichung,

und sprechen endlich die Lösung des *Jacobi*schen Umkehrproblems in der Form aus:

Die symmetrischen Funktionen der Koordinaten der x, mithin auch die Koeffizienten einer Gleichung, deren Wurzeln die Funktionswerte $\varphi(x^{(1)}), \varphi(x^{(2)}), \ldots \varphi(x^{(p)})$ sind, lassen sich als homogene rationale Funktionen von $p+2$ im allgemeinen beliebig zu wählenden vollständigen Thetaprodukten mit gleichviel Faktoren darstellen, zwischen denen selbst eine algebraische Gleichung stattfindet.

Später hat *Noether*[128]) die Untersuchungen von *Clebsch* und *Gordan* wieder aufgenommen und in mehreren Punkten ergänzt und verbessert.

Während insbesondere *Clebsch* und *Gordan* (der *Riemann*schen Darstellung von $d \log \vartheta^{(1)}$ in Art. 25 seiner Theorie der *Abel*schen Funktionen entsprechend) die Transzendente $T_{\xi\eta}\binom{x}{\alpha}$ zuerst auf Funktionen von nur $p+1$ Punkten der Grundkurve zurückführen und dann erst diese als Funktionen der Integralsummen 1. Gattung betrachten, schlägt *Noether* das *Weierstraß*sche Verfahren (vgl. Nr. 7) ein, sogleich von vornherein die Summe der Integrale 3. Gattung als Funktion der Integralsummen 1. Gattung aufzufassen. Es wird dadurch die ziemlich umständliche Zerlegung von $T_{\xi\eta}\binom{x}{\alpha}$ in die „speziellen“ und „adjungierten“ Transzendenten umgangen, deren Darstellung rückwärts ziemlich leicht gelingt.

48. Weierstraß (Vorlesungen). In seinen Vorlesungen über die Theorie der *Abel*schen Transzendenten[129]) stellt *Weierstraß* das *Jacobi*sche Umkehrproblem in der folgenden Form auf:

Aus den ϱ algebraischen Gleichungen

$$f(x_\alpha, y_\alpha) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{239}$$

und den ϱ Differentialgleichungen

128) Math. Ann. 37 (1890), p. 417 u. 465; schon vorher Erl. Ber. 16 (1884), p. 88.

129) Math. Werke 4 (1902); der Veröffentlichung liegen hauptsächlich die Vorlesungen vom W.-S. 1875/76 und S.-S. 1876 zugrunde.

$$(240)\qquad \begin{aligned} du_1 &= \sum_{\alpha=1}^{\varrho} H(x_\alpha y_\alpha)_1\, dx_\alpha, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ du_\varrho &= \sum_{\alpha=1}^{\varrho} H(x_\alpha y_\alpha)_\varrho\, dx_\alpha \end{aligned}$$

(über die Bedeutung der H in II B 2, Nr. 23) mit der Nebenbedingung, daß für $u_1 = 0, \ldots u_\varrho = 0$ die Paare $(x_\alpha y_\alpha)$ gleich gegebenen Wertepaaren $(a_\alpha b_\alpha)$ werden, sind die 2ϱ Größen x_α, y_α als Funktionen der ϱ unabhängigen Veränderlichen $u_1, \ldots u_\varrho$ darzustellen.

Zunächst weist *Weierstraß* unter der Voraussetzung, daß die Determinante

$$(241)\qquad |H(a_\alpha b_\alpha)_\beta| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \varrho)$$

nicht gleich Null ist, nach, daß für Werte $u_1, \ldots u_\varrho$, die dem absoluten Betrage nach hinreichend klein sind, also einem gewissen Bereiche U_0 angehören, die Größen x_α, y_α sich nach Potenzen von $u_1, \ldots u_\varrho$ entwickeln lassen, und zugleich, daß die erhaltenen Potenzreihen

$$(242)\qquad x_\alpha = \varphi_\alpha(u_1, \ldots u_\varrho), \quad y_\alpha = \psi_\alpha(u_1, \ldots u_\varrho) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho)$$

die einzigen sind, welche die gestellte Bedingung erfüllen.

Aus dem *Abel*schen Theorem für die Integrale 1. Gattung folgt dann unmittelbar, daß die 2ϱ Funktionenelemente x_α, y_α ein algebraisches Additionstheorem[130]) besitzen, aber weiter auch, daß sie bei Ausdehnung des Bereiches ihrer Argumente nicht eindeutig bleiben. Wählt man nämlich, falls die u nicht mehr im Bereiche U_0 liegen, eine positive ganze Zahl n so, daß es für die Größen $\frac{1}{n} u_1, \ldots \frac{1}{n} u_\varrho$ zutrifft, und ist

$$(243)\qquad \varphi_\alpha\left(\frac{u_1}{n}, \cdots \frac{u_\varrho}{n}\right) = \xi_\alpha, \quad \psi_\alpha\left(\frac{u_1}{n}, \cdots \frac{u_\varrho}{n}\right) = \eta_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho),$$

so ist zu dem n-fach gezählten Paare $(\xi_\alpha \eta_\alpha)$ korresidual das $n-1$-fach gezählte Paar $(a_\alpha b_\alpha)$ und das Paar $(x_\alpha y_\alpha)$. Daraus folgt, daß $x_1, \ldots x_\varrho$ die ϱ Wurzeln einer algebraischen Gleichung ϱ^{ten} Grades

$$(244)\qquad P_0 x^\varrho + P_1 x^{\varrho-1} + \cdots + P_{\varrho-1} x + P_\varrho = 0$$

130) *Weierstraß* hat sich in seinen Vorlesungen wiederholt mit der Aufgabe beschäftigt, unter der Voraussetzung, daß ϱ Funktionen von ϱ Veränderlichen existieren, welche innerhalb eines beliebig kleinen Bereiches dieser einwertig sind und ein algebraisches Additionstheorem besitzen, den analytischen Charakter dieser Funktionen und ihren Zusammenhang mit den *Abel*schen Transzendenten zu untersuchen; vgl. dazu *Brill* und *Noether*, D. M. V. Jahresb. 3 (1894), p. 405; *Painlevé*, Leçons etc. professées à Stockholm 1895, Paris C. R. 122 (1896), p. 660 und Acta math. 27 (1903), p. 1.

sind, während sich das zu x_α gehörige y_α rational durch x_α in der Form

$$y_\alpha = \frac{Q_1 x_\alpha^{\varrho-1} + Q_2 x_\alpha^{\varrho-2} + \cdots + Q_\varrho}{Q_0} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{245}$$

darstellen läßt, wobei die P und Q einwertige Funktionen der u sind, die sich, da n beliebig groß genommen werden kann, für jeden beliebig großen Bereich als konvergente Potenzreihen dieser Größen darstellen lassen; auch zeigt man leicht, daß die Werte der Funktionen x_α, y_α von der ganzen Zahl n unabhängig sind.

Für singuläre Wertesysteme $\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_\varrho$ kann eine Unbestimmtheit in den Werten der zugehörigen Paare $(\bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha)$ eintreten, dadurch daß alle Koeffizienten $P_0, P_1, \ldots P_\varrho$ gleichzeitig verschwinden; dieser Fall tritt nur dann ein, wenn die Determinante

$$|H(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)_\beta| = 0 \tag{246}$$

ist. Die Gesamtheit dieser singulären Wertesysteme $\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_\varrho$ bildet aber nur ein Kontinuum von $2\varrho - 4$ Dimensionen, so daß die Möglichkeit verbleibt, von jedem regulären System zu jedem anderen durch eine stetige Folge solcher zu gelangen.[131])

Jede rationale symmetrische Funktion der Wertepaare x_α, y_α als Funktion der u aufgefaßt, heißt eine *Abel*sche Funktion der ϱ Variablen $u_1, \ldots u_\varrho$ und es wird bewiesen,

1. daß ϱ unabhängige dieser Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_\varrho$ ein algebraisches Additionstheorem besitzen, in dem Sinne, daß jede Funktion $\Phi_\alpha(u_1 + v_1, \ldots u_\varrho + v_\varrho)$ sich algebraisch durch die 2ϱ Funktionen

$$\Phi_1(u_1, \ldots u_\varrho), \ldots \Phi_\varrho(u_1, \ldots u_\varrho), \quad \Phi_1(v_1, \ldots v_\varrho), \ldots \Phi_\varrho(v_1, \ldots v_\varrho)$$

(oder rational durch sie und ihre ersten partiellen Ableitungen) ausdrücken läßt,

2. daß diese Funktionen 2ϱ-fach periodische Funktionen sind.

Es handelt sich nun um die Aufgabe, diese *Abel*schen Funktionen durch analytische Ausdrücke darzustellen, die für alle endlichen Werte der Argumente gültig sind. Um diese Aufgabe zu lösen, knüpft *Weierstraß* an die von ihm eingeführte Primfunktion $E(xy; x_2 y_1, x_0 y_0)$ (vgl. II B 2, Nr. 38) an. Das Produkt von ϱ Primfunktionen

$$E(xy; u_1, \ldots u_\varrho) = \prod_{\alpha=1}^{\varrho} E(xy; x_\alpha y_\alpha, a_\alpha b_\alpha) \tag{247}$$

131) Zu dem Vorstehenden auch *Noether*, Math. Ann. 37 (1890), p. 477 und *Prym* und *Rost*, Prymsche Funkt. II, p. 245 u. f. Hier wird auch gezeigt, daß die Gleichung (246) durch Zuzammenfallen von Paaren $(x_\alpha y_\alpha)$ eintreten kann, ohne daß das Umkehrproblem unbestimmt zu werden braucht, vgl. auch *Tikhomandritzky*, Int. abél., p. 202; dazu ferner Charkow Ges. 7 (1900), p. 38; J. f. Math. 126 (1903), p. 283; 2me Congr. intern. Paris 1900 (1902), p. 273 und l'Ens. math. 15 (1913), p. 384.

stellt eine einwertige transzendente Funktion sowohl des Wertepaares (xy) als auch der p Veränderlichen $u_1, \dots u_\varrho$ dar, welche als Funktion von (xy) an den p Stellen $(x_\alpha y_\alpha)$ 0^1 wird, an den Stellen $(a_\alpha b_\alpha)$ aber wesentlich singulär sich verhält. Mit ihr hängen die ϱ Funktionen $J(u_1, \dots u_\varrho)_\beta$ eng zusammen, die Integralsummen 2. Gattung sind, indem

$$dJ(u_1, \dots u_\varrho)_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} H'(x_\alpha y_\alpha)_\beta dx_\alpha \qquad (\beta = 1, 2, \dots \varrho) \tag{248}$$

ist, die aber von *Weierstraß* hier als Entwicklungskoeffizienten von $-\log E(xy; u_1, \dots u_\varrho)$ in der Umgebung der Stelle $(a_\beta b_\beta)$ eingeführt werden.

Von der Funktion

$$E(xy, x_0y_0; u_1, \dots u_\varrho) = \frac{E(xy; u_1, \dots u_\varrho)}{E(x_0y_0; u_1, \dots u_\varrho)} \tag{249}$$

zeigt nun *Weierstraß*, daß sie sich, als Funktion der p Größen $u_1, \dots u_\varrho$ betrachtet, als Quotient zweier beständig konvergenter Potenzreihen darstellen läßt. Zu dem Ende wird erstens gezeigt, daß eine Gleichung von der Form

$$\begin{aligned} &d \log E(xy, x_0y_0; u_1, \dots u_\varrho) \\ &= \sum_{\beta=1}^{\varrho} f_\beta(u_1, \dots u_\varrho)\, du_\beta - \sum_{\beta=1}^{\varrho} g_\beta(u_1, \dots u_\varrho)\, du_\beta \end{aligned} \tag{250}$$

besteht, in der die 2ϱ Funktionen $f_\beta(u_1, \dots u_\varrho)$ und $g_\beta(u_1, \dots u_\varrho)$ eindeutige Funktionen ohne wesentlich singuläre Stellen im Endlichen sind, zweitens, daß die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial u_\beta}, \qquad \frac{\partial g_\beta}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial g_\alpha}{\partial u_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots \varrho) \tag{251}$$

erfüllt sind, und drittens, daß nach Substitution der linearen Funktionen $k_1 + k_1'\tau, \dots k_\varrho + k_\varrho'\tau$ für die Veränderlichen $u_1, \dots u_\varrho$ bei hinlänglich kleinen Werten von $|\tau|$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^{\varrho} f_\beta(u_1, \dots u_\varrho)\, du_\beta &= (\mu_1 \tau^{-1} + \mathfrak{P}_1(\tau))\, d\tau, \\ \sum_{\beta=1}^{\varrho} g_\beta(u_1, \dots u_\varrho)\, du_\beta &= (\mu_2 \tau^{-1} + \mathfrak{P}_2(\tau))\, d\tau \end{aligned} \tag{252}$$

bestehen, wo μ_1 und μ_2 ganze positive Zahlen oder Null sind. Dann existieren nach einem Satze, den *Weierstraß* in seiner Abhandlung: „Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehenden Sätze“[132]) bewiesen hat, zwei beständig

132) Abh. a. d. Funktionenlehre, 1886, p. 139 = Math. W. 2 (1895), p. 165.

konvergente Potenzreihen $F(u_1, \dots u_\varrho)$ und $G(u_1, \dots u_\varrho)$, für welche

$$\sum_{\beta=1}^{\varrho} f_\beta(u_1, \dots u_\varrho)\, du_\beta = d \log F(u_1, \dots u_\varrho),$$

(253)

$$\sum_{\beta=1}^{\varrho} g_\beta(u_1, \dots u_\varrho)\, du_\beta = d \log G(u_1, \dots u_\varrho)$$

ist, und mithin wird, wie behauptet

$$E(xy, x_0y_0; u_1, \dots u_\varrho) = C \cdot \frac{F(u_1, \dots u_\varrho)}{G(u_1, \dots u_\varrho)}. \tag{254}$$

Die im Zähler und Nenner der rechten Seite auftretenden Potenzreihen hängen in einfacher Weise miteinander und mit den in (248) eingeführten Integralsummen 2. Gattung zusammen. Definiert man nämlich eine Funktion $f(u_1, \dots u_\varrho)$ durch die Gleichung

$$d \log f(u_1, \dots u_\varrho) = \sum_{\beta=1}^{\varrho} J(u_1 + w_{1\beta}, \dots u_\varrho + w_{\varrho\beta})_\beta\, du_\beta, \tag{255}$$

so wird

$$E(xy, x_0y_0; u_1, \dots u_\varrho) = \frac{f(u_1 - w_1, \dots u_\varrho - w_\varrho)\, e^{\sum_\beta J'(xy)_\beta u_\beta}}{f(u_1 - w_1{}^0, \dots u_\varrho - w_\varrho{}^0)\, e^{\sum_\beta J'(x_0y_0)_\beta u_\beta}}; \tag{256}$$

dabei sind mit w_α die Integrale 1. Gattung

$$w_\alpha = J(xy)_\alpha = \int_{(a_0b_0)}^{(xy)} H(xy)_\alpha\, dx, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots \varrho) \tag{257}$$

mit w_α^0 und $w_{\alpha\beta}$ deren Werte an den Stellen (x_0y_0) und $(a_\beta b_\beta)$ bezeichnet, während $J'(xy)_\beta$ die *Weierstraß*schen Integrale 2. Gattung sind.

Die Zerlegung des Differentials $d \log E(xy, x_0y_0; u_1, \dots u_\varrho)$ in die angegebenen beiden Bestandteile hat *Weierstraß* zunächst für die hyperelliptischen Funktionen auf einem sehr mühsamen Wege durchgeführt. Erst als sich hinterher der Zusammenhang der Funktionen $f_\beta(u_1, \dots u_\varrho)$ und $g_\beta(u_1, \dots u_\varrho)$ mit Integralsummen 2. Gattung gezeigt hatte, konnte er durch verhältnismäßig einfache Rechnung zum Ziele gelangen, indem er von vorneherein die Integrale 2. Gattung einführte (vgl. dazu p. 625).

Für die Funktion $f(u_1, \dots u_\varrho)$ ergeben sich auf Grund ihrer Definitionsgleichung die Periodizitätseigenschaften

$$\begin{aligned} f(u_1 + 2\omega_{1\beta}, \dots u_\varrho + 2\omega_{\varrho\beta}) &= f(u_1, \dots u_\varrho)\, e^{\sum_\alpha 2\eta_{\alpha\beta}(u_\alpha + \omega_{\alpha\beta}) + \mu'_\beta \pi i}, \\ f(u_1 + 2\omega'_{1\beta}, \dots u_\varrho + 2\omega'_{\varrho\beta}) &= f(u_1, \dots u_\varrho)\, e^{\sum_\alpha 2\eta'_{\alpha\beta}(u_\alpha + \omega'_{\alpha\beta}) - \mu_\beta \pi i}, \\ (\beta &= 1, 2, \dots \varrho) \end{aligned} \tag{258}$$

in denen die μ, μ' unbestimmt bleibende Konstanten bezeichnen. Führt man an ihrer Stelle $2p$ Größen $\bar{\omega}_\alpha$, $\bar{\eta}_\alpha$ ein durch die Gleichungen

$$\bar{\omega}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\varrho} (\mu_\beta \omega_{\alpha\beta} + \mu'_\beta \omega'_{\alpha\beta}), \quad \bar{\eta}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\varrho} (\mu_\beta \eta_{\alpha\beta} + \mu'_\beta \eta'_{\alpha\beta}) \tag{259}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots \varrho)$$

und setzt

$$f(u_1, \ldots u_\varrho) = C\Theta(u_1 + \bar{\omega}_1, \ldots u_\varrho + \bar{\omega}_\varrho)\, e^{-\sum_\alpha \bar{\eta}_\alpha (u_\alpha + \bar{\omega}_\alpha)}, \tag{260}$$

so genügt die neue Funktion $\Theta(u_1, \ldots u_\varrho)$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Theta(u_1 + 2\omega_{1\beta}, \ldots u_\varrho + 2\omega_{\varrho\beta}) &= \Theta(u_1, \ldots u_\varrho)\, e^{\sum_\alpha 2\eta_{\alpha\beta}(u_\alpha + \omega_{\alpha\beta})}, \\ \Theta(u_1 + 2\omega'_{1\beta}, \ldots u_\varrho + 2\omega'_{\varrho\beta}) &= \Theta(u_1, \ldots u_\varrho)\, e^{\sum_\alpha 2\eta'_{\alpha\beta}(u_\alpha + \omega'_{\alpha\beta})}. \end{aligned} \tag{261}$$
$$(\beta = 1, 2, \ldots \varrho)$$

Um zu einer Darstellung der Funktion $\Theta(u_1, \ldots u_\varrho)$ zu gelangen, führt man an Stelle der u neue Variable v ein mit Hilfe der Gleichungen

$$u_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\varrho} 2\omega_{\alpha\beta} v_\beta. \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{262}$$

Dies setzt voraus, daß die Determinante

$$|\omega_{\alpha\beta}| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{263}$$

nicht verschwindet. Dazu bemerkt *Weierstraß*, daß sich dies aus der Definition der Perioden der *Abel*schen Integrale 1. Gattung nicht beweisen lasse; es könne nur gezeigt werden, daß unter den möglichen Systemen der Größen ω, welche der aus den ω und ω' gebildeten Matrix entnommen werden, immer solche vorhanden sind, deren Determinante von Null verschieden ist. Erst mit Hilfe der Eigenschaften der Thetafunktion stellt sich dann heraus, daß für jedes primitive System von Perioden die Determinante (263) nicht verschwindet, solange das Geschlecht des algebraischen Gebildes nicht $< \varrho$ ist.

Setzt man jetzt

$$\Theta(u_1, \ldots u_\varrho) = \vartheta(v_1, \ldots v_\varrho)\, e^{\sum_{\beta=1}^{\varrho} \sum_{\gamma=1}^{\varrho} 2\varepsilon_{\beta\gamma} v_\beta v_\gamma}, \tag{264}$$

wo

$$\varepsilon_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\gamma\beta} = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} \omega_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\gamma} \qquad (\beta, \gamma = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{265}$$

ist, und definiert weiter, indem man mit ω den Wert der Determinante (263) und mit $(\omega)_{\alpha\beta}$ die Adjunkte von $\omega_{\alpha\beta}$ in ihr bezeichnet, Größen τ durch die Gleichungen

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} = \sum_{\gamma=1}^{\varrho} \frac{(\omega)_{\gamma\alpha}\,\omega'_{\gamma\beta}}{\omega}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{266}$$

so genügt die neue Funktion $\vartheta(v_1, \ldots v_\varrho)$ den Bedingungen

$$\begin{aligned} &\vartheta(v_1, \ldots v_\beta + 1, \ldots v_\varrho) = \vartheta(v_1, \ldots v_\beta, \ldots v_\varrho), \\ &\vartheta(v_1 + \tau_{1\beta}, \ldots v_\varrho + \tau_{\varrho\beta}) = \vartheta(v_1, \ldots v_\varrho)\, e^{-(2v_\beta + \tau_{\beta\beta})\pi i} \\ &\qquad (\beta = 1, 2, \ldots \varrho) \end{aligned} \tag{267}$$

und kann auf Grund dieser in eine p-fach unendliche Reihe entwickelt werden in der Gestalt

$$\vartheta(v_1, \ldots v_\varrho) = \sum_{(n)} e^{\sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta \tau_{\alpha\beta}\pi i + 2\sum_\alpha n_\alpha v_\alpha \pi i}. \tag{268}$$

Daß diese Reihe für alle endlichen Werte der v konvergiert, folgt bei *Weierstraß* daraus, daß $\Theta(u_1, \ldots u_\varrho)$ für alle endlichen u endlich ist; die für die $\tau_{\alpha\beta}$ notwendige und hinreichende Eigenschaft, daß der reelle Teil von $i\sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta \tau_{\alpha\beta}$ für alle reellen n, die nicht alle gleichzeitig Null sind, negativ sein muß, folgt also hier aus der schon vorher erkannten Konvergenz.

Zur Darstellung der Funktion $E(xy, x_0y_0; u_1, \ldots u_\varrho)$ mit Hilfe von Thetafunktionen dient die aus den Gleichungen (256) und (260) folgende Gleichung

$$E(xy, x_0y_0; u_1, \ldots u_\varrho) = \frac{\Theta(-w_1^0 + \bar\omega_1, \ldots)}{\Theta(-w_1 + \bar\omega_1, \ldots)} \cdot \frac{\Theta(u_1 - w_1 + \bar\omega_1, \ldots)}{\Theta(u_1 - w_1^0 + \bar\omega_1, \ldots)} \cdot e^{\sum_{\alpha=1}^{\varrho} \{J'(xy)_\alpha - J'(x_0y_0)_\alpha\} u_\alpha}. \tag{269}$$

In dieser Gleichung haben aber jetzt die Größen $\bar\omega$ (abgesehen von ganzen Perioden) bestimmte Werte, die ermittelt werden müssen, und weiter sind die rechts im Exponenten auftretenden Integrale 2. Gattung auch durch Thetafunktionen auszudrücken.

Bezüglich des ersten Punktes findet *Weierstraß*

$$\bar\omega_\beta = -\widetilde{w}_\beta + c_\beta, \qquad (\beta = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{270}$$

wo

$$\widetilde{w}_\beta = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{2\varrho-2} J(p_\nu q_\nu)_\beta, \qquad c_\beta = \sum_{\gamma=1}^{\varrho} J(\alpha_\gamma \beta_\gamma)_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{271}$$

gesetzt ist und in der ersten Gleichung $(p_\nu q_\nu)$ die $2\varrho - 2$ Nullpunkte einer φ-Funktion sind. Indem aber die Integrationswege dieser Integrale nicht angegeben werden, ist das System der Größen $\widetilde{w}_\beta$, und damit auch der $\bar\omega_\beta$, nur bis auf ein bei *Weierstraß* unbe-

stimmt bleibendes System zusammengehöriger halben Perioden der Integrale 1. Gattung ermittelt.

Die Darstellung der Integrale 2. Gattung geschieht durch die aus (255) und (260) abgeleitete Formel

$$(272)\quad J'(xy)_\alpha - J'(x_0y_0)_\alpha = \frac{\Theta^{(\alpha)}(w_1 - \tilde{w}_1 - w_{1\alpha}, \ldots)}{\Theta(w_1 - \tilde{w}_1 - w_{1\alpha}, \ldots)} - \frac{\Theta^{(\alpha)}(w_1^0 - \tilde{w}_1 - w_{1\alpha}, \ldots)}{\Theta(w_1^0 - \tilde{w}_1 - w_{1\alpha}, \ldots)},$$

wo

$$(273)\quad \frac{\partial\Theta(u_1, \ldots u_\varrho)}{\partial u_\alpha} = \Theta^{(\alpha)}(u_1, \ldots u_\varrho)$$

gesetzt ist.

Setzt man in ähnlicher Weise, wie es zur Gewinnung von (272) geschehen ist, in (269) sämtliche Paare $(x_\gamma y_\gamma)$ gleich $(a_0 b_0)$ bis auf eines, das zuerst mit $(x_1 y_1)$, ein zweitesmal mit $(x_1' y_1')$ bezeichnet werde, und dividiert die beiden so entstehenden Gleichungen durcheinander, so erhält man, wenn

$$(274)\quad J(x_1y_1)_\alpha = \overset{\alpha}{w}, \qquad J(x_1'y_1')_\alpha = \overset{\alpha}{w}'$$

gesetzt wird,

$$(275)\quad \frac{E(xy; x_1y_1, x_1'y_1')}{E(x_0y_0; x_1y_1, x_1'y_1')}$$

$$= \frac{\Theta(\overset{1}{w} - w_1 - \tilde{w}_1, \ldots)}{\Theta(\overset{1}{w} - w_1^0 - \tilde{w}_1, \ldots)} \cdot \frac{\Theta(\overset{1}{w}' - w_1^0 - \tilde{w}_1, \ldots)}{\Theta(\overset{1}{w}' - w_1 - \tilde{w}_1, \ldots)}\, e^{\sum_\alpha (\mathfrak{G} - \mathfrak{G}')\{J'(xy)_\alpha - J'(x_0y_0)_\alpha\}}$$

und hat damit auch die Darstellung des Integrals 3. Gattung

$$(276)\quad \int_{(x_1'y_1')}^{(x_1y_1)} \{H(xy, x'y') - H(x_0y_0, x'y')\}\, dx' = \log \frac{E(xy; x_1y_1, x_1'y_1')}{E(x_0y_0; x_1y_1, x_1'y_1')}$$

durch Thetafunktionen erreicht.

Mittelst der Formel (269) kann nun auch die Frage nach jenen Wertesystemen der u beantwortet werden, für welche die Θ-Funktion verschwindet. Das Resultat lautet, daß die Funktion

$$(277)\quad \Theta(u_1 + \bar{\omega}_1, \ldots u_\varrho + \bar{\omega}_\varrho) = 0$$

ist, sobald

$$(278)\quad u_\alpha = t_\alpha - c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho)$$

ist, wo t_α eine Summe von $\varrho - 1$ Integralen 1. Gattung bezeichnet, also

$$(279)\quad t_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\varrho-1} J(x_\beta y_\beta)_\alpha$$

ist. Die Funktion (277) verschwindet daher insbesondere für alle singulären Wertesysteme $\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_\varrho$.

Bei der Darstellung *Abel*scher Funktionen durch Θ-Funktionen beschränkt sich *Weierstraß* auf Funktionen von der Form

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho} F(x_\alpha y_\alpha), \tag{280}$$

wo $F(xy)$ eine rationale Funktion des Paares (xy) bedeutet.

Sind $(\xi_1\eta_1)$, $(\xi_2\eta_2)$, ... die Nullstellen, $(\xi_1'\eta_1')$, $(\xi_2'\eta_2')$, ... die Unendlichkeitsstellen der Funktion $F(xy)$ und setzt man

$$J(\xi_\mu\eta_\mu)_\beta = w_{\beta\mu}, \quad J(\xi_\mu'\eta_\mu')_\beta = w'_{\beta\mu}, \tag{281}$$

wählt auch bei diesen Integralen die Integrationswege so, daß

$$\sum_{\mu}(w_{\beta\mu} - w'_{\beta\mu}) = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{282}$$

ist, so ist, wenn (ab) eine beliebige, von den Null- und Unendlichkeitsstellen von $F(xy)$ verschiedene Stelle des algebraischen Gebildes bezeichnet und die Variablen $u_1, \ldots u_\varrho$ und $u_1', \ldots u_\varrho'$ durch die Gleichungen

$$u_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} J(x_\alpha y_\alpha)_\beta - c_\beta, \quad u_\beta' = \varrho J(ab)_\beta - c_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{283}$$

eingeführt werden,

$$\prod_{\alpha=1}^{\varrho} \frac{F(x_\alpha y_\alpha)}{F(ab)} = \prod_{\mu} \frac{\Theta(u_1 + \bar{\omega}_1 - w_{1\mu}, \ldots)}{\Theta(u_1 + \bar{\omega}_1 - w'_{1\mu}, \ldots)} \cdot \frac{\Theta(u_1' + \bar{\omega}_1 - w'_{1\mu}, \ldots)}{\Theta(u_1' + \bar{\omega}_1 - w_{1\mu}, \ldots)} \tag{284}$$

Anderseits ist jedes Thetaprodukt

$$\prod_{\varkappa=1}^{r} \frac{\Theta(u_1 - u_1^\varkappa, \ldots u_\varrho - u_\varrho^\varkappa)}{\Theta(u_1 - v_1^\varkappa, \ldots u_\varrho - v_\varrho^\varkappa)}, \tag{285}$$

bei dem

$$\sum_{\varkappa=1}^{r} u_\alpha^{\,\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{r} v_\alpha^{\,\varkappa} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \varrho) \tag{286}$$

ist, für beliebiges r eine rationale und symmetrische Funktion der Paare $(x_1y_1), \ldots (x_\varrho y_\varrho)$, also eine *Abel*sche Funktion der Argumente $u_1, \ldots u_\varrho$.

Die hier zuletzt von *Weierstraß* behandelten Fragen des Zusammenhangs der Integrale 2. und 3. Gattung mit den Thetafunktionen und ebenso der Darstellung algebraischer Funktionen durch diese und umgekehrt, denen wir schon bei *Riemann* und ebenso bei *Clebsch* und *Gordan* begegnet sind, sollen jetzt im Zusammenhange dargestellt werden.

VII. Die Abelschen Transzendenten 2. und 3. Gattung. Wurzelfunktionen und Wurzelformen. Lösungen des Umkehrproblems.

49. Die Abelschen Transzendenten 2. und 3. Gattung. Mit $t_\alpha(z)$ werde das im Punkte $z = \alpha$ wie $\frac{1}{z-\alpha}\,\infty^1$ werdende Normalintegral 2. Gattung bezeichnet, dessen Periodizitätsmodulen an allen Querschnitten a_ν Null, an den Querschnitten b_ν aber $-2\pi i v_\nu'(\alpha)$ sind.

In der Folge mögen die Integrationsgrenzen als obere Indices angefügt, also für das Normalintegral 1. Gattung

$$\int_{z^0}^{z} dv_\mu(z) = v_\mu{}^{z^0 z} \tag{287}$$

und ebenso für das Integral 2. Gattung

$$\int_{z^0}^{z} dt_\alpha(z) = t_\alpha{}^{z^0 z} \tag{288}$$

geschrieben werden.

Läßt man nun in der letzten Gleichung an Stelle von $z^0 z$ der Reihe nach p Punktepaare $z_1{}^0 z_1, z_2{}^0 z_2, \ldots z_p{}^0 z_p$ treten und addiert die p so entstandenen Integrale, so entsteht der Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{p} t_\alpha{}^{z_\nu{}^0 z_\nu} = Y_\alpha\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_p \\ z_1{}^0 & z_2{}^0 & \ldots & z_p{}^0 \end{pmatrix}, \tag{289}$$

welcher als Funktion der Integralsummen 1. Gattung

$$\sum_{\nu=1}^{p} v_\mu{}^{z_\nu{}^0 z_\nu} = w_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{290}$$

betrachtet *Abel*sche Transzendente 2. Gattung genannt und mit

$$Z_\alpha(w_1, w_2, \ldots w_p) \tag{291}$$

oder kürzer $Z_\alpha(\!(w)\!)$ bezeichnet wird.

Mit $\pi_{\alpha\beta}(z)$ werde das im Punkte $z = \alpha$ wie $-\log(z-\alpha)$, im Punkte $z = \beta$ wie $+\log(z-\beta)$ logarithmisch unendlich werdende Normalintegral 3. Gattung bezeichnet, dessen Periodizitätsmodulen an allen Querschnitten a_ν gleichfalls Null, an den Querschnitten b_ν aber $2\pi i(v_\nu(\beta) - v_\nu(\alpha))$ sind und für welches die Vertauschbarkeit der Unendlichkeitsstellen mit den Integralgrenzen gilt, so daß

$$\int_{z_0}^{z} d\pi_{\alpha\beta}(z) = \int_{\alpha}^{\beta} d\pi_{z_0 z}(z) \tag{292}$$

oder, wenn man wieder die Integralgrenzen als obere Indices schreibt,

also

$$\int_{z^0}^{z} d\pi_{\alpha\beta}(z) = \pi_{\alpha\beta}^{z^0 z} \tag{293}$$

setzt,

$$\pi_{\alpha\beta}^{z^0 z} = \pi_{z^0 z}^{\alpha\beta} \quad \text{ist.} \tag{294}$$

Läßt man nun auch hier an Stelle von $z^0 z$ der Reihe nach die p Punktepaare $z_1^0 z_1$, $z_2^0 z_2$, $\ldots z_p^0 z_p$ treten und addiert die p so erhaltenen Integrale, so entsteht der Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{p} \pi_{\alpha\beta}^{z_\nu^0 z_\nu} = T_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_p \\ z_1^0 & z_2^0 & \ldots & z_p^0 \end{pmatrix}, \tag{295}$$

welcher als Funktion der Integralsummen 1. Gattung (290) betrachtet *Abel*sche Transzendente 3. Gattung genannt und mit

$$P_{\alpha\beta}(w_1, w_2, \ldots w_p) \tag{296}$$

oder kürzer $P_{\alpha\beta}(\!(w)\!)$ bezeichnet wird.

Da man das Integral 2. Gattung $t_\alpha(z)$ aus dem Integral 3. Gattung $\pi_{\alpha\beta}(z)$ durch Differentiation nach dem Parameter α erhält, also

$$t_\alpha(z) = \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}(z)}{\partial \alpha} \tag{297}$$

ist, so ist auch

$$Y_\alpha\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_p \\ z_1^0 & z_2^0 & \ldots & z_p^0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial \alpha} T_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_p \\ z_1^0 & z_2^0 & \ldots & z_p^0 \end{pmatrix} \tag{298}$$

oder

$$Z_\alpha(\!(w)\!) = \frac{\partial P_{\alpha\beta}(\!(w)\!)}{\partial \alpha}. \tag{299}$$

50. Eigenschaften der Funktionen $Z_\alpha(\!(w)\!)$ und $P_{\alpha\beta}(\!(w)\!)$. Für alle solchen Wertesysteme $w_1, w_2, \ldots w_p$, für welche das Umkehrproblem ein bestimmtes ist, die Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ also durch keine φ-Kurve verknüpft sind, sind $Z_\alpha(\!(w)\!)$ und $P_{\alpha\beta}(\!(w)\!)$ einwertige Funktionen von $w_1, w_2, \ldots w_p$. Es wird $Z_\alpha(\!(w)\!)$ ∞^1 mit dem Gewichte 1 wenn einer der Punkte z mit α zusammenfällt, $P_{\alpha\beta}(\!(w)\!)$ aber logarithmisch unendlich mit dem Gewichte ± 1, wenn einer der Punkte z mit α oder β zusammenfällt.

Ändert sich das Größensystem $w_1, w_2, \ldots w_p$ um ein System korrespondierender Ganzen $\left\{\begin{smallmatrix} \varkappa \\ \lambda \end{smallmatrix}\right\}$ der Periodizitätsmodulen von $v_1, v_2, \ldots v_p$, geht also (w) in $\left(w + \left|\begin{smallmatrix} \varkappa \\ \lambda \end{smallmatrix}\right|\right)$ über, so ist

$$Z_\alpha\left(\left(w + \left|\begin{smallmatrix} \varkappa \\ \lambda \end{smallmatrix}\right|\right)\right) = Z_\alpha(\!(w)\!) - 2\pi i \sum_{\mu=1}^{p} \varkappa_\mu v_\mu'(\alpha), \tag{300}$$

$$P_{\alpha\beta}\left(\left(w + \left|\begin{smallmatrix} \varkappa \\ \lambda \end{smallmatrix}\right|\right)\right) = P_{\alpha\beta}(\!(w)\!) + 2\pi i \sum_{\mu=1}^{p} \varkappa_\mu (v_\mu(\beta) - v_\mu(\alpha)). \tag{301}$$

Die Funktionen $Z_\alpha(\!(w)\!)$ und $P_{\alpha\beta}(\!(w)\!)$ besitzen weiter ein Additionstheorem. Um dies zu erhalten setze man

$$\sum_{\nu=1}^{p} v_\mu^{z_\nu^0 z_\nu} = w_\mu, \quad \sum_{\nu=1}^{p} v_\mu^{z_\nu^0 z_\nu'} = w_\mu' \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{302}$$

und bestimme p Punkte $z_1'', \ldots z_p''$ so, daß

$$\sum_{\nu=1}^{p} v_\mu^{z_\nu^0 z_\nu''} = w_\mu + w_\mu' \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{303}$$

ist; es kann dies in algebraischer Form geschehen, indem man auf Grund der aus (302) und (303) folgenden Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{p} v_\mu^{z_\nu^0 z_\nu} + \sum_{\nu=1}^{p} v_\mu^{z_\nu'' z_\nu'} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{304}$$

eine Funktion R der Klasse bildet, die ∞^1 wird in den $2p$ Punkten z_ν, z_ν' und 0^1 in den p Punkten z_ν^0; ihre p weiteren Nullpunkte sind dann die gesuchten Punkte z_ν''. Nach dem *Abel*schen Theorem ist dann (II B 2, Nr. 42)

$$\sum_{\nu=1}^{p} t_\alpha^{z_\nu^0 z_\nu} + \sum_{\nu=1}^{p} t_\alpha^{z_\nu'' z_\nu'} = \frac{\partial \log R(\alpha)}{\partial \alpha}, \tag{305}$$

$$\sum_{\nu=1}^{p} \pi_{\alpha\beta}^{z_\nu^0 z_\nu} + \sum_{\nu=1}^{p} \pi_{\alpha\beta}^{z_\nu'' z_\nu'} = \log \frac{R(\alpha)}{R(\beta)}, \tag{306}$$

und hieraus folgt

$$Z_\alpha(\!(w + w')\!) = Z_\alpha(\!(w)\!) + Z_\alpha(\!(w')\!) - \frac{\partial \log R(\alpha)}{\partial \alpha}, \tag{307}$$

$$P_{\alpha\beta}(\!(w + w')\!) = P_{\alpha\beta}(\!(w)\!) + P_{\alpha\beta}(\!(w')\!) - \log \frac{R(\alpha)}{R(\beta)}. \tag{308}$$

51. Darstellung der Abelschen Transzendenten 3. und 2. Gattung durch Thetafunktionen. Sind die Punktsysteme $z_1, z_2, \ldots z_p$ und $z_1^0, z_2^0, \ldots z_p^0$ so gewählt, daß keine der beiden Thetafunktionen identisch verschwindet, so wird die Funktion

$$F(z) = \frac{\vartheta\left(\left(v(z) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(z) - \sum_1^p v(z_\nu^0)\right)\right)} \tag{309}$$

0^1 für $z = z_1, z_2, \ldots z_p$, ∞^1 für $z = z_1^0, z_2^0, \ldots z_p^0$ und es ist weiter

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\mu\text{: } F^+ = F^-, \\ &\text{längs } b_\mu\text{: } F^+ = F^- \cdot e^{2\sum_{\nu=1}^{p}(v_\mu(z_\nu) - v_\mu(z_\nu^0))}. \end{aligned} \tag{310}$$

Dieselben Eigenschaften besitzt aber auch die Funktion

$$\Phi(z) = e^{\sum_{\nu=1}^{p} \pi_{z_\nu^0 z_\nu}(z)} \tag{311}$$

und es können sich daher $F(z)$ und $\Phi(z)$ nur um eine von z unabhängige multiplikative Konstante unterscheiden; es ist also

$$\frac{\vartheta\left(\left(v(z) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(z) - \sum_1^p v(z_\nu^0)\right)\right)} = c \cdot e^{\sum_{\nu=1}^{p} \pi_{z_\nu^0 z_\nu}(z)}, \tag{312}$$

wo c von z unabhängig ist.

Aus (312) folgt aber sofort

$$\frac{\vartheta\left(\left(v(\beta) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(\beta) - \sum_1^p v(z_\nu^0)\right)\right)} : \frac{\vartheta\left(\left(v(\alpha) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(\alpha) - \sum_1^p v(z_\nu^0)\right)\right)} = e^{T_{\alpha\beta}\binom{z_1 z_2 \dots z_p}{z_1^0 z_2^0 \dots z_p^0}} \tag{313}$$

oder

$$T_{\alpha\beta}\binom{z_1 \dots z_p}{z_1^0 \dots z_p^0} = \log\left\{\frac{\vartheta\left(\left(v(\beta) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(\beta) - \sum_1^p v(z_\nu^0)\right)\right)} : \frac{\vartheta\left(\left(v(\alpha) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(\alpha) - \sum_1^p v(z_\nu^0)\right)\right)}\right\}. \tag{314}$$

Setzt man daher

$$\sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(z_\nu) = w_\mu, \quad \sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(z_\nu^0) = w_\mu^0, \qquad (\mu = 1, 2, \dots p) \tag{315}$$

so wird

$$\sum_{\nu=1}^{p} v_\mu^{z_\nu^0 z_\nu} = w_\mu - w_\mu^0, \qquad (\mu = 1, 2, \dots p) \tag{316}$$

also $T_{\alpha\beta}\binom{z_1 \dots z_p}{z_1^0 \dots z_p^0} = P_{\alpha\beta}(\!(w - w^0)\!)$ und man erhält

$$P_{\alpha\beta}(\!(w - w^0)\!) = \log\left\{\frac{\vartheta(\!(v(\beta) - w)\!)}{\vartheta(\!(v(\beta) - w^0)\!)} : \frac{\vartheta(\!(v(\alpha) - w)\!)}{\vartheta(\!(v(\alpha) - w^0)\!)}\right\} \tag{317}$$

und

$$Z_\alpha(\!(w - w^0)\!) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \log \frac{\vartheta(\!(v(\alpha) - w)\!)}{\vartheta(\!(v(\alpha) - w^0)\!)}. \tag{318}$$

52. Lösung des Umkehrproblems. Ist $f(z)$ eine Funktion der Klasse von der Ordnung q, welche für $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_q$ den Wert a, für $z = \beta_1, \beta_2, \dots \beta_q$ den Wert b annimmt, so ist nach dem *Abel*schen Theorem

$$\sum_{\varkappa=1}^{q} \pi_{z^0 *}^{\alpha_\varkappa \beta_\varkappa} = \log\left\{\frac{f(z) - b}{f(z^0) - b} : \frac{f(z) - a}{f(z^0) - a}\right\} \tag{319}$$

und daher weiter, wenn man an Stelle von $z^0 z$ der Reihe nach die obigen Punktepaare $z_1^0 z_1, z_2^0 z_2, \ldots z_p^0 z_p$ treten läßt und die p so entstehenden Gleichungen addiert

$$\sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\varkappa=1}^{q} \pi_{z_\nu^0 z_\nu}^{\alpha_\varkappa \beta_\varkappa} = \log \prod_{\nu=1}^{p} \left\{ \frac{f(z_\nu) - b}{f(z_\nu^0) - b} : \frac{f(z_\nu) - a}{f(z_\nu^0) - a} \right\} \tag{320}$$

oder umgekehrt

$$\log \prod_{\nu=1}^{p} \left\{ \frac{f(z_\nu) - b}{f(z_\nu^0) - b} : \frac{f(z_\nu) - a}{f(z_\nu^0) - a} \right\} = \sum_{\varkappa=1}^{q} T_{\alpha_\varkappa \beta_\varkappa} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \ldots z_p \\ z_1^0 & z_2^0 \ldots z_p^0 \end{pmatrix}, \tag{321}$$

also wegen (314) endlich

$$\prod_{\nu=1}^{p} \left\{ \frac{f(z_\nu) - b}{f(z_\nu^0) - b} : \frac{f(z_\nu) - a}{f(z_\nu^0) - a} \right\} = \prod_{\varkappa=1}^{q} \left\{ \frac{\vartheta\left(\left(v(\beta_\varkappa) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(\beta_\varkappa) - \sum_1^p v(z_\nu^0)\right)\right)} : \frac{\vartheta\left(\left(v(\alpha_\varkappa) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(\alpha_\varkappa) - \sum_1^p v(z_\nu^0)\right)\right)} \right\}. \tag{322}$$

Diese Formel kann folgendermaßen zur Lösung des Umkehrproblems verwendet werden. Sollen aus den p Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(z_\nu) = w_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{323}$$

die p Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ bestimmt werden, während $w_1, w_2, \ldots w_p$ gegebene Größen sind, so wähle man p Punkte $z_1^0, z_2^0, \ldots z_p^0$ willkürlich aber so, daß sie durch keine φ-Kurve miteinander verknüpft sind, setze

$$\sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(z_\nu^0) = w_\mu^0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{324}$$

und führe diese Punkte in die Gleichung (322) ein. Man kann dann aus (322) zunächst beliebig viele Formeln ableiten, indem man unter Festhaltung der Funktion $f(z)$ den Konstanten a und b verschiedene Werte erteilt; aus p solchen Formeln erhält man p Gleichungen zur Bestimmung der Größen $f(z_1), f(z_2), \ldots f(z_p)$. Am übersichtlichsten gestaltet sich diese Rechnung, wenn man $a = \infty$ nimmt, mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ also die ∞^1-Punkte der Funktion $f(z)$ bezeichnet; man kann dann aus (322) das Produkt $\prod_{\nu=1}^{p} (f(z_\nu) - b)$ durch bekannte Größen ausdrücken und erhält, wenn man an Stelle von b der Reihe nach p verschiedene Werte setzt, p lineare Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten

jener Gleichung p^{ten} Grades, welche $f(z_1), f(z_2), \ldots f(z_p)$ als Wurzeln hat. Tut man das gleiche für andere Funktionen $\varphi(z), \psi(z), \ldots$, so findet man schließlich die symmetrischen Funktionen von $z_1, z_2, \ldots z_p$ selber. Dabei weisen *Clebsch* und *Gordan* darauf hin, daß die Auflösung der Gleichung p^{ten} Grades für eine einzige Funktion $f(z)$ genügt, um dann die p Werte jeder anderen Funktion $\varphi(z)$ durch Auflösung linearer Gleichungen zu erhalten.

Die Formel (322) nimmt die einfachste Gestalt an, wenn man für $f(z)$ z selbst wählt. Es ist dann $q = n$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sind die n in der *Riemann*schen Fläche über der Stelle $z = a$, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ die n über $z = b$ liegenden Punkte; die Formel (322) aber wird

$$(325)\qquad \prod_{\nu=1}^{p}\left\{\frac{z_\nu - b}{z_\nu^0 - b} : \frac{z_\nu - a}{z_\nu^0 - a}\right\} = \prod_{\varkappa=1}^{n}\left\{\frac{\vartheta\left(v(\beta_\varkappa) - w\right)}{\vartheta\left(v(\beta_\varkappa) - w^0\right)} : \frac{\vartheta\left(v(\alpha_\varkappa) - w\right)}{\vartheta\left(v(\alpha_\varkappa) - w^0\right)}\right\}.$$

Ebenso wie im vorstehenden die Formel (317) in Verbindung mit dem *Abel*schen Theorem für die Integrale 3. Gattung zur Lösung des Umkehrproblems benutzt wurde, kann man auch die Formel (318) verwenden, wenn man sie mit der *Riemann*schen Formel:

$$(326)\qquad f(z) = c + \sum_{\varkappa=1}^{q} c_\varkappa t_{\varepsilon_\varkappa}(z)$$

verbindet, vermöge welcher die an den Stellen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_q$ mit den Gewichten $c_1, c_2, \ldots c_q$ ∞^1 werdende Funktion $f(z)$ durch Integrale 2. Gattung dargestellt wird.

53. Darstellung eines einzelnen Integrals 3. und 2. Gattung durch Thetafunktionen. Zur Darstellung eines Integrals 3. Gattung $\pi_{\alpha\beta}(z)$ durch Thetafunktionen wähle man $p - 1$ Punkte $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{p-1}$ so, daß sie weder mit α noch mit β durch eine φ-Kurve verknüpft sind; man erhält dann aus (312), wenn man $z_1 = \beta$, $z_1^0 = \alpha$ und für $\lambda = 1, 2, \ldots p - 1$ $z_{\lambda+1} = z_{\lambda+1}^0 = \gamma_\lambda$ setzt,

$$(327)\qquad \pi_{\alpha\beta}(z) = c + \log \frac{\vartheta\left(\left(v(z) - v(\beta) - \sum_1^{p-1} v(\gamma_\lambda)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(z) - v(\alpha) - \sum_1^{p-1} v(\gamma_\lambda)\right)\right)}$$

und hieraus weiter

$$(328)\qquad \pi_{\alpha\beta}^{xy} = \log\left\{\frac{\vartheta\left(\left(v(y) - v(\beta) - \sum_1^{p-1} v(\gamma_\lambda)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(y) - v(\alpha) - \sum_1^{p-1} v(\gamma_\lambda)\right)\right)} : \frac{\vartheta\left(\left(v(x) - v(\beta) - \sum_1^{p-1} v(\gamma_\lambda)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(x) - v(\alpha) - \sum_1^{p-1} v(\gamma_\lambda)\right)\right)}\right\}.$$

Für das Integral 2. Gattung aber erhält man mit Rücksicht auf (297) aus (327)

$$t_\alpha(z) = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\log\vartheta\left(\left(v(z) - v(\alpha) - \sum_1^{p-1} v(\gamma_\lambda)\right)\right) \tag{329}$$

und hat daher weiter

$$t_\alpha^{xy} = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\log\frac{\vartheta\left(\left(v(y) - v(\alpha) - \sum_1^{p-1} v(\gamma_\lambda)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(x) - v(\alpha) - \sum_1^{p-1} v(\gamma_\lambda)\right)\right)}. \tag{330}$$

Den gewonnenen Formeln (327) und (330) kann man verschiedene andere Gestalten geben. Bezeichnet man z. B. das zu den $p-1$ Punkten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{p-1}$ gehörige Restpunktsystem mit $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{p-1}$, so daß also

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{p-1} v(\gamma_\lambda) + \sum_{\lambda=1}^{p-1} v(\delta_\lambda)\right) \equiv (0) \tag{331}$$

ist, so wird aus (327)

$$\pi_{\alpha\beta}(z) = c + \log\frac{\vartheta\left(\left((v(z) - v(\beta) + \sum_1^{p-1} v(\delta_\lambda)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(z) - v(\alpha) + \sum_1^{p-1} v(\delta_\lambda)\right)\right)}. \tag{332}$$

Da hier die rechte Seite in bezug auf die p Punkte $z, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{p-1}$ symmetrisch ist, so folgt daraus die *Riemann*sche Formel

$$\pi_{\alpha\beta}(z) = c + \frac{1}{p}\log\frac{\vartheta(\!(v(\beta) - pv(z))\!)}{\vartheta(\!(v(\alpha) - pv(z))\!)}, \tag{333}$$

woraus jetzt auch

$$t_\alpha(z) = -\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial \alpha}\log\vartheta(\!(v(\alpha) - pv(z))\!) \tag{334}$$

hervorgeht.[133])

54. Thetaquotienten und Funktionen der Klasse. Wählt man in dem Thetaquotienten

$$Q(z) = \prod_{\varrho=1}^{n}\frac{\vartheta(\!(v(z) - e^{(\varrho)})\!)}{\vartheta(\!(v(z) - f^{(\varrho)})\!)} \tag{335}$$

bei jeder der $2n$ Thetafunktionen die Parameter e bzw. f so, daß keine iden-

133) Zur Darstellung der Integrale 2. und 3. Gattung durch Thetafunktionen siehe auch *Roch*, J. f. Math. 65 (1866), p. 42 u. 68 (1868), p. 170; *Weber*, J. f. Math. 70 (1869), p. 209 u. 82 (1877), p. 131; *Thomae*, J. f. Math. 93 (1882), p. 69 94 (1883), p. 241 u. 101 (1887), p. 326; *Staude*, Acta math. 8 (1886), p. 81; *Stahl*, J. f. Math. 111 (1893), p. 101; vgl. auch *Schleiermacher*, Diss. Erlangen 1878, *Schirdewahn*, Diss. Breslau 1886 und Z. f. Math. 34 (1889), p. 355.

tisch verschwindet, so wird der Zähler 0^1 in np Punkten $x_\nu^{(\varrho)}\binom{\varrho=1,2,\ldots n}{\nu=1,2,\ldots p}$, der Nenner in np Punkten $y_\nu^{(\varrho)}$, welche mit den Parametern e, f durch die Kongruenzen

$$e_\mu^{(\varrho)} \equiv \sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(x_\nu^{(\varrho)}), \quad f_\mu^{(\varrho)} \equiv \sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(y_\nu^{(\varrho)}) \qquad \binom{\varrho=1,2,\ldots n}{\mu=1,2,\ldots p} \tag{336}$$

verknüpft sind. Bestimmt man nun, was immer und nur auf eine Weise geschehen kann (Nr. **16**), $2p$ reelle Größen g, h aus den Gleichungen

$$\sum_{\varrho=1}^{n}(f_\mu^{(\varrho)} - e_\mu^{(\varrho)}) = \sum_{\nu=1}^{p} g_\nu a_{\mu\nu} + h_\mu \pi i \quad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{337}$$

und setzt

$$R(z) = Q(z)\, e^{2\sum_{\mu=1}^{p} g_\mu v_\mu(z)}, \tag{338}$$

so ist $R(z)$ eine einwertige Funktion von z in der *Riemann*schen Fläche T', welche an den Querschnitten konstante Faktoren erlangt, indem

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu\colon R^+ = R^- \cdot e^{2g_\nu \pi i}, \\ &\text{längs } b_\nu\colon R^+ = R^- \cdot e^{-2h_\nu \pi i} \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p) \tag{339}$$

ist, und welche, wenn man unter der Annahme, daß ein Teil der Punkte $y_\nu^{(\varrho)}$ mit Punkten $x_\nu^{(\varrho)}$ zusammenfällt, die übrigbleibenden Punkte x, y mit $x_1, x_2, \ldots x_q$ und $y_1, y_2, \ldots y_q$ bezeichnet, 0^1 wird in den q Punkten $x_1, x_2, \ldots x_q$, ∞^1 in den q Punkten $y_1, y_2, \ldots y_q$, für welche die aus (336) und (337) folgenden Kongruenzen

$$\sum_{\varkappa=1}^{q}[v_\mu(y_\varkappa) - v_\mu(x_\varkappa)] \equiv \sum_{\nu=1}^{p} g_\nu a_{\mu\nu} + h_\mu \pi i \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{340}$$

bestehen.

Sind nun speziell die Parameter e und f so gewählt, daß sich aus (337) für die Größen g, h lauter ganze Zahlen $\varkappa, \lambda$ ergeben, so daß also

$$\sum_{\varrho=1}^{n}(f_\mu^{(\varrho)} - e_\mu^{(\varrho)}) = \sum_{\nu=1}^{p} \varkappa_\nu a_{\mu\nu} + \lambda_\mu \pi i \quad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{341}$$

ist, so wird

$$R(z) = \prod_{\varrho=1}^{n} \frac{\vartheta\left(v(z) - e^{(\varrho)}\right)}{\vartheta\left(v(z) - f^{(\varrho)}\right)}\, e^{2\sum_{\mu=1}^{p} \varkappa_\mu v_\mu(z)}, \tag{342}$$

da nunmehr längs aller Querschnitte a und b $R^+ = R^-$ ist, eine Funktion der Klasse, die in den q Punkten $x_1, x_2, \ldots x_q$ 0^1, in den q Punkten $y_1, y_2, \ldots y_q$ ∞^1 wird, zwischen denen in Übereinstimmung mit (340) die Kongruenzen

$$\sum_{\varkappa=1}^{q}[v_\mu(y_\varkappa) - v_\mu(x_\varkappa)] \equiv 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{343}$$

bestehen (II B 2, Nr. 42).

Umgekehrt läßt sich jede Funktion der Klasse $R(z)$, welche in q Punkten $x_1, x_2, \ldots x_q$ 0^1, in q Punkten $y_1, y_2, \ldots y_q$ ∞^1 wird, in der Form (342) durch einen Quotienten von gleich vielen Thetafunktionen darstellen. Man braucht nur, was bei hinreichend großem n stets möglich ist, die Parameter e und f so zu wählen, daß keine der auftretenden Thetafunktionen identisch verschwindet und der Zähler in den q Punkten x und $np - q$ weiteren Punkten $z_1, z_2, \ldots z_{np-q}$, der Nenner in den q Punkten y und den $np - q$ nämlichen Punkten z 0^1 wird. Die in (342) auftretenden ganzen Zahlen $\varkappa$ sind dabei aus den Gleichungen (341) eindeutig bestimmt.

55. Zweite Form für die Lösung des Umkehrproblems. Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{p-1}$ insbesondere $p - 1$ Punkte von der Beschaffenheit, daß sie mit keinem der $2q$ Punkte x, y durch eine φ-Kurve verknüpft sind, so kann man $n = q$ wählen und in den Zähler von $Q(z)q$ Thetafunktionen stellen, von denen die $\varkappa^{\text{te}}$ in $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{p-1}$ und $x_\varkappa$ verschwindet, in den Nenner q Thetafunktionen, von denen die $\varkappa^{\text{te}}$ in $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{p-1}$ und $y_\varkappa$ verschwindet, und erhält so aus (342)

$$f(z) = c \prod_{\varkappa=1}^{q} \frac{\vartheta\left(\left(v(z) - \sum_1^{p-1} v(\varepsilon_\lambda) - v(x_\varkappa)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(z) - \sum_1^{p-1} v(\varepsilon_\lambda) - v(y_\varkappa)\right)\right)} e^{2\sum_{\mu=1}^{p} \varkappa_\mu v_\mu(z)}. \tag{344}$$

Bezeichnet man nun das zu den $p - 1$ Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{p-1}$ gehörige Restpunktsystem mit $z_1, z_2, \ldots z_{p-1}$, so daß also

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{p-1} v(\varepsilon_\lambda) + \sum_{\lambda=1}^{p-1} v(z_\lambda)\right) \equiv (0) \tag{345}$$

ist, so folgt, weil die Thetafunktion eine gerade Funktion ist, aus (344), wenn man noch den Punkt z mit z_p bezeichnet und auf der linken Seite den Faktor $f(z_1) f(z_2) \ldots f(z_{p-1})$, auf der rechten Seite den Faktor $e^{2\sum_{\lambda=1}^{p-1} \sum_{\mu=1}^{p} \varkappa_\mu v_\mu(z_\lambda)}$ hinzufügt, die Gleichung

$$\prod_{\mu=1}^{p} f(z_\mu) = c_0 \prod_{\varkappa=1}^{q} \frac{\vartheta\left(\left(v(x_\varkappa) - \sum_1^{p} v(z_\nu)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(y_\varkappa) - \sum_1^{p} v(z_\nu)\right)\right)} e^{2\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} \varkappa_\mu v_\mu(z_\nu)}, \tag{346}$$

wo c_0 nunmehr von allen p Punkten $z_1, z_2, \ldots z_p$ unabhängig ist.

Setzt man noch

$$f(z) = \varphi(z) - a, \tag{347}$$

bezeichnet also mit $\varphi(z)$ eine Funktion der Klasse, welche wie $f(z)$ in den Punkten $y_1, y_2, \dots y_q$ ∞^1 wird, in den Punkten $x_1, x_2, \dots x_q$ aber den Wert a annimmt, so ist

$$\prod_{\mu=1}^{p}(\varphi(z_\mu) - a) = c_0 \prod_{\varkappa=1}^{p} \frac{\vartheta\left(\left(v(x_\varkappa) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(y_\varkappa) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)} e^{2\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} x_\mu v_\mu(z_\nu)} \tag{348}$$

und man erhält endlich durch Division zweier solcher Formeln

$$\prod_{\mu=1}^{p}\frac{\varphi(z_\mu) - a}{\varphi(z_\mu^0) - a} = \prod_{\varkappa=1}^{q} \frac{\vartheta\left(\left(v(x_\varkappa) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)\vartheta\left(\left(v(y_\varkappa) - \sum_1^p v(z_\nu^0)\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(y_\varkappa) - \sum_1^p v(z_\nu)\right)\right)\vartheta\left(\left(v(x_\varkappa) - \sum_1^p v(z_\nu^0)\right)\right)} e^{2\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} x_\mu (v_\mu(z_\nu) - v_\mu(z_\nu^0))} \tag{349}$$

Da die rechte Seite dieser Formel nur von den Integralsummen

$$\sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(z_\nu) = w_\mu, \quad \sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(z_\nu^0) = w_\mu^0 \qquad (\mu = 1, 2, \dots p) \tag{350}$$

abhängt, so kann sie wie die Formel (322) zur Lösung des Umkehrproblems verwendet werden; man erhält diese aus ihr, wenn man zwei Formeln (349), die verschiedenen Werten a, b entsprechen, durcheinander dividiert.

56. Thetaquotienten und Wurzelfunktionen; deren Zuordnung zu den Periodencharakteristiken. Werden in dem Thetaquotienten (335) die Parameter e und f so gewählt, daß sich aus den Gleichungen (337) für die sämtlichen g, h rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner r

$$g_\mu = \frac{\varepsilon_\mu}{r}, \quad h_\mu = \frac{\varepsilon'_\mu}{r} \qquad (\mu = 1, 2, \dots p) \tag{351}$$

ergeben, d. h. ist

$$\sum_{\varrho=1}^{\pi}(f_\mu^{(\varrho)} - e_\mu^{(\varrho)}) = \frac{1}{r}\sum_{\nu=1}^{p}\varepsilon_\nu a_{\mu\nu} + \frac{1}{r}\varepsilon'_\mu \pi i, \quad (\mu = 1, 2, \dots p) \tag{352}$$

so erlangt die Funktion

$$R(z) = Q(z)\, e^{\frac{2}{r}\sum_{\mu=1}^{p}\varepsilon_\mu v_\mu(z)} \tag{353}$$

an den Querschnitten a, b r^{te} Einheitswurzeln als Faktoren, indem

$$\text{längs } a_\nu\colon R^+ = R^- \cdot e^{\frac{2\varepsilon_\nu \pi i}{r}}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p) \tag{354}$$
$$\text{längs } b_\nu\colon R^+ = R^- \cdot e^{-\frac{2\varepsilon'_\nu \pi i}{r}}$$

ist; es ist also $(R(z))^r$ eine Funktion τ der Klasse und

$$\prod_{\varrho=1}^{n} \frac{\vartheta\left(\left(v(z) - e^{(\varrho)}\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(z) - f^{(\varrho)}\right)\right)} e^{\frac{2}{r}\sum_{\mu=1}^{p} \varepsilon_\mu v_\mu(z)} = \sqrt[r]{\tau}. \tag{355}$$

Eine so definierte einwertige Funktion von z in der *Riemann*schen Fläche T', die also in q Punkten $x_1, x_2, \ldots x_q$ 0^1, in ebenso vielen Punkten $y_1, y_2, \ldots y_q$ ∞^1 wird und an den Querschnitten r^{te} Einheitswurzeln als Faktoren annimmt, heißt eine Wurzelfunktion (II B 2, Nr. **40**), der Komplex der $2p$ ganzen Zahlen $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon_1' \varepsilon_2' \ldots \varepsilon_p' \end{pmatrix}$ soll die zu ihr gehörige Per. Char. (ε) (Nr. **23**) genannt und die Funktion selbst mit w_ε bezeichnet werden. Zwischen ihren Null- und Unendlichkeitspunkten bestehen die Kongruenzen

$$\sum_{\varkappa=1}^{q} [v_\mu(y_\varkappa) - v_\mu(x_\varkappa)] \equiv \frac{1}{r}\sum_{\nu=1}^{p} \varepsilon_\nu a_{\mu\nu} + \frac{1}{r}\varepsilon'_\mu \pi i. \quad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{356}$$

Da zwei Wurzelfunktionen w_ε und w_η, für welche $(\varepsilon) \equiv (\eta) \pmod r$ ist, an den Querschnitten a, b die nämlichen Faktoren erlangen, ihr Quotient also eine Funktion der Klasse ist, so wird man sich auf solche Per. Char. (ε) beschränken, bei denen die $\varepsilon, \varepsilon'$ lediglich Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots r-1$ sind; solche Per. Char. gibt es im ganzen r^{2p}.

Werden die Zahlen $\varepsilon, \varepsilon'$ gegeben, so kann man auf Grund der Gleichungen (352) p der Größen e, f z. B. die p Größen $e_1^{(1)}, \ldots e_p^{(1)}$ durch die übrigen und die $2p$ Zahlen $\varepsilon, \varepsilon'$ ausdrücken und erkennt daraus, daß man die Funktion $R(z)$ durch die Angabe ihrer q Unendlichkeitspunkte, $q - p$ ihrer Nullpunkte und ihrer Faktoren an den Querschnitten a, b bestimmen kann.

Den $q - p$ in w_ε bei gegebener Per. Char. (ε) willkürlich wählbaren Nullpunkten entsprechend gibt es eine lineare Schar von ∞^{q-p} zu derselben Per. Char. (ε) gehörigen und in den nämlichen q Punkten ∞^1 werdenden Wurzelfunktionen. Der Quotient von je zweien ist eine Funktion der Klasse und alle lassen sich durch $q - p + 1$ linear unabhängige unter ihnen ausdrücken in der Form

$$w_\varepsilon = \sum_{i=0}^{q-p} l_i w_\varepsilon^{(i)}; \tag{357}$$

zwischen $q - p + 2$ besteht eine lineare Relation.

Dieser Satz erleidet eine Ausnahme, wenn durch die letzten p Nullpunkte von w_ε, welche durch die willkürlich gewählten $q-p$ übrigen und die Per. Char. (ε) im allgemeinen eindeutig bestimmt sind, eine φ-Kurve hindurchgeht. Ist nämlich das von diesen Punkten gebildete Punktsystem (II B 2, Nr. 25) vom Überschuß m, so ist die Wurzelfunktion w_ε erst durch Angabe von $q-p+m$ ihrer Nullpunkte bestimmt, jedes w_ε läßt sich erst durch $q-p+m+1$ linear unabhängige darstellen und es besteht erst zwischen $q-p+m+2$ eine lineare Relation.

Zu der Gesamtheit der auf diese Weise zu den r^{2p} verschiedenen Per. Char. gehörigen in ihren q Unendlichkeitspunkten und in $q-p$ ihrer Nullpunkte übereinstimmenden Wurzelfunktionen w_ε gelangt man algebraisch auf dem folgenden Wege.

Man bilde eine adjungierte ganze Funktion χ_0 der Klasse von beliebig hohem Grade, welche in den q Punkten $y_1, \ldots y_q$ 0^r wird; ihre übrigen Nullpunkte seien $\beta_1, \beta_2, \ldots$. Man bestimme sodann eine zweite adjungierte ganze Funktion χ gleich hohen Grades, welche in den Punkten $\beta_1, \beta_2, \ldots$ ebenso Null wird wie χ_0, ferner 0^r in $q-p$ der Punkte $x_1, \ldots x_q$ und deren weitere rp Nullpunkte gleichfalls zu je r zusammenfallen. Wegen der aus (356) stets folgenden Kongruenzen

$$r\sum_{\varkappa=1}^{q} v_\mu(y_\varkappa) - r\sum_{\varkappa=1}^{q} v_\mu(x_\varkappa) \equiv 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{358}$$

existiert für jede Per. Char. (ε) eine solche Funktion und es gibt den r^{2p} Per. Char. entsprechend r^{2p} verschiedene solche Funktionen χ, die also alle die Punkte β und $q-p$ der x als Nullpunkte gemeinsam haben, sich aber durch die p weiteren 0^r-Punkte voneinander unterscheiden. Durch die Angabe der letzteren wird, ebenso wie durch die Angabe der Faktoren (354), eine bestimmte der r^{2p} Funktionen χ ausgewählt, die mit χ_ε bezeichnet sei, und es ist dann

$$w_\varepsilon = \sqrt[r]{\frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}} \tag{359}$$

die in den q Punkten $x_1, \ldots x_q$ 0^1, in den q Punkten $y_1, \ldots y_q$ ∞^1 werdende Wurzelfunktion mit den Faktoren (354) an den Querschnitten.

Die Bestimmung der Funktionen χ gehört zu den in Nr. **107** in etwas allgemeinerer Form behandelten Teilungsproblemen.

Die Funktion $\frac{\chi_\varepsilon}{\chi_0}$ heißt eine Berührungsfunktion, χ_0 und χ_ε selbst Berührungsformen. Man kann von diesen zu reinen Berührungsformen, die überall, wo sie verschwinden, 0^r werden, übergehen, indem man

χ_ε durch $\chi_0^{r-1}\chi_\varepsilon$ und gleichzeitig χ_0 durch χ_0^r ersetzt; es wird dann

$$w_\varepsilon = \frac{\sqrt[r]{\chi_0^{r-1}\chi_\varepsilon}}{\chi_0}. \tag{360}$$

Durch das Vorstehende ist die Wurzelfunktion w_ε einer bestimmten Per. Char. (ε) zugeordnet. Diese Zuordnung hängt von der Zerschneidung der *Riemann*schen Fläche ab. Die Änderungen, welche die Per. Char. bei Änderung der Zerschneidung, d. i. bei linearer ganzzahliger Transformation der Perioden erleiden, sind in Nr. **30** besprochen.

Dabei spielt die Per. Char. (0) eine Ausnahmerolle, da sie und nur sie bei jeder Änderung der Zerschneidung in sich übergeht; die ihr zugeordneten Wurzelfunktionen sind die Funktionen der Klasse.

Sind w_ε und w_η zwei zu verschiedenen Per. Char. (ε) und (η) gehörige Wurzelfunktionen, so ist ihr Produkt $w_\varepsilon w_\eta$ eine zu der Per. Char.

$$(\varepsilon\eta) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \eta_1 \dots \varepsilon_p + \eta_p \\ \varepsilon_1' + \eta_1' \dots \varepsilon_p' + \eta_p' \end{pmatrix} \tag{361}$$

gehörige Wurzelfunktion; ist daher

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_m) = (0), \tag{362}$$

so ist das Produkt $w_{\varepsilon_1} w_{\varepsilon_2} \dots w_{\varepsilon_m}$ eine Funktion der Klasse.

Aus der Eigenschaft des Quotienten zweier zu derselben Per. Char. (ε) gehörigen Wurzelfunktionen, eine Funktion der Klasse zu sein, ergibt sich ein weiteres Prinzip für die algebraische Darstellung dieser Funktionen. Es besteht darin, daß man zunächst die einfachsten derartigen Funktionen zu gewinnen sucht, d. h. die einfachsten in T' einwertigen Funktionen, die an den Querschnitten die Faktoren (354) erlangen. Ist w_ε' eine solche und wird sie ∞^1 in q' Punkten $y_1', \dots y_{q'}'$, 0^1 in q' Punkten $x_1', \dots x_{q'}'$, so hat man nur, um eine beliebige andere Funktion w_ε, welche ∞^1 in q Punkten y_1, $\dots y_q$ und 0^1 in q Punkten $x_1, \dots x_q$ werden soll, zu erhalten, jene Funktion τ der Klasse zu bilden, welche ∞^1 in den q Punkten y und den q' Punkten x', 0^1 in den q Punkten x und den q' Punkten y' wird; es ist dann $w_\varepsilon = \tau w_\varepsilon'$.

Eine ähnliche Reduktion ist auch bei den Thetaquotienten möglich. Ist nämlich ein Thetaquotient (335) gegeben, bei welchem die Parameter c, f den p Bedingungen (352) genügen, und definiert man p Größen $\bar{e}_1^{(1)}, \dots \bar{e}_p^{(1)}$ durch die Gleichungen

$$\bar{e}_\mu^{(1)} = e_\mu^{(1)} + \frac{1}{r}\sum_{\nu=1}^{p} \varepsilon_\nu a_{\mu\nu} + \frac{1}{r}\varepsilon'_\mu \pi i, \qquad (\mu = 1, 2, \dots p) \tag{363}$$

so ist der Quotient

$$(364)\qquad \bar{Q}(z) = \frac{\vartheta\left(\left(v(z) - \bar{e}^{(1)}\right)\right)\vartheta\left(\left(v(z) - e^{(2)}\right)\right)\cdots\vartheta\left(\left(v(z) - e^{(n)}\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(z) - f^{(1)}\right)\right)\vartheta\left(\left(v(z) - f^{(2)}\right)\right)\cdots\vartheta\left(\left(v(z) - f^{(n)}\right)\right)}$$

eine Funktion der Klasse; es ist aber weiter der ursprüngliche Thetaquotient $Q(z)$

$$(365)\qquad Q(z) = \frac{\vartheta\left(\left(v(z) - e^{(1)}\right)\right)}{\vartheta\left(\left(v(z) - \bar{e}^{(1)}\right)\right)}\bar{Q}(z)$$

und dies gibt uns die Veranlassung, in der Folge zunächst Quotienten von nur je einer Thetafunktion im Zähler und Nenner zu betrachten.

57. Thetafunktionen und Wurzelformen; deren Zuordnung zu den Thetacharakteristiken. Wir beschränken uns auf den Fall $r = 2$[134]) und betrachten den Thetaquotienten

$$(366)\qquad Q(z) = \frac{\vartheta[\varepsilon]\left(\left(v(z) - v(\alpha)\right)\right)}{\vartheta[\eta]\left(\left(v(z) - v(\alpha)\right)\right)},$$

in welchem $[\varepsilon]$, $[\eta]$ zwei verschiedene von den 2^{2p} aus halben Zahlen gebildeten Th. Char. (Nr. 22) bezeichnen und α ein fester Punkt der *Riemann*schen Fläche ist. Die Funktion $Q(z)$ wird, wenn keine der beiden Thetafunktionen identisch verschwindet, 0^1 in den p Punkten $\alpha_1^{(\varepsilon)}, \alpha_2^{(\varepsilon)}, \ldots \alpha_p^{(\varepsilon)}$, in denen die Zählerfunktion verschwindet, ∞^1 in den p Punkten $\alpha_1^{(\eta)}, \alpha_2^{(\eta)}, \ldots \alpha_p^{(\eta)}$, in denen die Nennerfunktion verschwindet, und erlangt an den Querschnitten a, b Faktoren ± 1, da

$$(367)\qquad \begin{aligned} &\text{längs } a_\nu\colon\ Q^+ = (-1)^{\varepsilon_\nu + \eta_\nu} Q^-, \\ &\text{längs } b_\nu\colon\ Q^+ = (-1)^{\varepsilon'_\nu + \eta'_\nu} Q^- \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p)$$

ist; zwischen den Punkten $\alpha^{(\varepsilon)}$ und $\alpha^{(\eta)}$ und den Zahlen $\varepsilon, \varepsilon', \eta, \eta'$ bestehen die Kongruenzen:

$$(368)\qquad \sum_{\nu=1}^{p}\left[v_\mu\left(\alpha_\nu^{(\eta)}\right) - v_\mu\left(\alpha_\nu^{(\varepsilon)}\right)\right] \equiv \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{p}(\varepsilon_\nu + \eta_\nu)\,a_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}(\varepsilon''_\mu + \eta'_\mu)\,\pi i. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p)$$

Läßt man bei festgehaltener Th. Char. $[\eta]$ an Stelle von $[\varepsilon]$ der Reihe nach alle $2^{2p} - 1$ von $[\eta]$ verschiedenen Th. Char. treten, so entstehen $2^{2p} - 1$ verschiedene Funktionen $Q(z)$, denen man Wurzelfunktionen folgendermaßen auf die einfachste Weise zuordnen kann.[135])

Man setze mit *Riemann* die Grundgleichung in der Form

$$f(z^m, s^n) = 0$$

134) Soweit man die folgenden Resultate ohne wesentliche Änderung auf den Fall $r > 2$ übertragen kann, ist dies von *Stahl*, „A. F." 7. Abschn. geschehen; vgl für $r = 3$ *Thomae*, Math. Ann. 6 (1873), p. 603.

135) *Clebsch* und *Gordan*, „A. F.", p. 196; *Weber*, J. f. Math. 70 (1869), p. 319; *Fuchs*, J. f. Math. 73 (1871), p. 308 = Ges. math. W. 1 (1904), p. 321. Die Bildung der Funktion ψ wird als Zweiteilungsproblem auch in Nr. 111 besprochen.

voraus und bestimme die lineare Funktion

$$l_\alpha = az + bs + c \tag{369}$$

so, daß sie in α 0^2 wird; dann verschwindet sie noch in $m + n - 2$ weiteren Punkten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{m+n-2}$. Man bestimme ferner eine ganze adjungierte Funktion $\psi(z^{m-1}, s^{n-1})$ so, daß sie in den Punkten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{m+n-2}$ gleichfalls verschwindet und ihre $2p$ weiteren Nullpunkte paarweise zusammenfallen. Bezeichnet man diese mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, so erfüllen sie das Kongruenzensystem

$$2\sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(\alpha_\nu) - 2v_\mu(\alpha) \equiv 0. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{370}$$

Aus diesem folgt aber

$$\left(\sum_{\nu=1}^{p} v(\alpha_\nu) - v(\alpha)\right) \equiv \{\varepsilon\}, \tag{371}$$

wenn $\{\varepsilon\}$ ein System korrespondierender Halben der Periodizitätsmodulen bezeichnet, und man kann auf Grund dieser Kongruenzen mit Hilfe des *Jacobi*schen Umkehrproblems zu jedem der 2^{2p} verschiedenen solchen Systeme $\{\varepsilon\}$ Punkte $\alpha_1^{(\varepsilon)}, \alpha_2^{(\varepsilon)}, \ldots \alpha_p^{(\varepsilon)}$ bestimmen, entweder eindeutig, wenn diese Punkte durch keine φ-Kurve verknüpft sind, oder andernfalls auf unendlich viele Weisen und es entspricht diesen Punkten jedesmal wegen (370) eine Funktion ψ.

So erhält man zu den 2^{2p} verschiedenen Th. Char. ebenso viele, entweder einzelne Funktionen oder Scharen von Funktionen ψ_ε, von denen eine jede ebensowohl durch die Th. Char. $[\varepsilon]$, wie auch durch ihre von den β verschiedenen p Nullpunkte charakterisiert ist. Diese letzteren erweisen sich aber auf Grund der Kongruenzen (371) als die Nullpunkte der Funktion $\vartheta[\varepsilon](v(z) - v(\alpha))$ und man erhält daher durch die Gleichung

$$Q(z) = c\sqrt{\frac{\psi_\varepsilon}{\psi_\eta}}, \tag{372}$$

wo c eine Konstante, d. h. eine von z unabhängige Größe bezeichnet, jedem Quotienten $Q(z)$ eine Wurzelfunktion im Sinne von Nr. **56** zugeordnet.

Durch das Vorstehende erscheint aber, darüber hinausgehend, jeder einzelnen Thetafunktion $\vartheta[\varepsilon](v(z) - v(\alpha))$ und damit jeder Th. Char. $[\varepsilon]$ eine Wurzelform $\sqrt{\psi_\varepsilon}$ (II B 2, Nr. **43**) zugewiesen, die, solange die Thetafunktion nicht identisch verschwindet, außer in den allen 2^{2p} Funktionen ψ_ε gemeinsamen Nullpunkten gerade in deren p Nullpunkten 0^1 wird.

Ist $\vartheta[\varepsilon](\!(0)\!) = 0$, was bei ungerader Th. Char. immer und im allgemeinen auch nur bei einer solchen eintritt, so fällt einer der Punkte $\alpha_1^{(\varepsilon)}, \alpha_2^{(\varepsilon)}, \ldots \alpha_p^{(\varepsilon)}$, etwa der letzte, in den Punkt α und für die $p-1$ übrigbleibenden besteht das Kongruenzensystem

$$\left(\sum_{\nu=1}^{p-1} v(\alpha_\nu^{(\varepsilon)})\right) \equiv \{\varepsilon\}. \tag{373}$$

Die Funktion ψ_ε zerfällt nunmehr in das Produkt $l_\alpha \varphi_\varepsilon$, wo φ_ε die in den $p-1$ von α unabhängigen Punkten $\alpha_1^{(\varepsilon)}, \alpha_2^{(\varepsilon)}, \ldots \alpha_{p-1}^{(\varepsilon)}$ 0^2 werdende φ-Funktion bezeichnet, und es ist jeder ungeraden Th. Char. eine und, wenn $\vartheta[\varepsilon](\!(v(z) - v(\alpha))\!)$ nicht identisch verschwindet, nur eine ganz bestimmte Funktion φ_ε zugeordnet, die in den $p-1$ von $z = \alpha$ verschiedenen Nullpunkten der angegebenen Thetafunktion 0^2 wird. Aus der Gleichung (372) geht dann die für irgend zwei ungerade Th. Char. $[\varepsilon]$ und $[\eta]$ geltende Gleichung

$$\frac{\vartheta[\varepsilon](\!(v(z) - v(\alpha))\!)}{\vartheta[\eta](\!(v(z) - v(\alpha))\!)} = c\sqrt{\frac{\varphi_\varepsilon(z)\,\varphi_\varepsilon(\alpha)}{\varphi_\eta(z)\,\varphi_\eta(\alpha)}} \tag{374}$$

hervor, in der c von z und α unabhängig ist.

Auf die im vorigen auseinandergesetzte Weise entsprechen also, wenn keine der Funktionen $\vartheta[\varepsilon](\!(v(z) - v(\alpha))\!)$ identisch verschwindet, den $2^{p-1}(2^p + 1)$ geraden Th. Char. ebenso viele eigentliche, den $2^{p-1}(2^p - 1)$ ungeraden Th. Char. ebensoviele uneigentliche ψ-Funktionen; ihre Zuordnung zu den einzelnen Th. Char. kann ohne Benutzung der Nullpunkte folgendermaßen geschehen.

Man bestimme auf rein algebraischem Wege die $2^{p-1}(2^p + 1)$ eigentlichen und die $2^{p-1}(2^p - 1)$ uneigentlichen, d. h. zerfallenden ψ-Funktionen, bilde aus den 2^{2p} so erhaltenen Wurzelformen $\sqrt{\psi}$ $2^{2p} - 1$ Quotienten mit gemeinsamem, willkürlich gewählten Nenner $\sqrt{\psi_0}$ und ermittle die Faktoren ± 1, welche diese Wurzelfunktionen $\sqrt{\frac{\psi_\varepsilon}{\psi_0}}$ an den Querschnitten a, b erlangen. Damit wird jedem dieser Quotienten eine Per. Char. zugewiesen und man hat jetzt nur diejenige einzige Th. Char. $[n]$ zu ermitteln[136]), welche die Eigenschaft hat, daß durch ihre Addition zu den vorher ermittelten $2^{2p} - 1$ Per. Char. eine gerade Th. Char. entsteht, wenn ψ eine eigentliche, eine ungerade Th. Char., wenn ψ eine zerfallende ψ-Funktion ist. Das so bestimmte $[n]$ ist dann die der Wurzelform $\sqrt{\psi_0}$ zugehörige Th. Char., während die $2^{2p} - 1$ durch Addition erhaltenen Th. Char. in der

136) Daß es in der Tat nur eine einzige solche Th. Char. gibt, folgt unmittelbar aus Nr. 25.

gleichen Reihenfolge den $2^{2p} - 1$ im Zähler stehenden Wurzelformen $\sqrt{\psi}$ zugehören.

Die Zuordnung der Th. Char. zu den Wurzelformen $\sqrt{\psi}$ hängt von der Zerschneidung der *Riemann*schen Fläche ab. Die Änderungen, welche die Th. Char. bei einer Änderung der Zerschneidung, d. i. bei linearer ganzzahliger Transformation der Perioden, erleiden, siehe Nr. **30**.

Die φ sind „reine" Berührungsformen, da sie in jedem Punkte, in dem sie verschwinden, 0^2 werden. Will man auch den geraden Th. Char. reine Berührungsformen zuweisen, so wird man statt der ψ_ε die Formen $l_\alpha \psi_\varepsilon$ wählen.

58. Die Ausnahmefälle[137]. Ist $\vartheta[\varepsilon](\!(v(z)) - v(\alpha)\!)$ identisch Null oder, was dasselbe[138]), verschwinden für $(v) = (0)$ nicht nur $\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)$, sondern auch seine partiellen Derivierten, so kann man nach dem *Riemann*schen Satze in Nr. **46** den Kongruenzen (373) durch unendlich viele Punktsysteme $\alpha_1^{(\varepsilon)}, \alpha_2^{(\varepsilon)}, \ldots \alpha_{p-1}^{(\varepsilon)}$ genügen.

Verschwinden insbesondere für $(v) = (0)$ nicht nur $\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)$, sondern auch alle seine partiellen Derivierten der 1^{ten}, 2^{ten}, $\ldots$ m^{ten}, aber nicht der $m+1^{\text{ten}}$ Ordnung, so bilden die Punkte $\alpha_1^{(\varepsilon)}, \alpha_2^{(\varepsilon)}, \ldots \alpha_{p-1}^{(\varepsilon)}$ ein Punktsystem vom Überschuß $m+1$; es können also m der Punkte α willkürlich gewählt werden und es entspricht der Th. Char. $[\varepsilon]$ nicht mehr ein einziges Punktsystem, sondern eine m-fach unendliche Schar von solchen, welche alle die Eigenschaft haben, daß in ihnen eine φ-Funktion 0^2 wird, so daß also der Th. Char. $[\varepsilon]$ auch eine m-fach unendliche Schar von Wurzelformen $\sqrt{\varphi_\varepsilon}$ zugeordnet ist. Dabei wird man den Fall, daß m gerade ist, von dem Falle, daß m ungerade ist, trennen. Der erste Fall $m = 2\mu$ tritt bei ungerader Funktion $\vartheta[\varepsilon](\!(v)\!)$ also ungerader Th. Char. ein und man hat in diesem Falle eine zu $[\varepsilon]$ gehörige 2μ-fach unendliche Schar von Wurzelfunktionen; der Fall $m = 2\mu + 1$ tritt bei gerader Th. Char. $[\varepsilon]$ ein, der jetzt eine $2\mu + 1$-fach unendliche Schar von Wurzelfunktionen entspricht. Wie der *Riemann*sche Satz gelten diese Sätze auch umgekehrt.

---

137) Auf diese Ausnahmefälle, deren Behandlung auf algebraischer Grundlage ohne Orientierung an der transzendenten Darstellung mit großen Schwierigkeiten verbunden und bis jetzt auch nicht durchgeführt ist, hat zuerst *Weber*, Math. Ann. 13 (1878), p. 35 hingewiesen; vgl. dazu *Kraus*, Math. Ann. 16 (1880), p. 245; ferner sei auf den Fall $p = 4$ (Nr. **92**) und weiter auf den hyperelliptischen Fall (Nr. **73**) verwiesen, wo sich die Verhältnisse besonders klar überschauen lassen. Über den Zusammenhang mit den Spezialscharen (II B 2, Nr. **29**) vgl. *Brill* und *Noether*, Math. Ann. 7 (1874), p. 294.

138) Vgl. dazu *Krazer*, „Thetaf.", p. 432.

59. Algebraische Darstellung eines Quotienten von Thetafunktionen, deren Argumente Summen von je $p+1$ Integralen sind[139]. Man bezeichne wie bisher mit $\alpha_1^{(\varepsilon)}, \alpha_2^{(\varepsilon)}, \ldots \alpha_p^{(\varepsilon)}$ die p Nullpunkte der Funktion $\vartheta[\varepsilon](v(z)-v(\alpha))$, sodaß also

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{p} v(\alpha_\nu^{(\varepsilon)}) - v(\alpha)\Big) \equiv \{\varepsilon\} \tag{375}$$

ist. Sind dann speziell $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots \alpha_p^{(0)}$ die p Nullpunkte der Funktion $\vartheta(v(z)-v(\alpha))$, so ist

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{p} v(\alpha_\nu^{(0)})\Big) \equiv (v(\alpha)). \tag{376}$$

Bildet man nun, indem man unter $z_1, z_2, \ldots z_p$ p beliebige Punkte versteht, die Funktion

$$\vartheta[\varepsilon]\Big(v(z) - v(\alpha) + \sum_{\nu=1}^{p} v(z_\nu) - \sum_{\nu=1}^{p} v(\alpha_\nu^{(0)})\Big)$$

und bezeichnet ihre Nullpunkte mit $z_1^{(\varepsilon)}, z_2^{(\varepsilon)}, \ldots z_p^{(\varepsilon)}$, so ist wegen (375) und (376)

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{p} v(z_\nu) + \sum_{\nu=1}^{p} v(z_\nu^{(\varepsilon)}) - \sum_{\nu=1}^{p} v(\alpha_\nu^{(0)}) - \sum_{\nu=1}^{p} v(\alpha_\nu^{(\varepsilon)})\Big) \equiv \{0\}. \tag{377}$$

Auf Grund dieser Kongruenzen kann man die p Punkte $z_1^{(\varepsilon)}, z_2^{(\varepsilon)}, \ldots z_p^{(\varepsilon)}$ algebraisch folgendermaßen bestimmen.

Man bezeichne mit $[\varepsilon_1], [\varepsilon_2]$ irgend zwei Th. Char. mit der Summe $(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = (\varepsilon)$, mit $\psi_{\varepsilon_1}, \psi_{\varepsilon_2}$ die ihnen nach Nr. 57 zugehörigen ψ-Funktionen und mit $\Psi^{(\varepsilon)}(z)$ deren Produkt $\psi_{\varepsilon_1}\psi_{\varepsilon_2}$. Sind dann $\Psi_0^{(\varepsilon)}(z)$, $\Psi_1^{(\varepsilon)}(z), \ldots \Psi_p^{(\varepsilon)}(z)$ $p+1$ linearunabhängige solche, zu dem nämlichen (ε) gehörige Funktionen Ψ, so kann man Konstanten $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_p$ so bestimmen, daß $\sum_{\nu=0}^{p} \lambda_\nu \sqrt{\Psi_\nu^{(\varepsilon)}(z)}$ in den p gegebenen Punkten $z_1, z_2, \ldots z_p$ verschwindet. Indem man aber diese Funktion durch $\sqrt{\psi_0\psi_\varepsilon}$ dividiert, erkennt man auf Grund der Kongruenzen (377), daß ihre p letzten 0^1-Punkte gerade die p Punkte $z_1^{(\varepsilon)}, z_2^{(\varepsilon)}, \ldots z_p^{(\varepsilon)}$ sind.

Bezeichnet man noch den Punkt z von jetzt an mit z_0, auch α mit $\alpha_0^{(0)}$, so kann man das gefundene Resultat so aussprechen, daß die Determinante $\Sigma \pm \sqrt{\Psi_0^{(\varepsilon)}(z_0)}\sqrt{\Psi_1^{(\varepsilon)}(z_1)} \ldots \sqrt{\Psi_p^{(\varepsilon)}(z_p)}$

139) Die Einführung der Summen von je $p+1$ Integralen in die Argumente der Thetafunktionen findet man schon bei *Prym*, Wien Denkschr. 24 (1865), II, p. 71; 2. Ausg. 1885; sodann bei *Stahl*, Diss. Berlin 1882, J. f. Math. 89 (1880), p. 179.

als Funktion von z_0 betrachtet in den $m + n - 2$ Punkten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{m+n-2}$, den p Punkten $z_1, z_2, \ldots z_p$ und den p Nullpunkten der Funktion

$$\vartheta[\varepsilon]\Big(\Big(\sum_0^p v(z_\nu) - \sum_0^p v(\alpha_\nu^{(0)})\Big)\Big)$$

verschwindet. Indem man dann die gleiche Untersuchung für eine andere Th. Char. $[\eta]$ anstellt, findet man schließlich, daß

$$(378)\quad \frac{\vartheta[\varepsilon]\Big(\Big(\sum_0^p v(z_\nu) - \sum_0^p v(\alpha_\nu^{(0)})\Big)\Big)}{\vartheta[\eta]\Big(\Big(\sum_0^p v(z_\nu) - \sum_0^p v(\alpha_\nu^{(0)})\Big)\Big)} = c \cdot \frac{\sum \pm \sqrt{\Psi_0^{(\varepsilon)} z_0)}\sqrt{\Psi_1^{(\varepsilon)} z_1)} \ldots \sqrt{\Psi_p^{(\varepsilon)}(z_p)}}{\sum \pm \sqrt{\Psi_0^{(\eta)}(z_0)}\sqrt{\Psi_1^{(\eta)}(z_1)} \ldots \sqrt{\Psi_p^{(\eta)}(z_p)}}$$

ist, wo c eine von allen $p+1$ Größen $z_0, z_1, \ldots z_p$ unabhängige Konstante bezeichnet, die man folgendermaßen bestimmen kann.

Ist die Per. Char. $(\varkappa)$ so beschaffen, daß die Th. Char. $[\varkappa\varepsilon]$ und $[\varkappa\eta]$ beide gerade sind, so lasse man z_0 mit $\alpha_0^{(0)}$ zusammenfallen und an Stelle der Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ einmal die 0^2-Punkte $\alpha_1^{(\varkappa)}, \alpha_2^{(\varkappa)}, \ldots \alpha_p^{(\varkappa)}$ der Funktion $\psi_\varkappa$, das andere Mal die 0^2-Punkte $\alpha_1^{(\varkappa\varepsilon\eta)}, \alpha_2^{(\varkappa\varepsilon\eta)}, \ldots \alpha_p^{(\varkappa\varepsilon\eta)}$ der Funktion $\psi_{\varkappa\varepsilon\eta}$ treten. Auf der linken Seite entsteht dann das eine Mal der Quotient $\frac{\vartheta[\varkappa\varepsilon](0)}{\vartheta[\varkappa\eta](0)}$, das andere Mal der Quotient $\frac{\vartheta[\varkappa\eta](0)}{\vartheta[\varkappa\varepsilon](0)}$ und man erhält durch Multiplikation der beiden Gleichungen c^2 $\left(\text{durch Division } \frac{\vartheta^2[\varkappa\varepsilon](0)}{\vartheta^2[\varkappa\eta](0)}\right)$ algebraisch durch lauter Wurzelfunktionen dargestellt, womit c bis aufs Vorzeichen bestimmt ist. Dieses ist im einzelnen Falle durch direkte Vergleichung der beiden Seiten von (378) zu ermitteln.

60. Invariante Darstellung.[140]) Da die Formen φ invariant gegenüber allen eindeutigen Transformationen des algebraischen Gebildes sind (II B 2, Nr. 22), so ist es, wie schon *Weber* bemerkt, von großem Vorteil, die Untersuchungen so weit als möglich nur mit Funktionen φ zu führen, wodurch sie nicht nur an Allgemeinheit, sondern meist auch an Einfachheit gewinnen.

Dazu läßt man an Stelle der linearen Form l_α (369) eine in α 0^2 werdende φ-Funktion treten. Verschwindet diese außerdem in den $2p-4$ Punkten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2p-4}$, so bestimmt man jetzt eine aus φ-Funktionen quadratisch gebildete Funktion $\Phi^{(2)}$ so, daß sie in diesen $2p-4$ Punkten β verschwindet und ihre $2p$ weiteren Nullpunkte

140) Für $p = 3$ schon bei *Weber* „$p = 3$"; allgemein bei *Noether*, Erl. Ber. 12 (1880), p. 97; Math. Ann. 17 (1880), p. 263 und 28 (1887), p. 354; vgl. insbesondere *Brill* und *Noether*, D. M. V. Jahresb. 3 (1894), p. 491 f.

paarweise zusammenfallen. Bezeichnet man letztere mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, so bestehen wie früher die Kongruenzen (370) und (371). Auf Grund der letzteren entspricht jeder der 2^{2p} Th. Char. $[\varepsilon]$, vorausgesetzt, daß $\vartheta[\varepsilon](v(z) - v(\alpha))$ nicht identisch verschwindet, eine ganz bestimmte $\Phi_\varepsilon^{(2)}$ und diese kann auch dadurch charakterisiert werden, daß sie außer in den $2p-4$ allen Funktionen $\Phi_\varepsilon^{(2)}$ gemeinsamen Nullpunkten β in den p Nullpunkten $\alpha_1^{(\varepsilon)}, \alpha_2^{(\varepsilon)}, \ldots \alpha_p^{(\varepsilon)}$ der Funktion $\vartheta[\varepsilon](v(z) - v(\alpha))$ verschwindet, und zwar von der zweiten Ordnung.

Ist die Th. Char. $[\varepsilon]$ ungerade, so fällt einer der Punkte $\alpha^{(\varepsilon)}$, etwa $\alpha_p^{(\varepsilon)}$, in den Punkt α, die Funktion $\Phi_\varepsilon^{(2)}$ zerfällt in das Produkt $\varphi_\alpha \varphi_\varepsilon$, wo φ_ε die in $\alpha_1^{(\varepsilon)}, \alpha_2^{(\varepsilon)}, \ldots \alpha_{p-1}^{(\varepsilon)}$ 0^2 werdende φ-Funktion bezeichnet, und es ist wie vorher der ungeraden Th. Char. $[\varepsilon]$ die reine Berührungsform φ_ε zugeordnet.

Will man auch den geraden Th. Char. $[\varepsilon]$ reine Berührungsformen zuweisen, so ersetzt man $\Phi_\varepsilon^{(2)}$ durch die Funktion $\varphi_\alpha \Phi_\varepsilon^{(2)}$, die in den $3p-3$ Punkten $\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2p-4}, \alpha_1^{(\varepsilon)}, \alpha_2^{(\varepsilon)}, \ldots \alpha_p^{(\varepsilon)}$ 0^2 wird.

Eine solche homogene Form der φ, welche in allen Punkten, in denen sie verschwindet, 0^2 wird, also eine reine Berührungsform ist, wird mit X, und wenn sie in den φ vom m^{ten} Grade ist, mit $X^{(m)}$ bezeichnet (vgl. auch Nr. **111**). Sie gibt zu einer in $m(p-1)$ Punkten 0^1 werdenden Wurzelform $\sqrt{X^{(m)}}$ m^{ter} Dimension Anlaß; so die φ_ε selbst zu den Wurzelformen erster Dimension $\sqrt{X^{(1)}} = \sqrt{\varphi_\varepsilon}$ als den einfachsten, die vorher genannten Funktionen $\varphi_\alpha \Phi_\varepsilon^{(2)}$ zu den Wurzelformen dritter Dimension $\sqrt{X^{(3)}} = \sqrt{\varphi_\alpha \Phi_\varepsilon^{(2)}}$.

Die Wurzelformen $\sqrt{X^{(m)}}$ zerfallen in zwei verschiedene Arten, solche gerader und solche ungerader Dimension, je nachdem m gerade oder ungerade ist.

Die Wurzelformen gerader Dimension $\sqrt{X^{(2\mu)}}$ werden, indem man sie durch ein φ^μ teilt, zu Wurzelfunktionen und es kann jede von ihnen auf Grund von Nr. **56** einer Per. Char. (ε) zugewiesen werden. Der uneigentlichen Per. Char. (0) entsprechen dabei die uneigentlichen Wurzelformen $\sqrt{X^{(2\mu)}} = \sqrt{[X^{(\mu)}]^2}$. Irgend zwei Wurzelformen $\sqrt{X_\varepsilon^{(2\mu)}}$ und $\sqrt{X_\varepsilon^{(2\nu)}}$, welche derselben Per. Char. (ε) zugeordnet sind, drücken sich rational durcheinander aus und es sind speziell alle Wurzelformen $\sqrt{X_\varepsilon^{(2\mu)}}$ durch solche zweiter Dimension $\sqrt{X_\varepsilon^{(2)}}$ rational darstellbar auf Grund der bei gegebenem $X_\varepsilon^{(2\mu)}$ stets erfüllbaren Gleichung

$$X_\varepsilon^{(2\mu)} X_\varepsilon^{(2)} - \Phi^{(\mu+1)2} = 0, \tag{379}$$

wo $\Phi^{(\mu+1)}$ eine homogene Form $\mu + 1^{\text{ten}}$ Grades der φ ist.

Den Wurzelformen ungerader Dimension $\sqrt{X^{(2\mu+1)}}$ werden Thetacharakteristiken folgendermaßen zugeordnet. Auf Grund der für $\mu > 1$

bei gegebenem $X^{(2\mu+1)}$ stets erfüllbaren Gleichung

$$X^{(2\mu+1)}X^{(3)} - \Phi^{(\mu+2)2} = 0, \tag{380}$$

in der $\Phi^{(\mu+2)}$ eine homogene Form $\mu + 2^{\text{ten}}$ Grades der φ bezeichnet, lassen sich alle Wurzelformen ungerader Dimension zunächst auf Wurzelformen $\sqrt{X^{(3)}}$ dritter Dimension zurückführen, diese aber scheiden sich selbst wieder in zwei Unterarten. Im ersten Falle ist $\sqrt{X^{(3)}}$ rational auf $\sqrt{X^{(1)}} = \sqrt{\varphi}$ reduzierbar und wird damit einer ungeraden Th. Char. zugeordnet; im zweiten Falle nicht, dann ist aber $\sqrt{X^{(3)}}$ rational durch eine Form $\sqrt{\varphi_\alpha \Phi^{(2)}}$ ausdrückbar und wird damit einer geraden Th. Char. zugewiesen.[141])

Für jede Wurzelform $\sqrt{X^{(m)}}$ wird die ihr zugehörige Per. Char. (ε) oder Th. Char. $[\varepsilon]$ durch das Kongruenzensystem

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m(p-1)} v(\alpha_\nu)\right) \equiv \{\varepsilon\}. \tag{381}$$

bestimmt, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m(p-1)}$ die Nullpunkte der Wurzelform sind.

Die Zuordnung der Wurzelformen gerader Dimension zu den Per. Char. und der ungerader Dimension zu den Th. Char. ändert sich mit der Zerschneidung der *Riemann*schen Fläche. Der dabei beobachteten Tatsache, daß eine Summe einer ungeraden Anzahl von Th. Char. sich wie eine Th. Char., eine Summe einer geraden Anzahl von Th. Char. wie eine Per. Char. transformiert (vgl. Nr. 25), entspricht es, wenn wir festsetzen, daß das Produkt mehrerer Wurzelformen $\sqrt{X_{\varepsilon_1}^{(m_1)} X_{\varepsilon_2}^{(m_2)} \ldots X_{\varepsilon_n}^{(m_n)}}$, wenn $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ ungerade ist, der Th. Char. $[\varepsilon] = [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n]$, dagegen, wenn $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ gerade ist, der Per. Char. $(\varepsilon) = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n)$ zugeordnet werde; speziell setzen sich dann zwei Wurzelformen ungerader Dimension $\sqrt{X_{\varepsilon_1}^{(2\mu+1)}}$ und $\sqrt{X_{\varepsilon_2}^{(2\nu+1)}}$, welche einzeln den Th. Char. $[\varepsilon_1]$ bzw. $[\varepsilon_2]$ zugeordnet sind, zu einer der Per. Char. $(\varepsilon) = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ zugeordneten Wurzelform gerader Dimension $\sqrt{X_\varepsilon^{(2\mu+2\nu+2)}}$ zusammen.

141) *Klein* [Math. Ann. 36 (1890), p. 34] nennt die auf die angegebene Weise einer Wurzelform gerader Dimension $\sqrt{X^{(2\mu)}}$ zugeordnete Per. Char. „Elementarcharakteristik"; einer Wurzelform ungerader Dimension $\sqrt{X^{(2\mu+1)}}$ aber ordnet er eine „Primcharakteristik" zu, indem er jene Faktoren bestimmt, welche der Quotient

$$\frac{\sqrt{X^{(2\mu+1)}}\,\Omega(x, y)}{X^{(\mu+1)}}$$

an den Querschnitten erlangt, bei dem $X^{(\mu+1)}$ irgendeine homogene Form $\mu + 1^{\text{ten}}$ Grades der φ bezeichnet, die *Klein*sche Primform $\Omega(x, y)$ (vgl. Nr. 64 u. II B 2, Nr. 39), bei der y einen beliebigen Hilfspunkt vertritt, aber so gewählt ist, daß der ganze Ausdruck eine Funktion der Stelle x ist.

Alle zu der nämlichen Charakteristik gehörigen Wurzelformen m^{ter} Dimension $\sqrt{X_\varepsilon^{(m)}}$ lassen sich aus $(m-1)(p-1)$ linearunabhängigen unter ihnen $\sqrt{X_{\varepsilon,1}^{(m)}}$, $\sqrt{X_{\varepsilon,2}^{(m)}}$, ... $\sqrt{X_{\varepsilon,(m-1)(p-1)}^{(m)}}$ in der Form

$$\sqrt{X_\varepsilon^{(m)}} = \sum_{i=1}^{(m-1)(p-1)} \lambda_i \sqrt{X_{\varepsilon,i}^{(m)}} \tag{382}$$

zusammensetzen. Zwischen $(m-1)(p-1)+1$ unter ihnen besteht also eine lineare Relation.

Solche Relationen erhält man aus den für beliebige Werte der Argumente geltenden Thetarelationen, indem man an Stelle dieser Argumente Summen von $p+1$ oder, wie in dem jetzt folgenden Paragraphen, von $n(2p-2)$ Integralen setzt und dann mittels der Formeln (378) oder (387) für die Thetafunktionen die Wurzelformen einführt. Man erhält so „Lösungen der Thetarelationen", d. h. algebraische Ausdrücke, welche an Stelle der Thetafunktionen gesetzt sämtliche Relationen befriedigen. Dabei ist aber im Auge zu behalten, daß sich die Wurzelformen stets auf ein vorgelegtes algebraisches Gebilde beziehen und infolgedessen, sobald $p > 3$ und damit die Anzahl der Klassenmodulen des algebraischen Gebildes kleiner als die der Thetamodulen ist, von speziellerer Natur sind als die allgemeinen Thetafunktionen, an deren Stelle sie getreten sind, und daß daher die durch sie ausgedrückten Lösungen der Thetarelationen nur partikuläre sind.

Bezüglich der Aufstellung von Relationen zwischen den Wurzelformen und bezüglich der Bildung von $(m-1)(p-1)$ linearunabhängigen, zu einer gegebenen Charakteristik gehörigen Wurzelformen muß auf die später besonders behandelten Fälle $p = 2, 3$ und 4 verwiesen werden und es ist für beliebiges p und $m \geqq 3$ hier nur der Satz von *Noether*[142]) zu erwähnen, daß man jedes $\sqrt{X_\varkappa^{(m)}}$ in die Form

$$\sqrt{X_\varkappa^{(m)}} = \sqrt{\varphi_\varepsilon'}\sqrt{X_{\varkappa\varepsilon}^{(m-1)}} + \sqrt{X_\lambda'^{(m-2)}}\sqrt{X_{\varkappa\lambda}^{(2)}} \tag{383}$$

bringen kann, wo die beiden Formen φ_ε' und X_λ' fest gewählt werden können, so daß der Ausdruck genau $(m-1)(p-1)$ Parameter enthält.

61. Algebraische Darstellung eines Thetaquotienten, dessen Argumente Summen von $n(2p-2)$ Integralen sind[143]). Bezeichnen

142) Math. Ann. 28 (1887), p. 365.

143) Die Einführung von Summen von je $2p-2$ Integralen in die Argumente der Thetafunktionen findet sich, aber unter Beschränkung auf ungerade Th. Char., schon bei *Riemann* in der Vorlesung von W. S. 1861/62 (Ges. math. W. Nachtr. p. 23), sodann allgemein bei *Noether* [Math. Ann. 28 (1887), p. 367],

$z_1, z_2, \ldots z_{N-1}$, wo $N = n(2p-2)$ ist, $N-1$ beliebige Punkte, die nur so gewählt seien, daß die sogleich auftretenden Thetafunktionen nicht identisch verschwinden, so wird

$$\vartheta[\varepsilon]\Big(\Big(v(z) + \sum_1^{N-1} v(z_\nu)\Big)\Big)$$

0^1 in p Punkten $z_1^{(\varepsilon)}, z_2^{(\varepsilon)}, \ldots z_p^{(\varepsilon)}$, welche durch die Kongruenzen

$$\Big(\sum_1^{p} v(z_\nu^{(\varepsilon)}) + \sum_1^{N-1} v(z_\nu)\Big) \equiv \{\varepsilon\} \tag{384}$$

bestimmt sind, und ebenso wird

$$\vartheta[\eta]\Big(\Big(v(z) + \sum_1^{N-1} v(z_\nu)\Big)\Big)$$

0^1 in p Punkten $z_1^{(\eta)}, z_2^{(\eta)}, \ldots z_p^{(\eta)}$, für welche

$$\Big(\sum_1^{p} v(z_\nu^{(\eta)}) + \sum_1^{N-1} v(z_\nu)\Big) \equiv \{\eta\} \tag{385}$$

ist. Bestimmt man daher jede der beiden, zu den Thetacharakteristiken $[\varepsilon]$ und $[\eta]$ gehörigen Wurzelformen $\sqrt{X_\varepsilon^{(2n+1)}}$ und $\sqrt{X_\eta^{(2n+1)}}$ so, daß sie in den $N-1$ Punkten $z_1, z_2, \ldots z_{N-1}$ verschwindet[144]), so wird auf Grund der Kongruenzen (384) $\sqrt{X_\varepsilon^{(2n+1)}}$ gerade noch in den p Punkten $z_1^{(\varepsilon)}, z_2^{(\varepsilon)}, \ldots z_p^{(\varepsilon)}$ und ebenso $\sqrt{X_\eta^{(2n+1)}}$ auf Grund der Kongruenzen (385) in den p Punkten $z_1^{(\eta)}, z_2^{(\eta)}, \ldots z_p^{(\eta)}$ 0^1, und es ist

$$\frac{\vartheta[\varepsilon]\Big(\Big(v(z) + \sum_1^{N-1} v(z_\nu)\Big)\Big)}{\vartheta[\eta]\Big(\Big(v(z) + \sum_1^{N-1} v(z_\nu)\Big)\Big)} = c \cdot \sqrt{\frac{X_\varepsilon^{(2n+1)}(z)}{X_\eta^{(2n+1)}(z)}}, \tag{386}$$

wo c eine von z unabhängige Größe ist.

Bezeichnet man nun mit $\sqrt{X_{\varepsilon,i}^{(2n+1)}}$, $i = 0, 1, 2, \ldots N-1$, linearunabhängige zur Th. Char. $[\varepsilon]$ gehörige Wurzelformen $\sqrt{X_\varepsilon^{(2n+1)}}$, N an der Zahl, so stellt die Determinante

$$\sum \pm \sqrt{X_{\varepsilon,0}^{(2n+1)}(z)}\sqrt{X_{\varepsilon,1}^{(2n+1)}(z_1)} \ldots \sqrt{X_{\varepsilon,N-1}^{(2n+1)}(z_{N-1})}$$

eine in den $N-1$ Punkten $z = z_1, z_2, \ldots z_{N-1}$ verschwindende, zur Th. Char. $[\varepsilon]$ gehörige Wurzelform $\sqrt{X_\varepsilon^{(2n+1)}}$ dar und kann daher in (386) an Stelle der dort auf der rechten Seite vorkommenden Wurzel-

---

die Verallgemeinerung auf Summen von je $n(2p-2)$ Integralen bei *Klein* [Math. Ann. 36 (1890), p. 39].

144) Vgl. dazu die Bemerkung von *Frobenius*, Gött. N. 1888, p. 72.

form $\sqrt{X_\varepsilon^{(2n+1)}(z)}$ gesetzt werden. Verfährt man ebenso bei der Th. Char. $[\eta]$ und bezeichnet dann noch z von jetzt an mit z_0, so geht aus (386) die Formel

$$(387)\qquad \frac{\vartheta[\varepsilon]\left(\left(\sum_0^{N-1} v(z_\nu)\right)\right)}{\vartheta[\eta]\left(\left(\sum_0^{N-1} v(z_\nu)\right)\right)} = c\,\frac{\sum \pm \sqrt{X_{\varepsilon,0}^{(2n+1)}(z_0)} \ldots \sqrt{X_{\varepsilon,N-1}^{(2n+1)}(z_{N-1})}}{\sum \pm \sqrt{X_{\eta,0}^{(2n+1)}(z_0)} \ldots \sqrt{X_{\eta,N-1}^{(2n+1)}(z_{N-1})}}$$

hervor, wo nunmehr c von allen N Punkten $z_0, z_1, \ldots z_{N-1}$ unabhängig ist und in ähnlicher Weise wie in Nr. **59** bestimmt werden kann, indem man unter der Voraussetzung, daß die beiden Th. Char. $[\varkappa\varepsilon]$ und $[\varkappa\eta]$ gerade sind, an Stelle der N Punkte $z_0, z_1, \ldots z_{N-1}$ zuerst die 0^2-Punkte einer zu $(\varkappa)$ gehörigen Form $X_\varkappa^{(2n)}$ und hierauf die 0^2-Punkte einer zu $(\varkappa\varepsilon\eta)$ gehörigen Form $X_{\varkappa\varepsilon\eta}^{(2n)}$ treten läßt, wobei jedesmal $N-p$ der Punkte willkürlich gewählt werden können. Durch Multiplikation der beiden Gleichungen erhält man wie früher c^2 $\left(\text{durch Division } \frac{\vartheta^2[\varkappa\varepsilon](0)}{\vartheta^2[\varkappa\eta](0)}\right)$ algebraisch durch lauter Wurzelfunktionen dargestellt.

62. Noethers Lösung des Umkehrproblems[145]). Um die gewonnene Formel zur Lösung des *Jacobi*schen Umkehrproblems zu verwenden, verstehe man in ihr unter $z_1, z_2, \ldots z_p$ die p gesuchten Punkte und setze gleichzeitig (indem man der Einfachheit halber $n=1$ wählt) an Stelle der $p-3$ übrigen Punkte $z_{p+1}, z_{p+2}, \ldots z_{2p-3}$ $p-3$ festgewählte Punkte $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{p-3}$. Man erhält dann, wenn man wieder

$$(388)\qquad \sum_{\nu=1}^{p} v_\mu(z_\nu) = w_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p)$$

setzt, indem $w_1, w_2, \ldots w_p$ gegebene Werte bezeichnen, aus (386) zunächst

$$(389)\qquad \frac{\vartheta[\varepsilon]\left(\left(v(z) + w + \sum_1^{p-3} v(\xi_\nu)\right)\right)}{\vartheta[\eta]\left(\left(v(z) + w + \sum_1^{p-3} v(\xi_\nu)\right)\right)} = c\sqrt{\frac{X_\varepsilon^{(3)}(z)}{X_\eta^{(3)}(z)}},$$

wo jetzt z noch zur Verfügung bleibt, die unbekannten Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ aber links nicht mehr vorkommen.

$\sqrt{X_\varepsilon^{(3)}(z)}$ stellt eine in den p unbekannten Punkten $z_1, z_2, \ldots z_p$, den $p-3$ festen Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{p-3}$ und p dadurch bestimmten weiteren Punkten $z_1^{(\varepsilon)}, z_2^{(\varepsilon)}, \ldots z_p^{(\varepsilon)}$ 0^1 werdende Wurzelform dritter Dimension dar. Indem man unter $\sqrt{X_\varepsilon'^{(3)}(z)}$ eine beliebig gewählte,

145) Math. Ann. 28 (1887), p. 369.

zur Th. Char. $[\varepsilon]$ gehörige Wurzelform dritter Dimension versteht und mit $\Phi^{(3)}_{\varepsilon,i}(z)$, $i = 0, 1, 2, \ldots p$, linearunabhängige $\Phi^{(3)}$, $p+1$ an Zahl, bezeichnet, die in den $3p-3$ Nullpunkten von $\sqrt{X'^{(3)}_{\varepsilon}(z)}$ und den $p-3$ festen Punkten $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{p-3}$ verschwinden, kann man sich $p+1$ Größen λ so bestimmt denken, daß

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \Phi^{(3)}_{\varepsilon,i}(z) = 0 \tag{390}$$

wird in den p unbekannten Punkten $z_1, z_2, \ldots z_p$, und es ist dann

$$\sqrt{X^{(3)}_{\varepsilon}(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \Phi^{(3)}_{\varepsilon,i}(z)}{\sqrt{X'^{(3)}_{\varepsilon}(z)}}. \tag{391}$$

Verfährt man in derselben Weise mit $\sqrt{X^{(3)}_{\eta}(z)}$, d. h. versteht unter $\sqrt{X'^{(3)}_{\eta}(z)}$ eine beliebig gewählte zur Th. Char. $[\eta]$ gehörige Wurzelform, bezeichnet mit $\Phi^{(3)}_{\eta,i}(z)$, $i = 0, 1, 2, \ldots p$, linearunabhängige in den $3p-3$ Nullpunkten von $\sqrt{X'^{(3)}_{\eta}(z)}$ und den $p-3$ festen Punkten $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{p-3}$ 0^1 werdende Funktionen $\Phi^{(3)}$, $p+1$ an Zahl, und denkt sich die $p+1$ Größen μ so bestimmt, daß

$$\sum_{i=0}^{p} \mu_i \Phi^{(3)}_{\eta,i}(z) = 0 \tag{392}$$

wird für $z = z_1, z_2, \ldots z_p$, so ist

$$\sqrt{X^{(3)}_{\eta}(z)} = \frac{\sum_{\mu=0}^{p} \mu_i \Phi^{(3)}_{\eta,i}(z)}{\sqrt{X'^{(3)}_{\eta}(z)}}. \tag{393}$$

Die p unbekannten Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ erscheinen jetzt als die von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{p-3}$ und etwaigen gemeinsamen Nullpunkten der Formen $X'^{(3)}_{\varepsilon}(z)$ und $X'^{(3)}_{\eta}(z)$ verschiedenen gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen (390) und (392) und diese Gleichungen stellen daher, sobald die Koeffizienten λ und μ bestimmt sind, die Lösung des Umkehrproblems dar. Die Bestimmung der $2p+1$ Verhältnisse dieser Größen λ, μ aber geschieht mittels der Gleichung

$$\frac{\vartheta[\varepsilon]\left(\left(v(z) + w + \sum_{1}^{p-3} v(\zeta_\nu)\right)\right)}{\vartheta[\eta]\left(\left(v(z) + w + \sum_{1}^{p-3} v(\zeta_\nu)\right)\right)} = c \cdot \frac{\sqrt{X'^{(3)}_{\eta}(z)}}{\sqrt{X'^{(3)}_{\varepsilon}(z)}} \cdot \frac{\sum_{0}^{p} \lambda_i \Phi^{(3)}_{\varepsilon,i}(z)}{\sum_{1}^{p} \mu_i \Phi^{(3)}_{\eta,i}(z)}, \tag{394}$$

indem man darin an Stelle von z $2p+1$ verschiedene Punkte einführt. Werden diese Punkte nicht speziell gewählt, so sind die $2p+1$ so entstehenden Gleichungen im allgemeinen voneinander unabhängig;

nur in dem unbestimmten Falle des Umkehrproblems sind sie es nicht, wie auch die $2p+1$ Punkte gewählt werden mögen. In diesem Falle genügen weniger als $2p+1$ Gleichungen zur Bestimmung der dann unendlich vielen Wertesysteme der Verhältnisse der λ, μ.

63. Symmetrische Riemannsche Flächen. Realitätsverhältnisse der φ. *Klein*[146]) bezeichnet eine *Riemann*sche Fläche als symmetrisch, wenn sie durch eine konforme Abbildung zweiter Art von der Periode 2, d. i. durch eine konforme Abbildung, welche die Winkel umlegt, in sich übergeführt wird, und unterscheidet orthosymmetrische Flächen, das sind solche, welche längs der Symmetrielinien zerschnitten in zwei getrennte Hälften zerfallen, und diasymmetrische, welche längs ihrer Symmetrielinien zerschnitten noch ein zusammenhängendes Ganze bilden. Die Anzahl der jeweils vorhandenen Symmetrielinien ist niemals größer als $p+1$ und es zerfallen nach ihrer Anzahl λ die orthosymmetrischen Flächen in $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ verschiedene Arten, je nachdem $\lambda = p+1, p-1, p-3, \ldots$ ist (wobei aber der Wert $\lambda = 0$ auszuschließen ist), die diasymmetrischen Flächen in $p+1$ Arten mit $\lambda = p, p-1, \ldots 1, 0$ Symmetrielinien (vgl. II B 2, Nr. **54** u. III C 4, Nr. **20**).

Man kann das Querschnittsystem einer symmetrischen *Riemann*schen Fläche stets so wählen[147]), daß im Falle $\lambda > 0$ die p *Riemann*schen Normalintegrale alle reell werden und auch ihre Periodizitätsmodulen $a_{\mu\nu}$ an den Querschnitten b bis auf $p-\lambda+1$ unter ihnen reell sind, während im Falle der orthosymmetrischen Flächen die $p-\lambda+1$ Größen $a_{\lambda,\lambda+1} = a_{\lambda+1,\lambda}$, $a_{\lambda+2,\lambda+3} = a_{\lambda+3,\lambda+2}$, $\ldots$ $a_{p-1,p} = a_{p,p-1}$, im Falle der diasymmetrischen Flächen die $p-\lambda+1$ Größen $a_{\lambda\lambda}$, $a_{\lambda+1,\lambda+1}, \ldots a_{pp}$ den imaginären Teil πi besitzen. Im Falle der diasymmetrischen Flächen mit $\lambda = 0$ werden bei passender Zerschneidung der Fläche die p *Riemann*schen Normalintegrale sämtlich rein imaginär und für die imaginären Teile ihrer Periodizitätsmodulen $a_{\mu\nu}$ gilt das gleiche Schema wie im niedrigsten Falle der orthosymmetrischen Flächen.

Symmetrische *Riemann*sche Flächen werden von reellen algebraischen Kurven geliefert, und umgekehrt kann man von ihnen aus die letzteren allgemeingiltig definieren. Durch die Untersuchung der symmetrischen *Riemann*schen Flächen waren daher neue Grundlagen

146) Math. Ann. 19 (1882), p. 159 u. 565; „Riem. Th.“, p 71; Gött. N. 1892, p. 310; Math. Ann. 42 (1893), p. 1; „Riem. Fl.“ II, p. 131.

147) *Weichhold,* Diss. Leipzig 1883 = Z. f. Math. 28 (1883), p. 321. Der Gedanke, die Realität der Periodizitätsmodulen zu untersuchen, findet sich zuerst (auf den hyperelliptischen Fall beschränkt) bei *Henoch,* Diss. Berlin 1867.

für die Diskussion der bei den algebraischen Kurven herrschenden allgemeinen Realitätsverhältnisse gewonnen, und indem *Klein* unter den einer *Riemann*schen Fläche erwachsenden Kurven speziell die Normalkurven der φ (vgl. II B 2, Nr. 28), das sind jene Kurven $2p-2^{\text{ter}}$ Ordnung in einem Raume von $p-1$ Dimensionen, deren Koordinaten Formen φ oder, was dasselbe, Integranden 1. Gattung proportional sind, herausgriff, konnte er an seine früheren Resultate[148]) über die ebenen Kurven 4. Ordnung anknüpfen. Bei passender Auswahl der Integrale 1. Gattung ist die Normalkurve reell und hat den λ Symmetrielinien der *Riemann*schen Fläche entsprechend λ reelle Züge; auch übertragen sich die Begriffe der Ortho- und Diasymmetrie unmittelbar auf die Kurven.

Der besondere Zielpunkt *Klein*s war, die Realitätsverhältnisse darzulegen, welche die in $p-1$ Punkten die Grundkurve berührenden φ und die aus ihnen gebildeten Berührungsformen höherer Dimension (vgl. Nr. 60) bei den verschiedenen Arten der reellen Normalkurven darbieten, und damit die Realitätstheoreme, welche man über Doppeltangenten und andere Berührungskurven der C_4 kennt, auf beliebiges p zu übertragen.

Auf Grund der oben angegebenen Resultate über die Integrale 1. Gattung und ihre Periodizitätsmodulen findet man, daß im orthosymmetrischen Falle von jenen ungeraden Thetafunktionen, in deren Charakteristiken $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon_1' \varepsilon_2' \dots \varepsilon_p'\end{bmatrix}$ die $p-\lambda+1$ Zahlen $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_{\lambda+1} = \dots = \varepsilon_p = 0$ sind, im diasymmetrischen Falle von denjenigen, bei denen $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_{\lambda+1} = \dots = \varepsilon_p = 1$ ist, reelle φ geliefert werden. So ergeben sich für den Fall einer orthosymmetrischen Kurve mit λ reellen Zügen $2^{p-1}(2^{\lambda-1}-1)$ reelle φ. Der Minimalwert von λ ist hier bei geradem p $\lambda = 1$, bei ungeradem $\lambda = 2$. Dies gibt für die niedrigste orthosymmetrische Kurve 0 bzw. 2^{p-1} reelle φ. Ebendiese Zahlen gelten auch für die diasymmetrischen Kurven mit $\lambda = 0$, während für die übrigen diasymmetrischen Kurven $2^{p+\lambda-2}$ reelle φ existieren. Solche Abzählungen nimmt *Klein* auch für die Berührungsformen höherer Dimension vor.

64. Kleins Theorie der Abelschen Funktionen. Die im vorigen Paragraphen genannte Normalkurve der φ, deren homogene Punktkoordinaten in einem Raume von $p-1$ Dimensionen durch die Gleichungen

$$(395) \qquad x_1 : x_2 : \dots x_p = dw_1 : dw_2 : \dots dw_p = \varphi_1 : \varphi_2 : \dots \varphi_p$$

148) Math. Ann. 10 (1876), p. 365; 11 (1877), p. 293.

definiert sind, gehört zu jenen Kurven, welche *Klein* als kanonische bezeichnet und welche er seiner Theorie der *Abel*schen Funktionen[149]) zugrunde gelegt hat, in der er sich eine vom algebraischen Gebilde ausgehende Definition der Thetafunktion als Ziel setzte.

Über die Grundformeln der kanonischen Darstellung ist II B 2, Nr. **37** und **39** berichtet; hier sei nur erinnert an die für den Fall der Normalkurve durch die Gleichung

$$d\omega = \frac{dw_a}{\varphi_a} \tag{396}$$

definierte, allenthalben endliche Differentialform und die mit ihrer Hilfe und einem Integral 3. Gattung P gebildete, nur an der einen Stelle $x = y$ verschwindende Primform

$$\Omega(x, y) = \lim_{\substack{dx=0 \\ dy=0}} \sqrt{-d\omega_x d\omega_y e^{-P_{x,y}^{x+dx,y+dy}}}\,; \tag{397}$$

dabei ist für die hier folgende Darstellung der Thetafunktionen für P das transzendent normierte Integral Π (II B 2, Nr. **18** und **32**) zu wählen.

Aus Primformen $\Omega(x, y)$ kann man eine beliebige Funktion der Klasse $R(x)$, welche in q Punkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(q)}$ 0^1, in q Punkten $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(q)}$ ∞^1 wird, in der Form

$$R(x) = C \cdot \frac{\prod_{\varkappa=1}^{q} \Omega(x, x^{(\varkappa)})}{\prod_{\varkappa=1}^{q} \Omega(x, y^{(\varkappa)})} \tag{398}$$

zusammensetzen.

Verschwindet ferner eine ganze algebraische Form Φ in den r Punkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(r)}$, so nennt *Klein* den nirgend Null oder unendlich werdenden Quotienten

$$\frac{\prod_{\varrho=1}^{r} \Omega(x, x^{(\varrho)})}{\Phi} \tag{399}$$

oder auch die r^{te} Wurzel daraus eine Mittelform. Läßt man speziell an Stelle von Φ eine in $2p - 2$ Punkten $c^{(i)}$ 0^1 werdende Linearform $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_p\varphi_p$ treten, so wird die durch die Gleichung

$$(\mu(x))^{2p-2} = \frac{\prod_{i=1}^{2p-2} \Omega(x, c^{(i)})}{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_p\varphi_p} \tag{400}$$

definierte Form $\mu(x)$ die fundamentale Mittelform genannt.

149) Math. Ann. 36 (1890), p. 1; dazu auch Gött. N. 1888, p. 191; 1889, p. 179 u. 376; Paris C. R. 108 (1889), p. 134 u. 277; Lond. M. S. Proc. 20 (1889), p. 235.

Solche Primformen $\Omega(x, y)$ und Mittelformen $\mu(x)$, ausgedehnt auf den Fall einer beliebigen kanonischen Kurve, werden, in Verbindung mit algebraischen Formen selbst, von *Klein* zur Zusammensetzung der Thetafunktionen benutzt. *Klein* verzichtet im allgemeinen Falle auf die Bestimmung der sogenannten konstanten Faktoren der Thetafunktionen, d. h. jener multiplikativen Konstanten, die nur von den Modulen des algebraischen Gebildes abhängen, indem er diese Bestimmung den später (s. Nr. **100**) folgenden speziellen Untersuchungen des Falles $p = 3$ vorbehält. Für die Argumente der Thetafunktion werden den Nr. **59** und **61** entsprechend die beiden Fälle durchgeführt, in denen an Stelle der v Summen von je $p + 1$ und von je $n(2p - 2)$ Integralen gesetzt werden.

Im ersten Falle setzt *Klein*

$$v_\mu = v_\mu^{xy} - v_\mu^{x'c'} - v_\mu^{x''c''} - \cdots - v_\mu^{x^{(p)}c^{(p)}}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{401}$$

wo zu gegebenem y die übrigen p unteren Grenzpunkte $c', c'', \ldots c^{(p)}$ nach der in Nr. **57** angegebenen Weise mittelst einer in y 0^2 werdenden Linearform bestimmt werden. Dabei wird bei *Klein* unter den 2^{2p} überhaupt vorhandenen Systemen von Punkten c das der gegebenen Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]$ zugehörige dadurch einzeln herausgelöst, daß jeder Charakteristik bereits (vgl. Nr. **60**) ein bestimmtes System von Wurzelformen zugeordnet ist. Sind dann $\varphi_1', \ldots \varphi_p'; \ldots \varphi_1^{(p)}, \ldots \varphi_p^{(p)}$ die Werte, welche die Formen $\varphi_1, \ldots \varphi_p$ an den Stellen $x', \ldots x^{(p)}$ annehmen, so ist

$$\vartheta_{\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]}(v, \tau) = C \cdot \frac{\Omega(x,x') \ldots \Omega(x,x^{(p)})}{\mu(x)^{p-1}} \cdot \frac{\Sigma \pm \varphi_1' \ldots \varphi_p^{(p)} \cdot \prod_{i=1}^{p} \mu(x^{(i)})^{p-1}}{\prod_{i=1}^{p} \prod_{k=i+1}^{p} \Omega(x^{(i)}, x^{(k)})}. \tag{402}$$

Unter der Voraussetzung einer ungeraden Th. Char. $\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]$ lassen wir $x', \ldots x^{(p)}$ mit $c', \ldots c^{(p)}$ zusammenfallen und erhalten

$$\vartheta_{\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]}\left(\int_y^x\right) = C\,\Omega(x,y)\sqrt{\varphi_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(x)\,\varphi_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(y)}. \tag{403}$$

Im zweiten Falle nimmt *Klein* an, daß die Zahl ν der Integrale, wenn wir uns der Einfachheit wegen auf den Fall der Normalkurve beschränken, durch $2p - 2$ teilbar, also $\nu = n(2p - 2)$ sei, und setzt

$$v_\mu = \underbrace{\int^{x'} dv_\mu + \int^{x''} dv_\mu + \cdots + \int^{x^{(\nu)}} dv_\mu}_{\Gamma_n = 0}, \tag{404}$$

was andeuten soll, daß als untere Grenzpunkte die ν Nullpunkte einer algebraischen Form n^{ten} Grades Γ_n gewählt sind. Wir betrachten (vgl. von hier an Nr. **61**) die Nullpunkte einer zur Primcharakteristik $\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]$ gehörigen Wurzelform $\sqrt{\Gamma_{2n+1}}$. Verschwindet in ihnen keine φ-Funktion, so setzen sich die sämtlichen Wurzelformen des zu $\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]$ gehörigen Systems aus ν unter ihnen $\sqrt{\Phi_1}, \sqrt{\Phi_2}, \ldots \sqrt{\Phi_\nu}$ linear zusammen und es ist

$$\vartheta_{\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]}(v, \tau) = C \cdot \frac{\Sigma \pm \sqrt{\Phi_1'} \ldots \sqrt{\Phi_\nu^{(\nu)}} \cdot \prod_{i=1}^{\nu} \mu(x^{(i)})^\nu}{\prod_{i=1}^{\nu} \prod_{k=i+1}^{\nu} \Omega(x^{(i)}, x^{(k)})}. \tag{405}$$

Dabei sind wieder mit $\sqrt{\Phi_1'}, \ldots \sqrt{\Phi_\nu'}; \ldots \sqrt{\Phi_1^{(\nu)}}, \ldots \sqrt{\Phi_\nu^{(\nu)}}$ die Werte bezeichnet, welche die Wurzelformen $\sqrt{\Phi_1}, \ldots \sqrt{\Phi_\nu}$ an den Stellen $x', \ldots x^{(\nu)}$ annehmen.

Verschwinden in den Nullpunkten der Wurzelform $\sqrt{\Gamma_{2n+1}}$ m linearunabhängige φ-Funktionen, so verschwindet die Thetafunktion identisch und zwar mit allen ihren $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots m - 1^{\text{ten}}$, aber nicht allen m^{ten} partiellen Derivierten.

Wenn man die Formel (403) für zwei verschiedene Charakteristiken $\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]$ aufstellt und die beiden so entstandenen Formeln durch einander dividiert, so entsteht, da der Faktor $\Omega(x, y)$ für alle Charakteristiken der nämliche ist, die frühere Formel (374) wieder. In der gleichen Weise geht aus der Formel (405) die frühere (387) hervor. Man wird dabei den Fortschritt beachten, den die neuen Formeln den früheren gegenüber bedeuten, indem durch sie der dem Zähler und Nenner der linken Seiten der früheren Formeln gemeinsame Faktor, soweit er von den Integralgrenzen abhängt, ermittelt ist.

Man kann, wie *Klein* selbst bemerkt hat, die Primform $\Omega(x, y)$ geradezu durch die Gleichung (403) definiert denken und wird sich dabei an das erinnern, was *Schottky* an mehreren Stellen[150]) bezüglich der Formel (403) bemerkt hat.

Endlich wird man die oben angegebenen Formeln mit jenen vergleichen, welche *Pick*[151]) unter Beschränkung auf singularitätenfreie ebene Kurven aufgestellt hat.

65. Die Prymschen Funktionen. *Prym* ist 1869[152]) von dem Resultate *Riemanns* ausgegangen, daß zu jeder willkürlich gewählten

150) Z. B. Berl. Ber. 1909, p 290.

151) Wien. Ber. 94 (1886), p. 367 u. 739; Math. Ann. 29 (1887), p. 259.

152) J. f. Math. 70 (1869), p. 354; 71 (1870), p. 223 u. 305; 73 (1871), p. 340.

*Riemann*schen Fläche immer eine Gruppe in der zerschnittenen Fläche einwertiger *Abel*scher Integrale existiert und daß diese durch passend gewählte Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen vollständig bestimmt werden können, und er erkannte die Möglichkeit eines Fortschrittes in der Funktionentheorie darin, die Grenzbedingungen der *Abel*schen Integrale, beim Überschreiten der Querschnitte um Konstanten zuzunehmen, dahin zu verallgemeinern, daß sie bei diesem Überschreiten in ganze lineare Ausdrücke von sich selbst übergehen sollen.

Die so definierten Funktionen sind jene *Prym*schen Funktionen erster Ordnung, deren ausführliche Theorie *Prym* und *Rost*[153]) veröffentlicht haben. Sie sind Funktionen W der komplexen Veränderlichen z, die in vorgeschriebener Weise unstetig werden und für welche

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu\text{:} \quad W^+ = A_\nu W^- + \mathfrak{A}_\nu \\ &\text{längs } b_\nu\text{:} \quad W^+ = B_\nu W^- + \mathfrak{B}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p) \\ &\text{längs } c_\nu\text{:} \quad W^+ = \quad W^- + \mathfrak{C}_\nu, \end{aligned} \tag{406}$$

endlich für die nach den Unstetigkeitspunkten führenden Schnitte l_σ

$$\text{längs } l_\sigma\text{:} \quad W^+ = W^- + 2\pi i \mathfrak{L}_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots) \tag{407}$$

ist; dabei bestehen für die Konstanten die Bedingungen, daß mod. $A_\nu = \text{mod. } B_\nu = 1$ ist, und weiter die Relationen

$$\begin{aligned} &(1 - B_\nu)\,\mathfrak{A}_\nu - (1 - A_\nu)\,\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{C}_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p) \\ &\sum_\nu \mathfrak{C}_\nu + 2\pi i \sum_\sigma \mathfrak{L}_\sigma \cdot \qquad = 0. \end{aligned} \tag{408}$$

Eine Funktion W von der hier charakterisierten Art ist bis auf eine additive Konstante bestimmt, sobald für sie die p Faktorenpaare A_ν, B_ν und die Konstanten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$, sowie die zu den „uneigentlichen" Faktorenpaaren $A_\nu = B_\nu = 1$ gehörigen Konstanten $\mathfrak{A}$ im Rahmen der oben angegebenen Bedingungen festgelegt sind.

Im zweiten Teile des *Prym-Rost*schen Werkes werden unter den Funktionen W jene einfachsten ausgewählt, aus denen sich alle anderen linear zusammensetzen lassen, und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen ermittelt.

Das System der p Faktorenpaare A_ν, B_ν wird Charakteristik genannt und eine Charakteristik, bei der die p Paare sämtlich oder nur

153) Th. der *Prym*schen Funktionen erster Ordnung 1911. Diese *Prym*schen Funktionen 1. Ordnung bilden einen speziellen Fall allgemeinerer *Prym*scher Funktionen N. Ordnung, die dadurch charakterisiert sind, daß sie in Gruppen von N Funktionen beim Überschreiten der Querschnitte lineare Transformationen erleiden und zugleich durch voneinander unabhängige Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen vollständig bestimmt werden können.

zum Teile eigentliche sind, heißt eine gewöhnliche oder gemischte; jene Charakteristik aber, bei der alle Paare uneigentliche sind, d. h. für welche $A_1 = B_1 = \cdots = A_p = B_p = 1$ ist, wird die ausgezeichnete Charakteristik genannt. Die der ausgezeichneten Charakteristik entsprechenden Funktionen sind die der *Riemann*schen Theorie; sie allein gehören in den Kreis der hier behandelten *Abel*schen Funktionen.

Den Mittelpunkt der *Prym-Rost*schen Theorie der *Abel*schen Funktionen bildet die Gewinnung der nur an einer Stelle η logarithmisch unendlich werdenden Funktion $P_0\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$. Sie wird aus dem in η und einem zweiten Punkte ξ mit den Gewichten ± 1 logarithmisch unendlich werdenden Integral 3. Gattung $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\xi\\ z\end{smallmatrix}\right|$, das bei *Prym-Rost* in seiner Konstante so normiert ist, daß $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta z\\ \xi\end{smallmatrix}\right| = \Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\xi\\ z\end{smallmatrix}\right| \pm \pi i$ ist, in folgender Weise abgeleitet. Man bildet die in einem gewissen Teile der *Riemann*schen Fläche von $\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\xi\\ z\end{smallmatrix}\right|$ um die additive Konstante $2\pi i$ verschiedene Funktion $\Pi_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\xi\\ z\end{smallmatrix}\right|$, betrachtet diese als Funktion des Parameters ξ und integriert sie, nachdem man sie mit dem Differential 1. Gattung dv_ϱ multipliziert hat, um den Querschnitt b_ϱ. Es entsteht dadurch bereits eine nur an der einen Stelle η logarithmisch unendlich werdende Funktion $J_\varrho\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$, aus der nun durch Summation nach ϱ unter Hinzufügung gewisser allenthalben endlicher Bestandteile die gewünschte, nur an der einen Stelle $z = \eta$ mit dem Gewichte $+1$ logarithmisch unendlich werdende Funktion $P_0\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ hervorgeht, für welche

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu\colon\ P^+ = P^-,\\
&\text{längs } b_\nu\colon\ P^+ = P^- + \frac{2}{p} v_\nu(\bar{z}) - 2v_\nu(\eta) - \frac{2k_\nu}{p} + \frac{a_{\nu\nu}}{p},\ (\nu = 1,2,\cdots p)\\
&\text{längs } c_\nu\colon\ P^+ = P^- - \frac{2\pi i}{p},\\
&\text{längs } l_\eta\colon\ P^+ = P^- + 2\pi i
\end{aligned} \tag{409}$$

ist, wo die k_ν die aus der *Riemann*schen Theorie bekannten Konstanten bezeichnen, auch ist je nach der gegenseitigen Lage der Punkte z und η

$$P_0\left|\begin{smallmatrix}z\\ \eta\end{smallmatrix}\right| = P_0\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right| \pm \pi i. \tag{410}$$

Aus der Funktion $P_0\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ entsteht gemäß der Gleichung

$$\Pi\left|\begin{smallmatrix}\eta\xi\\ z\end{smallmatrix}\right| = P_0\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right| - P_0\left|\begin{smallmatrix}\xi\\ z\end{smallmatrix}\right| \tag{411}$$

das an den Stellen η, ζ mit den Gewichten ± 1 logarithmisch unendlich werdende Integral 3. Gattung, während in

$$P_m\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^m P_0\left|\begin{matrix}z\\ \eta\end{matrix}\right|}{d\eta^m} \tag{412}$$

das an der Stelle $z = \eta$ wie $\frac{1}{(z-\eta)^m}$ unendlich werdende Integral 2. Gattung erhalten wird.

Setzt man weiter

$$\Theta\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right| = e^{-P_0\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|}, \tag{413}$$

so ist $\Theta\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ eine in T' allenthalben einwertige, endliche und stetige Funktion von z, die in jedem von η verschiedenen Punkte z von Null verschieden ist, für $z = \eta$ aber 0^1 wird und deren Verhalten an den Querschnitten a, b, c sich unmittelbar aus den Gleichungen (409) ergibt.

Irgendeine Funktion der Klasse $R(z)$, welche in den q Punkten $x_1, x_2, \ldots x_q$ 0^1, in den q Punkten $y_1, y_2, \ldots y_q$ ∞^1 wird, zwischen denen dann stets Gleichungen von der Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{q}[v_\mu(y_\varkappa) - v_\mu(x_\varkappa)] = \sum_{\nu=1}^{p}\varkappa_\nu a_{\mu\nu} + \lambda_\mu \pi i \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{414}$$

bestehen, in denen die $\varkappa, \lambda$ ganze Zahlen bezeichnen, kann aus Funktionen Θ zusammengesetzt werden in der Gestalt

$$R(z) = C \cdot \frac{\Theta\left|\begin{matrix}x_1\\ z\end{matrix}\right| \Theta\left|\begin{matrix}x_2\\ z\end{matrix}\right| \ldots \Theta\left|\begin{matrix}x_q\\ z\end{matrix}\right|}{\Theta\left|\begin{matrix}y_1\\ z\end{matrix}\right| \Theta\left|\begin{matrix}y_2\\ z\end{matrix}\right| \ldots \Theta\left|\begin{matrix}y_q\\ z\end{matrix}\right|} e^{2\sum_\nu \varkappa_\nu v_\nu(z)}. \tag{415}$$

Von der Funktion $P_0\left|\begin{matrix}\eta\\ z\end{matrix}\right|$ gelangen endlich *Prym* und *Rost* zu der in den p Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ 0^1 werdenden *Riemann*schen Thetafunktion auf folgende Weise. Setzt man

$$L\left|\begin{matrix}\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p\\ z\end{matrix}\right| = -\sum_{\varrho=1}^{p} P_0\left|\begin{matrix}\varepsilon_\varrho\\ z\end{matrix}\right| + A(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_p), \tag{416}$$

so ist L eine in ε_ϱ wie $\log(z - \varepsilon_\varrho)$ unendlich werdende Funktion von z, für welche

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu\colon\ L^+ = L^-,\\
&\text{längs } b_\nu\colon\ L^+ = L^- - 2\left(v_\nu(\bar{z}) - \sum_{\varrho=1}^{p} v_\nu(\varepsilon_\varrho) - k_\nu\right) - a_{\nu\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \cdots p)\\
&\text{längs } c_\nu\colon\ L^+ = L^- + 2\pi i,\\
&\text{längs } l_\varrho\colon\ L^+ = L^- - 2\pi i \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots p)
\end{aligned} \tag{417}$$

ist und bei der man den von den Punkten ε_ϱ, nicht aber von z abhängigen Teil A so bestimmen kann, daß sie nur von den p Größen

$$v_\nu(z) - \sum_{\varrho=1}^{p} v_\nu(\varepsilon_\varrho) - k_\nu \text{ abhängt; dann ist}$$

$$e^{L\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p\\ z\end{smallmatrix}\right|}$$

von einem konstanten nicht nur von z, sondern auch von den Punkten ε unabhängigen Faktor A abgesehen die gewünschte *Riemann*sche Thetafunktion, für welche man so die Darstellung

$$\text{(418)}\qquad \vartheta\Big(\Big(v(z) - \sum_{\nu=1}^{p} v(\varepsilon_\nu) - k\Big)\Big)$$

$$= A \cdot \frac{\prod_{\varrho=1}^{r}\prod_{\nu=1}^{p} \Theta\left|\begin{smallmatrix}\alpha_\varrho\\ \varepsilon_\nu\end{smallmatrix}\right|^{\mu_\varrho - 1}}{\prod_{\varkappa=1}^{q}\prod_{\nu=1}^{p} \Theta\left|\begin{smallmatrix}\infty_\varrho\\ \varepsilon_\nu\end{smallmatrix}\right|^{i_\varkappa + 1}} \cdot \frac{\Sigma \pm \frac{dv_1}{d\varepsilon_1} \cdots \frac{dv_p}{d\varepsilon_p}}{\prod_{i=1}^{p}\prod_{k=i+1}^{p} \Theta\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_i\\ \varepsilon_k\end{smallmatrix}\right|} e^{\varphi} \cdot \Theta\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_1\\ z\end{smallmatrix}\right| \dots \Theta\left|\begin{smallmatrix}\varepsilon_p\\ z\end{smallmatrix}\right|$$

erhält. Dabei sind mit α_ϱ die im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte der *Riemann*schen Fläche, mit $\mu_\varrho - 1$ ihre Ordnungszahlen bezeichnet; ebenso ist $i_\varkappa - 1$ die Ordnungszahl des unendlich fernen Punktes $\infty_\varkappa$; endlich steht φ zur Abkürzung von

$$\text{(419)}\qquad \varphi = 2\sum_{\sigma=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p}(\mathfrak{g}_\sigma + 1)v_\sigma(\varepsilon_\nu),$$

wobei bezüglich der Bedeutung der ganzen Zahlen $\mathfrak{g}_\sigma$ auf *Prym-Rost* II, p. 132 verwiesen werden mag.

Die Funktion $P_0\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ gehört nicht mehr zu den eingangs genannten Funktionen W; um sie zu gewinnen, mußte man auf die Konstanz der Periodizitätsmodulen an den Querschnitten b verzichten. Dementsprechend erlangt die Funktion $\Theta\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$ an den Querschnitten b Faktoren, welche von der Variable z abhängen. Wir werden die Funktion $\Theta\left|\begin{smallmatrix}\eta\\ z\end{smallmatrix}\right|$, weil sie nur an der einen Stelle η 0^1 wird, eine „Primfunktion“ zu nennen haben. Sie entspricht durchaus der im vorigen Paragraphen angeschriebenen „Primform“ $\Omega(x, y)$ *Kleins*, mittelst der sie unter Heranziehung von Mittelformen, wie *Klein*[154]) selbst angegeben hat, vorbehaltlich geeigneter Normierung an den Querschnitten in der Form

$$\text{(420)}\qquad \Theta\left|\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right| = \Omega(x, y) \cdot \mu(x)^{\frac{1-p}{p}} \cdot \mu(y)^{\frac{1-p}{p}}$$

dargestellt werden kann.

154) D. M. V. Jahresb. 20 (1911), p. 199.

Später hat *Ritter*[155]) die *Klein*sche Primform durch eine „multiplikative Primform“

$$P(z, e) = \Omega(z, e)\frac{\mu(e_1, e_2)}{\mu(z_1, z_2)} \tag{421}$$

ersetzt, welche an allen Querschnitten nur konstante Faktoren annimmt. Eine „Primfunktion“ mit diesen Eigenschaften gibt es nicht und auf die *Ritter*sche Primform trifft das im ganzen Umfange zu, was *Klein* anfänglich für alle Primformen ausgesprochen hat, daß nämlich solche einfache Elemente nur im Gebiete der homogenen Variablen existieren.

Andererseits kann die *Ritter*sche multiplikative Primform in verschiedenen Gestalten dargestellt werden. So gibt *Fricke*[156]) für sie den Ausdruck

$$P(z, e) = \Omega(z, e)\sqrt[n]{\frac{z_2}{\prod_{\nu=1}^{n}\Omega(z, \infty_\nu)}} \tag{422}$$

und *Wellstein*[157]) zeigt, daß

$$P(z, e) = \sqrt[n]{(z, q)}\, e^{R(z,e)} \tag{423}$$

ist, wenn $R(z, e)$ das in e mit dem Gewichte -1, in n konjugierten Punkten $q_1, q_2, \ldots q_n$ mit dem Gewichte $+\frac{1}{n}$ logarithmisch unendlich werdende Integral 3. Gattung ist.

Die Unmöglichkeit einer Primfunktion, die an allen Querschnitten konstante Faktoren erlangt, ergibt sich auch aus den Untersuchungen *Dixons*[158]) über Primfunktionen.

Soll nämlich eine in T' einwertige Funktion F existieren, für welche

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu\colon\ F^+ = F^- \cdot e^{\sum_\mu \alpha_{\mu\nu} u_\mu + \beta_\nu}, \\ &\text{längs } b_\nu\colon\ F^+ = F^- \cdot e^{\sum_\mu \gamma_{\mu\nu} u_\mu + \delta_\nu} \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p) \tag{424}$$

ist, so müssen, wie *Dixon* zeigt, die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ $p+1$ Bedingungen genügen. Diese können in der Weise erfüllt werden, daß man die sämtlichen Größen α und β und jene $(p-1)p$ Größen $\gamma_{\mu\nu}$, für welche $\mu \gtrless \nu$ ist, ganz willkürlich und die p Größen $\gamma_{\mu\mu}$ im Rahmen der Bedingung

$$\sum_\mu \gamma_{\mu\mu} = m - n + \frac{1}{2\pi i}\sum_\mu \sum_\nu \alpha_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} \tag{425}$$

155) Math. Ann. 44 (1894), p. 290; Gött. N. 1893, p. 127.

156) Gött. N. 1900, p. 314; über Primformen auch bei *Klein-Fricke*, Ellipt. Modulfunktionen 2 (1892), p. 502.

157) Gött. N. 1900, p. 380.

158) Lond. M. S. Proc. 31 (1900), p. 297 u. 33 (1901), p. 10.

beliebig annimmt. Es bezeichnet dabei m die Anzahl der ∞^1-Punkte, n die Anzahl der 0^1-Punkte von F und $\omega_{\mu\nu}$ den Periodizitätsmodul von u_μ am Querschnitte b_ν. Die Größen δ sind dann durch die α, β, γ und die Unendlichkeits- und Nullpunkte von F eindeutig bestimmt.

Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so kann man eine Funktion F bei, ihrer Zahl und Lage nach, beliebig angenommenen Unendlichkeits- und Nullpunkten aus Ausdrücken

$$e^{\int v\, du_\mu} \tag{426}$$

zusammensetzen, wo v ein Integral 2. Gattung bezeichnet.

Nimmt man speziell $m = 0$, $n = 1$, setzt auch alle Größen α, β und jene $\gamma_{\mu\nu}$, für welche $\mu \gtrless \nu$ ist, der Null gleich, dagegen $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \cdots = \gamma_{pp} = -\frac{1}{p}$, so entsteht die Primfunktion $\Theta(z)$, welche nur in einem Punkte 0^1 wird und für welche

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu\text{:} \quad \Theta^+ = \Theta^- \\ &\text{längs } b_\nu\text{:} \quad \Theta^+ = \Theta^- \cdot e^{-\frac{1}{p}u_\nu + \delta_\nu} \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p) \tag{427}$$

ist.

Aus den Gleichungen (425) sieht man aber, daß alle Größen α und γ nur dann gleichzeitig Null sein können, wenn $m = n$ ist, d. h. F in gleich vielen Punkten Null und Unendlich wird.

Größen von der Art (426) hat auch *Wellstein* in einer nachgelassenen und noch nicht veröffentlichten Arbeit zur Bildung von Primfunktionen benutzt. Er geht dabei von den *Weierstraß*schen Lückenzahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ aus und bildet[159]) ein System von $2p$ Fundamentalintegralen 1. und 2. Gattung $w_1, w_2, \ldots w_p$; $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$, von denen w_μ im Unendlichen 0^{λ_μ}, ξ_μ dort ∞^{λ_μ} wird. Setzt man dann

$$H = \sum_{\mu=1}^{p} \int w_\mu d\xi_\mu, \quad K = \sum_{\mu=1}^{p} \xi_\mu dw_\mu, \tag{428}$$

so sind e^{-H} und e^K im Unendlichen 0^1 werdende Primfunktionen, aus denen *Wellstein* die weitere

$$\mathfrak{P}(o) = e^{-\frac{1}{2p}\sum_{\mu=1}^{p}(w_\mu d\xi_\mu - \xi_\mu dw_\mu)} \tag{429}$$

zusammensetzt. Unter Benutzung eines in ε und ∞ mit den Gewichten ∓ 1 logarithmisch unendlich werdenden Integrals 3. Gattung $\mathfrak{R}(o, \varepsilon)$ erhält er daraus die in dem beliebigen Punkte ε verschwindende Primfunktion

$$\mathfrak{P}(o, \varepsilon) = e^{\mathfrak{R}(o,\varepsilon)}\mathfrak{P}(o)\mathfrak{P}(\varepsilon), \tag{430}$$

159) Vgl. dazu *Hensel* und *Landsberg*, Algebr. Funkt. 1902, p. 569.

während er aus

$$e^{\frac{1}{p}K} = e^{\frac{1}{p}\sum_{\mu=1}^{p}\zeta_\mu dw_\mu} \tag{431}$$

in der gleichen Weise σ-Primfunktionen und bei Zugrundelegung von Normalintegralen Θ-Primfunktionen ableitet.

VIII. Der Fall $p = 2$.[160])

66. Charakteristikentheorie. Von den 16 Thetafunktionen des Falles $p = 2$ sind 10 gerade und 6 ungerade. Bezeichnet man die 6 ungeraden Th. Char. in irgendwelcher Reihenfolge mit $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, ... $[\omega_6]$, so stellen die 15 Kombinationen zu zweien $(\omega_\mu \omega_\nu)$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots 6)$ die 15 eigentlichen Per. Char. dar. Von diesen sind zwei $(\omega_\varkappa \omega_\lambda)$ und $(\omega_\mu \omega_\nu)$ azygetisch oder syzygetisch, je nachdem die Zahlenpaare $\varkappa, \lambda$ und μ, ν eine Zahl gemeinsam haben oder nicht. Die 5 Per. Char. $(\omega_1 \omega_6)$, $(\omega_2 \omega_6)$, ... $(\omega_5 \omega_6)$ sind also zu je zweien azygetisch und bilden ein F. S. von Per. Char. Da für dieses $[\omega_6]$ die Summe seiner ungeraden Charakteristiken ist, so bilden die 5 Th. Char. $[\omega_1]$, $[\omega_2]$, ... $[\omega_5]$ eine Hauptreihe und liefern in ihren Kombinationen zu dreien die 10 geraden Th. Char.. Da aber die Summe aller 6 ungeraden Th. Char. $= [0]$ ist, so kann jede gerade Th. Char. noch auf eine zweite Weise als Summe dreier ungeraden dargestellt werden, derart daß jedesmal in den beiden Darstellungen alle 6 ungeraden Th. Char. auf-

160) Außer den grundlegenden Arbeiten von *Göpel* und *Rosenhain* sind als zusammenfassende Behandlungen des Falles $p = 2$ zu nennen: *Prym*, Wien Denkschr. 24 (1865), II, p. 1; 2. Ausg. 1885; *Thomae*, „Formeln" [siehe auch Z. f. Math. 11 (1866), p. 427 und Jenaische Zeitschr. f Naturw. 20 (1887), p. 581]; *Weber*, Math. Ann. 14 (1879), p. 173; *Cayley*, Phil. Trans. 171 (1880), p. 897 = Coll. math. pap. 10 (1896), p. 463 [siehe auch Lond. M. S. Proc. 9 (1878), p. 29; J. f. Math. 83 (1877), p. 210 u 220; 85 (1878), p. 214; 87 (1879), p. 74; 88 (1880), p. 74 = Coll math. 10 (1896), p. 155, 157, 166, 184, 422 u. 455]; *Krazer*, „$p = 2$"; *Forsyth*, Phil. Trans. 173 (1882), p. 783; *Krause*, „Transf."; *Brioschi*, Ann. di mat. 14_2 (1887), p. 241 = Op. mat. 2 (1902), p. 345 [siehe auch Acc. Linc. Trans. 7 (1883), p. 137 = Op. mat. 3 (1904), p. 393 und Paris C. R. 102 (1886), p. 239 u. 297 = Op. mat. 5 (1909), p. 53]; *Schottky*, J. f. Math. 105 (1889), p. 233. Es seien ferner erwähnt: *Clifford*, Math. pap. 1882, p. 368; *Staude*, Math. Ann. 25 (1885), p. 363; *Pokrowsky*, Bull. sc. math. 20_2 (1890), I, p. 86 und D. M. V. Jahresb. 4 (1897), p. 137; *v. Dalwigk*, N. Acta Leop. 57 (1892), Zweiter Theil p. 246; *Lipps*, Leipz. Ber. 44 (1892), p. 340 u. 473; *Hancock*, Diss. Berlin 1894; *Nölke*, Progr. Birkenfeld 1903; *Dixon*, Quart. J. 36 (1905), p. 1 und die im Bull. sc. math. 12_2 (1888), II, p. 168 u. 164 zitierten, dem Verfasser nicht zugänglich gewesenen Werke von *Possé*, Sur les fonctions Θ à deux arguments et sur le problème de Jacobi, St. Petersburg 1882, und *Pokrowsky*, Théorie des fonctions ultra-elliptiques de la première classe, Moskau 1887.

treten; die 20 Kombinationen zu dreien aller 6 ungeraden Th. Char. liefern also die 10 geraden Th. Char. und zwar jede zweimal. Bezeichnet man mit $(\varkappa)$ irgendeine Per. Char., so bilden die 6 Th. Char. $[\varkappa\omega_1]$, $[\varkappa\omega_2]$, ... $[\varkappa\omega_6]$ ein F. S. von Th. Char. Der Komplex von F. S., der entsteht, wenn man für $(\varkappa)$ der Reihe nach alle 16 Per. Char. treten läßt, liefert zugleich alle überhaupt existierenden F. S. von Th. Char.; davon besteht das für $(\varkappa) = (0)$ entstehende aus 6 ungeraden Th. Char., jedes andere enthält 2 ungerade und 4 gerade Th. Char. Irgend 2 der 16 F. S. haben stets und nur 2 Th. Char. gemeinsam.

Sind (α), (β) irgend 2 der 15 eigentlichen Per. Char., so bilden (0), (α), (β), $(\alpha\beta)$ eine Gruppe von Per. Char., $[\varkappa]$, $[\varkappa\alpha]$, $[\varkappa\beta]$, $[\varkappa\alpha\beta]$, bei beliebigem $[\varkappa]$, ein System von Th. Char. Sind (α) und (β) syzygetisch, so heißen Gruppe und System *Göpel*sche; sind sie azygetisch, *Rosenhain*sche. Der allgemeine Typus einer *Göpel*schen Gruppe ist

$$(0),\ (\omega_1\omega_2),\ (\omega_3\omega_4),\ (\omega_5\omega_6), \tag{432}$$

der eines *Göpel*schen Systems

$$[\varkappa\omega_1],\ [\varkappa\omega_2],\ [\varkappa\omega_1\omega_3\omega_4],\ [\varkappa\omega_2\omega_3\omega_4]. \tag{433}$$

Die Anzahl der verschiedenen Göpelschen Gruppen beträgt 15, die der *Göpel*schen Systeme 60; von diesen bestehen 15 (eines in jedem Komplexe) aus 4 geraden, die übrigen 45 aus 2 geraden und 2 ungeraden Th. Char. Der allgemeine Typus einer *Rosenhain*schen Gruppe ist

$$(0),\ (\omega_1\omega_2),\ (\omega_1\omega_3),\ (\omega_2\omega_3), \tag{434}$$

der eines *Rosenhain*schen Systems

$$[\varkappa\omega_1],\ [\varkappa\omega_2],\ [\varkappa\omega_3],\ [\varkappa\omega_1\omega_2\omega_3]. \tag{435}$$

Die Anzahl der verschiedenen *Rosenhain*schen Gruppen beträgt 20, die der *Rosenhain*schen Systeme 80; von diesen bestehen 20 (eines in jedem Komplexe) aus 1 geraden und 3 ungeraden, die übrigen 60 aus 3 geraden und 1 ungeraden Th. Char.

67. Thetarelationen. Ein Thetaquadrat $\vartheta^2[\varepsilon](v)$ ist eine gerade Thetafunktion zweiter Ordnung mit der Charakteristik $[0]$ und man kann daher durch 4 Thetaquadrate, wenn sie nur linear unabhängig sind, jedes weitere linear ausdrücken.

Ein Thetaprodukt $\vartheta[\varkappa](v)\vartheta[\varkappa\varepsilon](v)$ ist eine Thetafunktion zweiter Ordnung mit der Charakteristik $[\varepsilon]$ und von den 8 zu einem $[\varepsilon]$ gehörigen Produkten sind 4 gerade und 4 ungerade Funktionen von (v). Zwischen 3 von 4 solchen Thetaprodukten besteht jedesmal eine lineare Relation.

Diese Relationen zwischen Thetaquadraten und Thetaprodukten sind vereinzelt schon von *Göpel* und *Rosenhain*, vollständiger von *Weber*[161]) angegeben worden; *Krazer* („$p = 2$“) hat sie sämtlich aus der *Riemann*schen Thetaformel abgeleitet. Zwischen den Thetaquadraten erhält man die 240 Gleichungen[162])

$$(436) \qquad \sum_{i=1}^{4} \pm \vartheta^2[\omega_i\omega_5\omega_6](0)\vartheta^2[\varkappa\omega_i](v) = 0,$$

die aussagen, daß zwischen irgend 4 Thetaquadraten, deren Charakteristiken einem F. S. von Th. Char. entnommen sind, eine lineare Relation besteht. Irgend 4 andere erweisen sich als linear unabhängig und man kann durch 4 solche jedes weitere linear ausdrücken; in der einfachsten Form geschieht dies durch 4 Thetaquadrate, deren Charakteristiken ein *Göpel*sches oder ein *Rosenhain*sches System bilden.[163])

Für die Thetaprodukte liefert die Formel[164])

$$(437) \qquad \sum_{i=1}^{3} \pm \vartheta[\omega_i\omega_5\omega_6](0)\vartheta[\omega_i\omega_4\omega_6](0)\vartheta[\varkappa\omega_i](v)\vartheta[\varkappa\omega_i\omega_4\omega_5](v) = 0$$

die oben erwähnten Gleichungen, 120 an der Zahl, zwischen je 3 Thetaprodukten.

Weber hat zuerst auf die Übereinstimmung der Formeln (436), (437) mit den Relationen zwischen den 9 Koeffizienten einer ternären orthogonalen Substitution hingewiesen. Sondert man nämlich eine beliebige der 10 geraden Th. Char. $[\omega_1\omega_2\omega_3] = [\omega_4\omega_5\omega_6]$ aus und bringt die 9 übrigen in ein quadratisches Schema von der Form

$$(438) \qquad \begin{matrix} [\omega_1\omega_5\omega_6] & [\omega_1\omega_6\omega_4] & [\omega_1\omega_4\omega_5] \\ [\omega_2\omega_5\omega_6] & [\omega_2\omega_6\omega_4] & [\omega_2\omega_4\omega_5] \\ [\omega_3\omega_5\omega_6] & [\omega_3\omega_6\omega_4] & [\omega_3\omega_4\omega_5] \end{matrix}$$

so bilden die 9 Quotienten

$$\frac{\vartheta[\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\gamma](0)\vartheta[\varkappa\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\gamma](v)}{\vartheta[\omega_1\omega_2\omega_3](0)\vartheta[\varkappa\omega_1\omega_2\omega_3](v)},$$

wo $(\varkappa)$ eine beliebige Per. Char. bezeichnet, mit passenden Vorzeichen versehen, in der durch (438) bestimmten Anordnung die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution. In den bekannten Gleichungen zwi-

161) Math. Ann. 14 (1879), p. 173.

162) Bezüglich des Vorzeichens siehe *Krazer*, a. a. O. p. 35.

163) *Krazer*, a. a. O., Formeln (III), (III′), p. 42 u. 53; vgl. übrigens schon *Rosenhain*, Formel (94), p. 420 und *Göpel*, Formeln (30), (31), p. 290.

164) *Krazer*, a. a. O. p. 39; *Weber*, a. a. O. p. 179.

schen diesen sind jetzt die zwischen den Thetaquadraten und Thetaprodukten bestehenden Relationen zusammengefaßt.[165])

Aus irgendeiner der 120 Gleichungen (437) kann man durch zweimaliges Quadrieren eine Relation vierten Grades zwischen den Quadraten der 6 in ihr vorkommenden Thetafunktionen ableiten und erhält dann, wenn man diese 6 Thetaquadrate linear durch 4 ausdrückt, eine homogene Gleichung vierten Grades zwischen diesen. Dabei tritt eine Vereinfachung ein, wenn man in der eben genannten Weise die Gleichung zwischen den Quadraten von 4 *Göpel*schen Thetafunktionen aufstellt. Da nämlich die 4 Charakteristiken irgend zweier der drei in einer Gleichung (437) auftretenden Thetaprodukte stets ein *Göpel*sches System bilden, so erhält man schon nach passendem einmaligen Quadrieren, wenn man die beiden anderen Thetaquadrate auch durch diese 4 *Göpel*schen ausdrückt, eine Gleichung zwischen diesen, welche vom vierten Grade ist in bezug auf die Thetafunktionen selbst und außer ihren Quadraten noch ihr Produkt enthält; sie ist unter den Namen der *Göpel*schen biquadratischen Relation bekannt.[166]) Durch nochmaliges Quadrieren liefert sie erst die zwischen den Quadraten der 4 *Göpel*schen Thetafunktionen bestehende Relation.

---

165) *Caspary* [J. f. Math. 94 (1883), p. 74] hat dieses Resultat dahin verallgemeinert, daß die 16 Thetaprodukte $\vartheta[\varepsilon](u)\vartheta[\varepsilon](v)$ bei beliebigen unabhängigen Veränderlichen u, v, wenn man sie einem Komplexe von 4 *Rosenhain*schen Systemen entsprechend in 4 Horizontal- und 4 Vertikalreihen anordnet und mit passenden Vorzeichen versieht, die Koeffizienten einer quaternären linearen Substitution bilden, welche die Summe der Quadrate der 4 gegebenen Veränderlichen in die mit einem Faktor multiplizierte Summe der Quadrate der 4 neuen überführt; vgl. auch *Dobriner* [Acta math. 9 (1887), p. 99].

Mit der Aufstellung solcher „Orthogonalsysteme" und ihrer Verwendung nicht nur zur Gewinnung der algebraischen Beziehungen zwischen den Thetafunktionen, sondern auch der bei Lösung von mechanischen Problemen benutzten Differentialgleichungen (siehe Nr. 72) hat sich *Caspary* noch in mehreren Arbeiten [Paris C. R. 104 (1887), p. 490; 111 (1890), p. 225; 112 (1891), p. 1120 u. 1305; Ann. Éc. Norm. 10_3 (1893), p. 253] beschäftigt; fortgeführt wurden diese Untersuchungen sodann von *Jahnke* [Z. f. Math. 37 (1892), p. 178; Berl. Ber. 1896, p. 1023; J. f. Math. 118 (1897), p. 224 u. 119 (1898), p. 234; Paris C. R. 125 (1897), p. 486; 126 (1898), p. 1013 u. 1083; Leipz. Ber. 52 (1900), p. 140; 2^{me} Congr. internat. Paris 1900 (1902), p. 279; D. M. V. Jahresb. 12 (1903), p. 96 u. 16 (1907), p. 551; Berlin math. Ges. Sitzb. 6 (1907), p. 59; J. f. Math. 133 (1908), p. 243; Palermo Rend. 35 (1913), p. 50; vgl. auch *Krause,* Arch. d. Math. 1_3 (1901), p. 64], während *Krause* die Aufstellung von Orthogonalsystemen in den Fällen $p = 3$ und $p = 4$ untersuchte [Paris C. R. 131 (1900), p. 1188; Leipz. Ber. 53 (1901), p. 65 u. 105; dazu auch *Jahnke,* Schwarz-Festschr. 1914, p. 157].

166) *Göpel,* Gl. (32), p. 292; *Krazer* a. a. O. Gl. (IV), p. 55.

68. Die Kummersche Fläche.[167]) Setzt man die homogenen Punktkoordinaten des Raumes vier linearunabhängigen Thetaquadraten proportional, also

$$(439) \qquad x : y : z : w = \vartheta^2[\alpha](v) : \vartheta^2[\beta](v) : \vartheta^2[\gamma](v) : \vartheta^2[\delta](v),$$

wo $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\delta]$ nicht ein und demselben F. S. von Th. Char. angehören, so wird dadurch eine *Kummer*sche Fläche definiert (vgl. Nr. 34). Läßt man an Stelle von (v) die 16 Systeme zusammengehöriger Halben der Periodizitätsmodulen treten, so erhält man die 16 Knotenpunkte der *Kummer*schen Fläche, denen also die 16 Per. Char. (ε) zugeordnet werden können. Die 16 Gleichungen $\vartheta[\varepsilon](v) = 0$ liefern die 16 singulären Ebenen der *Kummer*schen Fläche, denen so die 16 Th. Char. $[\varepsilon]$ entsprechen. Auf jeder singulären Ebene $\vartheta[\varepsilon](v) = 0$ liegen 6 von den 16 Knotenpunkten, nämlich die 6 $(\varepsilon\omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots 6$, und durch jeden Knotenpunkt (ε) gehen 6 von den 16 singulären Ebenen, nämlich die 6 $\vartheta[\varepsilon\omega_i](v) = 0$, $i = 1, 2, \ldots 6$.

Das Koordinatentetraeder wird aus 4 singulären Ebenen gebildet, die nicht durch einen und denselben Punkt gehen. Nimmt man für $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\delta]$ ein *Rosenhain*sches System (435) von 4 Th. Char., so sind die 4 Eckpunkte Knotenpunkte und die 4 Tetraederebenen ent-

---

167) Vgl. *Kummer*, Berl. Ber. 1864, p. 246 u. 495; 1865, p. 288; Berl. Abh. 1866, p. 1. Nachdem schon früher *Klein* [Math. Ann. 5 (1872), p. 278] auf die Möglichkeit einer Verknüpfung der *Kummer*schen Fläche mit den hyperelliptischen Integralen 1. Ordnung hingewiesen hatte, haben gleichzeitig *Cayley* [J. f. Math. 83 (1877), p. 210 u. 220 = Coll. math. pap. 10 (1896), p. 157 u. 166; später noch J. f. Math. 84 (1878), p. 238 u. 94 (1883), p. 270 = Coll. math. pap. 10 (1896), p. 180 u. 12 (1897), p. 95] und *Borchardt* [ebenda p. 234 = Ges. W. 1888, p. 341] und etwas später *Weber* [J. f. Math. 84 (1878), p. 332] die *Kummer*sche Fläche durch Thetafunktionen zweier Veränderlichen dargestellt. Eine eingehende Untersuchung der Fläche auf dieser Grundlage ist dann, nachdem noch die Arbeiten von *Rohn* [Diss. München 1878, Math. Ann. 15 (1879), p. 315 u. 18 (1881), p. 99 dazu *Segre*, Leip. Ber. 36 (1884), p. 132], *Caporali* [Acc. Linc. Mem. 2_3 (1878), p. 791] und *Darboux* [Paris C. R. 92 (1881), p. 685 u. 1493] vorausgegangen waren, durch *Reichardt* [Nova Acta Leop. 50 (1887), p. 373 und Math. Ann. 28 (1887), p. 84] geschehen, vgl. noch *Brioschi*, Paris C. R. 92 (1881), p. 944 = Op. mat. 5 (1909), p. 13; *Rehe*, J. f. Math. 97 (1884), p. 242; *Domsch*, Diss. Leipzig 1885 = Arch. d. Math. 2_2 (1885), p. 193; *Klein*, Math. Ann. 27 (1886), p. 106; *Schleiermacher*, Erl. Ber. 18 (1886), p. 22 und Math. Ann. 50 (1898), p. 183; *Heß*, Nova Acta Leop. 55 (1890), p. 97; *Humbert*, J. de math. 9_4 (1893), p. 29 u. 361; 10_4 (1894), p. 473; *Hutchinson*, Amer. M. S. Bull. 5 (1899), p. 465 u. 7 (1901), p. 211; *Timerding*, Math. Ann. 54 (1901), p. 498; *Hudson*, Kummer's quartic surface 1905, Die *Kummer*sche Fläche ist der, dem Werte $p = 2$ entsprechende, einfachste Fall der in Nr. 34 eingeführten algebraischen Mannigfaltigkeit M_p. Andererseits sind die *Kummer*sche und die *Weddle*sche Fläche spezielle Fälle der in Nr. 130 behandelten hyperelliptischen Flächen.

halten die sämtlichen 16 Knotenpunkte. Es gibt 80 solche *Rosenhain*schen Tetraeder. Die Gleichung vierten Grades zwischen 4 Thetaquadraten, deren Th. Char. ein solches System bilden, stellt die *Kummer*sche Fläche bezogen auf dieses Tetraeder als Koordinatentetraeder[168]) dar.

Bilden $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\delta]$ ein *Göpel*sches System (433), so ist keine Ecke des Koordinatentetraeders ein Knotenpunkt der Fläche; die Flächen des Tetraeders enthalten nur 12 von den Knotenpunkten, die zu je zweien auf den 6 Kanten des Tetraeders liegen. Solcher Göpelschen Tetraeder gibt es 60. Die (*Göpel*sche biquadratische) Gleichung zwischen 4 *Göpel*schen Thetafunktionen stellt nach nochmaliger Quadrierung (also vorher in irrationaler Form) die *Kummer*sche Fläche bezogen auf ein solches *Göpel*sches Tetraeder dar.

Jede lineare Funktion der Koordinaten (439) ist eine Thetafunktion zweiter Ordnung mit der Charakteristik $[0]$ und umgekehrt. Setzt man daher eine solche Funktion $\Theta_2[0](\!(v)\!) = 0$, so wird dadurch ein ebener Schnitt der *Kummer*schen Fläche bestimmt; er ist von der 4. Ordnung und, in Übereinstimmung mit (157), im allgemeinen vom Geschlecht 3. Speziell liefert eine Gleichung $\vartheta(\!(v + e)\!)\vartheta(\!(v - e)\!) = 0$, in der e_1, e_2 irgendwelche Konstanten bezeichnen, eine Kurve 4. Ordnung, in welcher die *Kummer*sche Fläche von einer ihrer Tangentialebenen geschnitten wird; diese Kurve hat in dem durch das gleichzeitige Verschwinden der beiden Faktoren bestimmten Berührungspunkte einen Doppelpunkt und ist daher von einem Geschlecht < 3. Ist $\vartheta(\!(e)\!) = 0$, so geht die Tangentialebene durch einen der Knotenpunkte der *Kummer*schen Fläche und die Kurve 4. Ordnung hat in diesem Punkte eine Spitze. Setzt man endlich für (e) ein System zusammengehöriger Halben der Periodizitätsmodulen von der Per. Char. (ε), so erhält man in $\vartheta^2[\varepsilon](\!(v)\!) = 0$ den doppelt gezählten Kegelschnitt, längs welchem die *Kummer*sche Fläche von der singulären Ebene $[\varepsilon]$ berührt wird.

Allgemein entspricht jeder homogenen Funktion n^{ten} Grades der Koordinaten (439) eine gerade Thetafunktion $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Charakteristik $[0]$ und umgekehrt. Setzt man daher eine solche Funktion $\Theta_{2n}[0](\!(v)\!) = 0$, so wird dadurch der Schnitt der *Kummer*schen Fläche mit einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung bestimmt; er ist von der $4n^{\text{ten}}$ Ordnung und im allgemeinen vom Geschlecht $2n + 1$. Wählt man als Funktion $\Theta_{2n}[0](\!(v)\!)$ speziell das Quadrat einer Thetafunktion n^{ter} Ordnung, so geht die genannte Kurve $4n^{\text{ter}}$ Ordnung in

168) *Krazer*, p. 44; *Reichardt*, p. 429; *Weber*, p. 341 in irrationaler Form.

die doppelt gezählte Kurve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung über, längs welcher die *Kummer*sche Fläche nunmehr von einer Fläche n^{ter} Ordnung berührt wird.

Jede algebraische Kurve auf der *Kummer*schen Fläche ist demnach entweder der vollständige Schnitt mit einer algebraischen Fläche oder die Berührungskurve einer solchen.

Die 10 geraden Thetafunktionen mit den Argumenten $(2v)$ sind gerade Thetafunktionen 4. Ordnung mit der Charakteristik [0] und deshalb als homogene Funktionen 2. Grades der Koordinaten (4:39) darstellbar. Es entsprechen ihnen diejenigen 10 Fundamentalflächen 2. Ordnung der *Kummer*schen Fläche, welche von je 3 der 6 Fundamentalkomplexe bestimmt werden. Durch eine Gleichung $\vartheta[\varepsilon](\!(2v)\!) = 0$ wird also bei gerader Th. Char. $[\varepsilon]$ jene Kurve 8. Ordnung bestimmt, in welcher die *Kummer*sche Fläche von der betreffenden Fundamentalfläche 2. Ordnung geschnitten wird.

Die 6 ungeraden Funktionen $\vartheta[\varepsilon](\!(2v)\!)$ sind als ungerade Funktionen nicht durch die Thetaquadrate darstellbar, wohl aber ihre Quadrate und ihre Produkte zu zweien, denen beiden daher gewisse Flächen 4. Ordnung entsprechen. Die ersteren liefern gleich Null gesetzt die 6 ausgezeichneten Haupttangentenkurven 8. Ordnung der *Kummer*schen Fläche, welche längs ihnen von den zugehörigen Flächen 4. Ordnung berührt wird, während die 15 anderen Flächen 4. Ordnung diese Kurven paarweise herausschneiden.

Die Schar der Haupttangentenkurven 16. Ordnung wird durch Gleichungen von der Form $\vartheta(\!(2v + e)\!)\vartheta(\!(2v - e)\!) = 0$ geliefert, in denen (e) ein Konstantensystem bezeichnet, für welches $\vartheta(\!(e)\!) = 0$ ist.

Die Flächen 4. Ordnung, welche die *Kummer*sche Fläche längs einer ausgezeichneten Haupttangentenkurve 8. Ordnung berühren, sind selbst *Kummer*sche Flächen. Das gleiche gilt von allen ∞^1 Flächen 4. Ordnung, welche die *Kummer*sche Fläche längs einer der ∞^5 Raumkurven 8. Ordnung $\Sigma\lambda_i\vartheta[\omega_i](\!(2v)\!) = 0$ berühren, bei denen die λ beliebige Konstanten bezeichnen und die Summation über die 6 ungeraden Th. Char. $[\omega_i]$ zu erstrecken ist. Auf diese Weise entstehen ∞^6 *Kummer*sche Flächen, welche alle die ursprüngliche in der angegebenen Weise berühren.

Da die 16 singulären Punkte und 16 singulären Ebenen einer *Kummer*schen Fläche eine Konfiguration $(16)_6$ bilden, so erhält man in den singulären Punkten und Ebenen der berührenden *Kummer*schen Flächen ∞^6 solche Konfigurationen und diese sind alle der gegebenen *Kummer*schen Fläche ein- und umgeschrieben.

Jedes der 16 Produkte $\vartheta[\varepsilon](\!(v + w)\!)\vartheta[\varepsilon](\!(v - w)\!)$ ist eine gerade Thetafunktion 2. Ordnung mit der Charakteristik [0] in bezug auf

jedes der beiden Argumentensysteme (v) und (w) und daher als bilineare Form der beiderseitigen Thetaquadrate darstellbar. Diese Darstellung wird besonders einfach, wenn man dabei je 4 Thetafunktionen eines *Rosenhain*schen Systems benutzt. Setzt man die so erhaltenen 16 bilinearen Formen der Thetaquadrate gleich Null, so werden dadurch ebenso viele Korrelationen der *Kummer*schen Fläche bestimmt, von denen die 10 zu geraden $[\varepsilon]$ gehörigen als die 10 Polarsysteme in bezug auf die 10 Fundamentalflächen 2. Ordnung, die 6 zu ungeraden $[\varepsilon]$ gehörigen als die 6 zu den Fundamentalkomplexen gehörigen Nullsysteme erscheinen.

Die 16 Kollineationen der *Kummer*schen Fläche werden durch die Änderungen des Argumentensystems (v) in (439) um die 16 Systeme zusammengehöriger Halben der Periodizitätsmodulen definiert.

Bei jeder Transformation zweiten Grades sind von den 16 ursprünglichen Thetafunktionen, deren Argumente und Modulen hier mit v^0, a^0 bezeichnet seien, immer vier, und zwar sind es stets vier gerade Thetafunktionen eines *Göpel*schen Systems, als Funktionen der transformierten Argumente v und Modulen a betrachtet Thetafunktionen 2. Ordnung mit der Charakteristik [0] und lassen sich daher linear und homogen durch 4 linearunabhängige Thetaquadrate $\vartheta^2[\varepsilon](v)$ ausdrücken.[169]) Setzt man daher die Punktkoordinaten x, y, z, w vier solchen Thetafunktionen mit den Argumenten v^0 und Modulen a^0 proportional, also

$$(440)\quad x : y : z : w = \vartheta[\alpha](v^0)_{a^0} : \vartheta[\beta](v^0)_{a^0} : \vartheta[\gamma](v^0)_{a^0} : \vartheta[\delta](v^0)_{a^0},$$

so wird dadurch wieder die *Kummer*sche Fläche dargestellt. Sie ist jetzt bezogen auf eines der 15 Fundamentaltetraeder, deren Kanten die Direktrizenpaare solcher 3 Kongruenzen sind, auf welche man die 6 Fundamentalkomplexe verteilen kann. Nach *Klein*[170]) kann man diese 15 Fundamentaltetraeder auch folgendermaßen erhalten: Die 16 Knotenpunkte werden paarweise durch 120 Gerade verbunden, in denen sich auch die 16 singulären Ebenen paarweise schneiden. Diese 120 Geraden kann man in 15 Gruppen von je 8 anordnen, indem man diejenigen 8 Geraden in einer Gruppe vereinigt, welche je zwei solche Knotenpunkte verbinden, deren Per. Char. die nämliche Summe $(\omega_u \omega_v)$ aufweisen. Die 8 Geraden einer Gruppe haben dann 2 gemeinsame Transversalen und es ist damit zugleich jedem solchen Transversalenpaar eine der 15 eigentlichen Per. Char. $(\omega_\mu \omega_\nu)$ zugeordnet. Diese

169) *Königsberger*, J. f. Math. 67 (1867), p. 58; *Pringsheim*, Math. Ann. 9 (1876), p. 445; *Rohn*, Diss. München 1878 u. Math. Ann. 15 (1879), p. 330.

170) Gött. N. 1869, p. 262; Math. Ann. 2 (1870), p. 208.

Transversalen sind die vorher genannten Direktrizen der von je 2 Fundamentalkomplexen gebildeten Kongruenzen. 3 Transversalenpaare, in deren zugeordneten Per. Char. $(\omega_\mu \omega_\nu)$ zusammen alle 6 ungeraden Th. Char. auftreten, bilden eines der genannten Fundamentaltetraeder. Durch solche 3 Per. Char. ist aber nach den Gleichungen (432) zugleich eine *Göpel*sche Gruppe bestimmt und das einzige in dem zugehörigen Komplexe vorkommende System von 4 geraden Th. Char. liefert für (440) die Th. Char. $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $[\delta]$. Die *Göpel*sche biquadratische Relation zwischen den 4 Funktionen $\vartheta[\alpha](v^{(0)})_{\alpha^{(0)}}, \ldots \vartheta[\delta](v^{(0)})_{\alpha^{(0)}}$ ist die Gleichung der *Kummer*schen Fläche bezogen auf dieses Koordinatentetraeder.[171])

69. Weddlesche Fläche. *Chasles*[172]) hatte den Satz bewiesen, daß durch 6 gegebene Punkte des Raumes stets eine Kurve 3. Ordnung gelegt werden kann, und daraus geschlossen, daß diese Kurve der geometrische Ort der Scheitel aller Kegel zweiten Grades sei, welche durch die 6 gegebenen Punkte gehen. Diese Behauptung hat dann *Weddle*[173]) dahin richtig gestellt, daß dieser geometrische Ort eine die genannte Raumkurve 3. Ordnung enthaltende Fläche vierten Grades sei; diese Fläche heißt deshalb die *Weddle*sche Fläche.

Von den geometrischen Eigenschaften der *Weddle*schen Fläche braucht hier nur angegeben zu werden, daß auf ihr außer der schon genannten Raumkurve 3. Ordnung auch 25 gerade Linien liegen; nämlich die 15 Geraden, welche die 6 Grundpunkte paarweise verbinden, und die 10 Geraden, in denen sich jene 10 Ebenenpaare schneiden, von denen jedes zusammen alle 6 Grundpunkte enthält.

Schottky[174]) hat zuerst die *Weddle*sche Fläche mit den Thetafunktionen zweier Veränderlichen in Zusammenhang gebracht. Sind

171) *Humbert* hat Amer. J. 16 (1894), p. 221 jene speziellen *Kummer*schen Flächen untersucht, welche reduzierbaren Periodensystemen (s. Nr. 121) angehören. Er hat ferner Paris C. R. 133 (1901), p. 425 u. J. de math. 7_5 (1901), p. 395 die Transformationen höheren Grades auf der *Kummer*schen Fläche geometrisch gedeutet.

172) Aperçu historique etc. 1837, Note XXXIII; deutsch von *Sohncke* 1839, p. 441.

173) Cambr. and Dubl. math. J. 5 (1850), p. 58; über die *Weddle*sche Fläche vgl. *Chasles,* Paris C. R. 52 (1861), p. 1157; *Cayley* ebenda p. 1216 u. Lond. M. S. Proc. 3 (1871), p. 19, 198, 234 u. 4 (1873), p. 11 = Coll. math. pap. 5 (1892), p. 4; 7 (1894), p. 1 3, 256, 264; 8 (1895), p. 99; *Geiser,* Zürich Viertelj. 10 (1865), p. 219 u. J. f. Math. 67 (1867), p. 78; *Darboux,* Bull. sc. math. 1 (1870), p. 348; *Hierholzer,* Math. Ann. 2 (1870), p. 562 u. 4 (1871), p. 172; dazu *Hunyady,* J. f. Math. 92 (1882), p. 304; *Reye,* J. f. Math. 86 (1879), p. 84; *Caspary,* Bull. sc. math. 11_2 (1887), I, p. 222 u. 13_2 (1889), I, p. 202.

174) J. f. Math. 105 (1889), p. 238.

$\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_6$ die 6 ungeraden, $\vartheta_{\alpha\beta\gamma}$ die 10 geraden Thetafunktionen zweier Veränderlichen v_1, v_2, so ist

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \vartheta_\alpha \vartheta_\beta \vartheta_\gamma \vartheta_{\alpha\beta\gamma} \tag{441}$$

eine ungerade Thetafunktion 4. Ordnung mit der Charakteristik [0]. Alle diese Funktionen sind durch 4 linearunabhängige unter ihnen z. B. $F_{345}, F_{346}, F_{356}, F_{456}$ linear darstellbar. Setzt man die homogenen Punktkoordinaten x, y, z, w des Raumes 4 solchen proportional und betrachtet v_1, v_2 als veränderliche Parameter, so wird dadurch die *Weddle*sche Fläche definiert, deren Gleichung in der Form

$$F_{123} F_{156} F_{425} F_{436} - F_{423} F_{456} F_{125} F_{136} = 0 \tag{442}$$

dargestellt werden kann, während $F_{\alpha\beta\gamma} = 0$ die Gleichung jener Ebene ist, welche durch die 3 Grundpunkte α, β, γ geht.

Als ungerade Thetafunktionen geraden Grades mit der Charakteristik [0] verschwinden x, y, z, w gleichzeitig für jedes System korrespondierender Halben der Periodizitätsmodulen (Nr. **33**). Solchen Werten von v_1, v_2 entsprechen nicht einzelne Punkte der Fläche, sondern Kurven auf ihr (Nr. **130**), und zwar entspricht dem Wertepaare $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ die oben genannte Raumkurve 3. Ordnung, den 15 übrigen Systemen korrespondierender Halben der Periodizitätsmodulen die 15 Verbindungslinien der 6 Grundpunkte zu zweien, während die 10 übrigen auf der Fläche liegenden Geraden durch die Gleichungen $\vartheta_{\alpha\beta\gamma} = 0$ dargestellt werden.

Caspary[175]) hat angegeben und *Humbert*[176]) weiter ausgeführt, daß man die *Weddle*sche Fläche auch erhalten kann, wenn man x, y, z, w vier ungeraden Thetafunktionen 3. Ordnung mit gerader Charakteristik, deren es gleichfalls 4 linearunabhängige gibt, proportional setzt, etwa

$$x : y : z : w = \vartheta_1 \vartheta_{245} \vartheta_{345} : \vartheta_1 \vartheta_{246} \vartheta_{346} : \vartheta_4 \vartheta_{245} \vartheta_{246} : \vartheta_4 \vartheta_{345} \vartheta_{346}. \tag{443}$$

Hier verschwinden x, y, z, w gleichzeitig für die 10 Systeme korrespondierender Halben der Periodizitätsmodulen mit gerader Per. Char. (Nr. **33**); diese liefern für (v) eingesetzt die 10 Schnittlinien der die 6 Grundpunkte enthaltenden Ebenenpaare, während die Raumkurve 3. Ordnung durch die Gleichung $\vartheta_{123} = 0$ erhalten wird und das Nullsetzen der 15 übrigen Thetafunktionen die 15 Verbindungslinien der 6 Grundpunkte zu zweien liefert. Den 6 Systemen korrespondierender Halben der Periodizitätsmodulen mit ungerader Charakteristik entsprechen die 6 Grundpunkte der Fläche.[177])

175) Paris C. R. **112** (1891), p. 1356; Bull. sc. math. 15_2 (1891), I, p. 308.

176) J. de math. 9_4 (1893), p. 466.

177) Über den Zusammenhang der *Weddle*schen Fläche mit der *Kummer*-

70. Thetanullwerte. Zwischen den Nullwerten der 10 geraden Thetafunktionen bestehen homogene Gleichungen vierten Grades und zwar lineare Gleichungen zwischen je 4 Biquadraten und solche zwischen je 3 Produkten von 2 Quadraten der Thetanullwerte. Sie sind schon von *Göpel* und *Rosenhain* angegeben worden und folgen aus den obigen Gleichungen (436) in der Form:

$$\sum_{i=1}^{4} \pm \vartheta^4[\omega_i \omega_5 \omega_6]\,(\!(0)\!) = 0 \tag{444}$$

und

$$\sum_{c=1}^{3} \pm \vartheta^2[\omega_i \omega_5 \omega_6]\,(\!(0)\!)\,\vartheta^2[\omega_i \omega_6 \omega_4]\,(\!(0)\!) = 0; \tag{445}$$

sie lassen sich nach dem Früheren dahin zusammenfasssen, daß die 9 Quotienten

$$\frac{\vartheta^2[\omega_\alpha\, \omega_\beta\, \omega_\gamma]\,(\!(0)\!)}{\vartheta^2[\omega_1\, \omega_2\, \omega_3]\,(\!(0)\!)}$$

schen bei *Darboux, Schottky* und *Humbert* a. a. O.; sodann bei *Schottky*, J. f. Math. 146 (1916), p. 135; *Baker*, Mult. period. funct. 1907, chap. 4.

Ein Analogon der *Weddle*schen Fläche hat *Schottky* [J. f Math. 105 (1889), p. 269] mit Hilfe von Thetafunktionen dreier Veränderlichen erhalten. Bezeichnet man mit $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_7$ die 7 ungeraden Thetafunktionen einer Hauptreihe, so können die 36 geraden mit $\vartheta_{\alpha\beta\gamma}$ und $\vartheta = \vartheta_{12\ldots7}$ bezeichnet werden und es ist

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \vartheta_\alpha \vartheta_\beta \vartheta_\gamma \vartheta_{\alpha\beta\gamma}$$

eine ungerade Thetafunktion 4. Ordnung mit der Charakteristik [0]. Legt man den Argumenten v_1, v_2, v_3 die Beschränkung $\vartheta = 0$ auf, so lassen sich die 35 Größen $F_{\alpha\beta\gamma}$ als lineare Funktionen von 4 unter ihnen darstellen. Setzt man solchen 4 die homogenen Punktkoordinaten x, y, z, w des Raumes proportional, so wird dadurch eine Fläche 6. Ordnung L definiert mit 7 dreifachen Punkten, die im folgenden ihre Grundpunkte heißen mögen. x, y, z, w verschwinden alle vier gleichzeitig für die korrespondierenden Halben der Periodizitätsmodulen mit den 21 Per. Char. $(\alpha\beta)$ und den 7 Per. Char. (α), die alle auch der Bedingung $\vartheta = 0$ genügen; die ersteren liefern die 21 Geraden, welche die 7 Grundpunkte paarweise verbinden, die letzteren 7 Raumkurven 3. Ordnung λ_α, von denen λ_α durch die 6 von α verschiedenen Grundpunkte hindurchgeht. Durch das Nullsetzen der 63 von ϑ verschiedenen Thetafunktionen werden weitere auf der Fläche liegende Kurven und zwar 35 ebene Kurven 3. Ordnung und 28 Raumkurven 4. Ordnung bestimmt.

Roth [Monatsh. f. Math. 23 (1912), p. 115] hat bemerkt, daß die Fläche L der geometrische Ort aller jener Punkte des Raumes ist, welche mit den 7 Grundpunkten ein solches System von 8 Punkten bilden, durch welches eine nicht zerfallende Fläche 4. Ordnung mit Doppelpunkten in den 8 Punkten gelegt werden kann.

In ähnlicher Weise haben andere Flächen 6. Ordnung *Humbert* [Paris C. R. 120 (1895), p. 365 u. 425; J. de math. 2_5 (1896), p. 263] und *Remy* [Paris C. R. 144 (1907), p. 412 u. 623; J. de math. 4_6 (1908), p. 1; Ann. Éc. Norm. 26_3 (1909), p. 193] mittelst der Thetafunktionen dreier Veränderlichen definiert.

mit passenden Vorzeichen versehen, in der durch das Schema (438) bestimmten Anordnung die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution bilden.

Mit den beiden ungeraden Th. Char. $[\omega_1]$, $[\omega_2]$ bilden die 4 geraden $[\omega_1\omega_2\omega_3]$, $[\omega_1\omega_2\omega_4]$, $[\omega_1\omega_2\omega_5]$, $[\omega_1\omega_2\omega_6]$ ein F. S. von Th. Char. Bezeichnet man den Wert, den die aus den partiellen Derivierten der ungeraden Thetafunktionen $\vartheta[\omega_1](v)$, $\vartheta[\omega_2](v)$ gebildete Determinante

$$\frac{\partial\vartheta[\omega_1](v)}{\partial v_1}\,\frac{\partial\vartheta[\omega_2](v)}{\partial v_2} - \frac{\partial\vartheta[\omega_1](v)}{\partial v_2}\,\frac{\partial\vartheta[\omega_2](v)}{\partial v_1}$$

für $v_1 = v_2 = 0$ annimmt, mit $[\omega_1, \omega_2]$, so ist, wie schon *Rosenhain* angibt[178])

$$[\omega_1, \omega_2] = \pm \prod_{\gamma=3}^{6} \vartheta^2[\omega_1\omega_2\omega_\gamma](0) \tag{446}$$

71. Übergang von den Thetafunktionen zum algebraischen Gebilde. *Göpel* und *Rosenhain* haben aus den Thetarelationen die Differentialgleichungen des Umkehrproblems der hyperelliptischen Integrale 1. Ordnung hergeleitet und damit den Zusammenhang der Thetafunktionen zweier Veränderlichen mit einem algebraischen Gebilde vom Geschlecht 2 hergestellt. Dieser Übergang läßt sich am einfachsten folgendermaßen bewerkstelligen.[179])

Die Reihenentwicklungen der 6 ungeraden Thetafunktionen nach Potenzen von v_1, v_2 beginnen mit linearen Gliedern. Werden in diesen v_1, v_2 durch homogene Variablen z_1, z_2 ersetzt, so ist ihr Produkt eine binäre Form 6. Grades $f_6(z_1, z_2)$. Die Quadratwurzel aus dieser definiert das zu den gegebenen Thetafunktionen gehörige algebraische Gebilde.

Bringt man, wie bei *Rosenhain*, f_6 in die Normalform

$$f_6 = z\,(1-z)\,(1-\varkappa^2 z)\,(1-\lambda^2 z)\,(1-\mu^2 z), \tag{447}$$

so lassen sich dementsprechend die Modulen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 durch die obigen Größen $[\omega_i, \omega_\varkappa]$ ausdrücken in der Form

$$\varkappa^2 = \frac{[\omega_3, \omega_2]\,[\omega_4, \omega_1]}{[\omega_3, \omega_1]\,[\omega_4, \omega_2]}, \quad \lambda^2 = \frac{[\omega_3, \omega_2]\,[\omega_5, \omega_1]}{[\omega_3, \omega_1]\,[\omega_5, \omega_2]}, \quad \mu^2 = \frac{[\omega_3, \omega_2]\,[\omega_6, \omega_1]}{[\omega_3, \omega_1]\,[\omega_6, \omega_2]} \tag{448}$$

178) Vgl. dazu *Weber*, Math. Ann. 14 (1879) p. 179 und *Frobenius*, J. f. Math. 98 (1885), p. 247.

179) *Bolza*, Diss. Göttingen, auch Math. Ann. 28 (1887), p. 450; dann Math. Ann. 30 (1887) p. 481 und Gött. N. 1887, p. 418. Es finden sich bei *Bolza* die rationalen Invarianten der Binärform f_6 durch die Thetanullwerte ausgedrückt. Z. B. ist die Diskriminante von f_6 dem Quadrate der Produkte aus den 10 geraden Thetanullwerten gleich.

und mit Hilfe von (446) nun auch durch die Nullwerte der 10 geraden Thetafunktionen.[180])

Aus diesen Gleichungen folgen dann auch umgekehrt Ausdrücke für die Quotienten der Thetanullwerte durch $\varkappa$, λ, μ und diese erscheinen, wenn man in ihnen $\varkappa$, λ, μ als unabhängige Parameter betrachtet, als Auflösungen der zwischen den Thetanullwerten bestehenden Gleichungen (444), (445), insofern diese durch sie identisch erfüllt werden.[181])

Die Thetaquotienten werden, wenn man an Stelle der Argumente Integrale 1. Gattung setzt, Wurzelfunktionen des algebraischen Gebildes. Die einfachsten Wurzelformen $\sqrt{\varphi}$ sind im allgemeinen Falle die Formen $\sqrt{z-\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots 6$, wo α_i die Verzweigungspunkte der *Riemann*schen Fläche sind, im *Rosenhain*schen Falle die 5 $\sqrt{z}$, $\sqrt{1-z}$, $\sqrt{1-\varkappa^2 z}$, $\sqrt{1-\lambda^2 z}$, $\sqrt{1-\mu^2 z}$, denen die aus 2 ungeraden Thetafunktionen gebildeten Quotienten proportional werden.

Setzt man $(v) = (v(z_2) - v(z_1))$, so erhält man die 15 Thetaquotienten in der schon von *Rosenhain* angegebenen Weise durch die Wurzelformen $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{1-z_1}, \ldots \sqrt{1-\mu^2 z_2}$ angedrückt. Auch hier kann man z_1, z_2 als unabhängige Parameter ansehen und erhält dann in den Ausdrücken für die Thetaquotienten Auflösungen der Thetarelationen (436), (437), insofern als diese alle durch die genannten Ausdrücke in z_1, z_2 identisch erfüllt werden; andrerseits aber folgen aus den Thetarelationen auf diese Weise Relationen zwischen den Wurzelfunktionen (Nr. **60**).

Algebraische Ausdrücke für Thetaquotienten, deren Argumente aus drei Integralen zusammengesetzt sind (Nr. **59**), hat *Prym*[182]) angegeben und damit den Schlüssel für die Behandlung des allgemeinen hyperelliptischen Falles gefunden.

72. Anwendungen. *Weierstraß*[183]) hat die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte einer geodätischen Linie auf dem dreiachsigen Ellipsoid durch Thetafunktionen zweier Veränderlichen, die von einem variablen Parameter abhängen, dargestellt.

---

180) *Rosenhain*, Gl. (91), *Krazer*, p. 51.

181) *Rosenhain*, Gl. (92), *Krazer*, p. 52; andere Parameterdarstellungen bei *Krause*, „Transf." § 11 und *Staude*, Math. Ann. 24 (1884), p. 281.

182) Wien Denkschr. 24 (1865), II, p. 86; 2. Ausg. 1885.

183) Berl. Ber. 1861, p. 986 = Math. W. 1 (1894), p. 257; vgl. dazu *v. Braunmühl*, Math. Ann. 20 (1882), p. 557; *Staude*, Acta math. 8 (1886), p. 81; *Noske*, Progr. Königsberg 1886 u. 1887; ferner *Lampart*, Diss. München 1900, dazu *v. Braunmühl*, Math. Ann. 26 (1886), p. 151.

Da die ebene Kurve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkte vom Geschlecht 2 ist, so konnte *Brill*[184]) die Resultate der Theorie der *Abel*schen Funktionen im Falle $p = 2$ für die Untersuchung dieser Kurven insbesondere ihrer Doppeltangenten verwenden.

Darboux[185]) wurde bei seinen Untersuchungen über Zyklidensysteme zur Darstellung der Zykliden und sodann durch Spezialisierung dieser zur Darstellung der allgemeinen Flächen 3. Ordnung durch ultraelliptische Funktionen geführt.

Staude[186]) hat, nachdem er schon vorher die ultraelliptischen Integrale zur Fadenkonstruktion des Ellipsoids und zur Untersuchung geodätischer Polygone auf den Flächen 2. Ordnung herangezogen hatte, für das System konfokaler Flächen 2. Ordnung die Thetafunktionen zweier Veränderlichen in verschiedener Weise zur Parameterdarstellung verwendet und ist dadurch zu Schließungssätzen innerhalb des Strahlensystems der gemeinsamen Tangenten zweier solchen Flächen gelangt.[187])

Den grundlegenden auf *Liouville* zurückgehenden Satz, nach welchem diese gemeinsamen Tangenten durch die *Abel*schen Differentialgleichungen bestimmt werden, hat *Klein*[188]) eingehend untersucht, ihn erweitert und auf Räume beliebig vieler Dimensionen ausgedehnt.

Da *Darboux*[189]) eine Transformation angegeben hat, welche eine Fläche 2. Ordnung in eine Zyklide überführt, konnte *Domsch*[190]) auch von der *Staude*schen Darstellung des konfokalen Flächensystems 2. Ordnung aus zu einer solchen des Zyklidensystems gelangen und eine analoge Deutung der Thetarelationen in der Geometrie der Zykliden durchführen.

Lie[191]) hat gezeigt, wie durch eine Berührungstransformation,

184) J. f. Math. 65 (1866), p. 280 u. Math. Ann. 6 (1873), p. 66, dazu *Brioschi*, Acc. Linc. Atti 24 (1870/1), p. 47 = Op. mat. 3 (1904), p. 339; *Clebsch-Lindemann*, Vorl. ü. Geometrie 1 (1876), p. 868; *Ameseder*, Wien. Sitzb. 87 (1883), II, p. 38; *Bobek*, Wien Denkschr. 53 (1887), II, p. 119; *Wirtinger*, D. M. V. Jahresb. 4 (1897), p. 97.

185) Paris C. R. 68 (1869), p. 1311; 69 (1869), p. 392 und: Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, 1873, p. 148.

186) Math. Ann. 22 (1883), p. 1 u. 145; Leipz. Ber. 34 (1882), p. 5; Math. Ann. 20 (1882), p. 147 u. 21 (1883), p. 219.

187) Solche Polygone erwähnt zuerst *Liouville*, J. de Math. 12 (1847), p. 255, mehrere Sätze darüber gibt *Darboux*, L'Institut, 38e année (1870), p. 142.

188) Math. Ann. 28 (1887), p. 533; siehe auch *Sommer*, Math. Ann. 53 (1900), p. 134.

189) Ann. Éc. Norm. 1_2 (1872), p. 273.

190) Diss. Leipzig 1885 = Arch. d. Math. 2_2 (1885), p. 193.

191) Math. Ann. 5 (1872), p. 145.

welche die Punkte des einen Raumes in die Minimalgeraden des andern überführt, eine *Kummer*sche Fläche in eine Zyklide transformiert wird. Auch auf diese Weise konnte daher *Domsch* die Darstellung der Zykliden durch hyperelliptische Funktionen gewinnen.

Dobriner[192]) stellt die Flächen konstanter Krümmung mit einem System sphärischer Krümmungslinien mit Hilfe von Thetafunktionen zweier Variablen dar.

Thomae[193]) behandelt mittelst Thetafunktionen zweier Veränderlichen die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Ellipse und *Schleiermacher*[194]) ebenso die Bewegung eines schweren Punktes auf dem verlängerten Rotationsellipsoid.

Weber[195]) hat die Bewegung, die ein starrer Körper mit drei zueinander senkrechten Symmetrieebenen in einer unendlich ausgedehnten inkompressiblen Flüssigkeit ohne den Einfluß beschleunigender Kräfte ausführt, vermittelst Thetafunktionen zweier Veränderlichen, in denen an Stelle der Variablen lineare Funktionen der Zeit treten, dargestellt. Dabei ist noch die beschränkende Voraussetzung gemacht, daß der Anfangszustand in einer bloßen Translation ohne Rotation bestehe. *Kötter*[196]) hat gezeigt, daß sich der genannte Fall der Bewegung auch ohne diese beschränkende Voraussetzung durch Thetafunktionen zweier Variablen behandeln lasse und ebenso auch jene beiden Bewegungen, aus denen man die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt im leeren Raume für den durch *Kowalewski*[197]) entdeckten Fall zusammensetzen kann, in welchem nämlich zwei von den Hauptträgheitsmomenten eines Körpers einander gleich und doppelt so groß als das dritte sind und der Schwerpunkt in der Ebene ihrer Achsen liegt. Später gab *Kötter*[198]) noch eine allgemeinere Darstellung der Richtungscosinus zweier orthogonaler Koordinatensysteme durch Thetafunktionen zweier Argumente, welche nicht nur die bisher erwähnten Fälle in sich schließt, sondern auch die *Jacobi*schen Formeln für die Rotation eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt liefert, wenn man zwischen den Modulen der Thetafunktionen passende Beziehungen

192) Acta math. 9 (1887), p. 73.

193) Samml. v. Formeln usw. p. 32.

194) Diss. Erlangen 1878; s. auch *Merten*, Diss. Marburg 1911.

195) Math. Ann. 14 (1879), p. 173.

196) J. f. Math. 109 (1892), p. 51 u. 89, vorher Berl. Ber. 1891, p. 47; Acta math. 17 (1893) p. 209.

197) Acta math. 12 (1889), p. 177; dazu *Kötter*, D. M. V. Jahresb. 1 (1892), p. 65.

198) J. f. Math. 116 (1896), p. 213; vorher Berl. Ber. 1895, p. 807; ferner Berl. Ber. 1900, p. 79; *Juhnke*, J. f. Math. 119 (1898) p. 234; vgl. Anm. 165.

annimmt. Diese allgemeineren Formeln gestatten die Lösung weiterer Probleme der Mechanik, wie die von *Stekloff* und *Liapunoff* entdeckten integrablen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer idealen Flüssigkeit.

Ohnesorge[199]) beschäftigt sich mit der Darstellung der Bewegung von drei in besonderer Anordnung befindlichen Massenpunkten durch Thetafunktionen zweier Veränderlichen.

73. Das Borchardtsche arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen.[200]) Man bilde aus vier Elementen a, b, c, e, für welche

$$a > b > c > e > 0, \quad ae > bc \tag{449}$$

ist, durch den Algorithmus

$$\begin{aligned} 4a_1 &= a + b + c + e, \\ 2b_1 &= \sqrt{ab} + \sqrt{ce}, \\ 2c_1 &= \sqrt{ac} + \sqrt{be}, \\ 2e_1 &= \sqrt{ae} + \sqrt{bc} \end{aligned} \tag{450}$$

vier Größen a_1, b_1, c_1, e_1; aus diesen durch den nämlichen Algorithmus wiederum vier Größen a_2, b_2, c_2, e_2 usw.; dann nähern sich die vier Größen a_n, b_n, c_n, e_n mit wachsendem n der nämlichen Grenze g, die man das arithmetisch-geometrische Mittel der vier Elemente a, b, c, e nennt.

Bezeichnet man andrerseits die Nullwerte der geraden Thetafunktionen mit den Modulen a_{11}, a_{12}, a_{22} mit c, setzt also, indem man unter $[\alpha], [\beta], [\gamma], [\varepsilon]$ speziell die vier Th. Char.

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\beta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\gamma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{451}$$

versteht,

$$\vartheta[\alpha](0)_a = c_\alpha, \quad \vartheta[\beta](0)_a = c_\beta, \quad \vartheta[\gamma](0)_a = c_\gamma, \quad \vartheta[\varepsilon](0)_a = c_\varepsilon, \tag{452}$$

bezeichnet dagegen mit C die Nullwerte der nämlichen Thetafunktionen mit den Modulen $2a_{11}, 2a_{12}, 2a_{22}$, so drücken sich die Größen C durch die c aus mit Hilfe der Gleichungen[201])

$$\begin{aligned} 4C_\alpha^2 &= c_\alpha^2 + c_\beta^2 + c_\gamma^2 + c_\varepsilon^2, \\ 2C_\beta^2 &= c_\alpha c_\beta + c_\gamma c_\varepsilon, \\ 2C_\gamma^2 &= c_\alpha c_\gamma + c_\beta c_\varepsilon, \\ 2C_\varepsilon^2 &= c_\alpha c_\varepsilon + c_\beta c_\gamma, \end{aligned} \tag{453}$$

199) Progr. Berlin 1889.

200) Berl. Ber. 1876, p. 611 = Ges. W. 1888, p. 327; auch Bull. sc. math. 1_2 (1877), I, p. 337 und Torino Atti 12 (1876/7), p. 283 = Ges. W. 1888, p. 339; *Schering*, J. f. Math. 85 (1878), p. 115; *Hettner*, J. f. Math. 112 (1894), p. 89.

201) *Göpel*, Gl. (18), (19); auch aus (196) für $p_1 = p_2 = 1$.

woraus bereits der Zusammenhang mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel ersichtlich ist.

Um diesen herzustellen seien mit a, b, c, e vier gegebene positive reelle Größen bezeichnet, für welche die Ungleichungen (449) bestehen, und es seien weiter, indem

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a + b + c + e, \\ \mathfrak{b} &= a + b - c - e, \\ \mathfrak{c} &= a - b + c - e, \\ \mathfrak{e} &= a - b - c + e \end{aligned} \tag{454}$$

gesetzt wird, sechs Hilfsgrößen definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2b' &= \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{e}}, \quad 2b'' = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - \sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{e}}, \\ 2c' &= \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} + \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{e}}, \quad 2c'' = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} - \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{e}}, \\ 2e' &= \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} + \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \quad 2e'' = \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} - \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \end{aligned} \tag{455}$$

endlich sei

$$\Delta^4 = abce\,b'c'e'\,b''c''e'' \tag{456}$$

und

$$\alpha_0 = \frac{acb'}{\Delta}, \quad \alpha_1 = \frac{cc'e'}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{ac''e'}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{b'c'c''}{\Delta}; \tag{457}$$

dann sind für das zur Irrationalität

$$\sqrt{R(x)} = \sqrt{x(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)} \tag{458}$$

gehörige algebraische Gebilde vom Geschlecht 2 die Größen c_α^2, c_β^2, c_γ^2, c_ε^2 den Größen a, b, c, e proportional; es ist also

$$gc_\alpha^2 = a, \quad gc_\beta^2 = b, \quad gc_\gamma^2 = c, \quad gc_\varepsilon^2 = e. \tag{459}$$

Durch Anwendung der Transformation 2^{ten} Grades, welche von Modulen a zu den Modulen $2a$ führt, wird dann

$$gC_\alpha^2 = a_1, \quad gC_\beta^2 = b_1, \quad gC_\gamma^2 = c_1, \quad gC_\varepsilon^2 = e_1 \tag{460}$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Transformation, da

$$\lim_{n=\infty} \vartheta[\alpha](0)_{2^n a} \cdots = \lim_{n=\infty} \vartheta[\varepsilon](0)_{2^n a} = 1 \tag{461}$$

ist, endlich

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = \lim_{n=\infty} c_n = \lim_{n=\infty} e_n = g; \tag{462}$$

damit ist die Existenz des arithmetisch-geometrischen Mittels nachgewiesen.

Zur Berechnung von g dient, nachdem man bewiesen hat, daß das auf der rechten Seite der hier folgenden Gleichung stehende

Doppelintegral bei der genannten Transformation zweiten Grades seinen Wert nicht ändert, die Gleichung

$$\frac{\pi^2}{g} = \int_0^{\alpha_3} dx_2 \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx_1 \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}. \tag{463}$$

Weiteres zum Falle $p = 2$ in den Nr. **94—99, 121** und **126—130.**

IX. Der hyperelliptische Fall.[202])

74. Das Verschwinden der hyperelliptischen Thetafunktionen. Es ist für die Theorie der hyperelliptischen Funktionen zweckmäßig, einen der $2p + 2$ Verzweigungspunkte (Vp.) $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{2p+1}$ der ihr zugrunde gelegten zweiblättrigen *Riemann*schen Fläche, etwa α_0, als gemeinsame untere Grenze aller auftretenden Integrale 1. Gattung zu wählen und es sei

$$v_\mu^z = \int_{\alpha_0}^{z} dv_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{464}$$

gesetzt. Wenn also, wie bisher, $v_\mu(z)$ jenen Wert des Integrals v_μ bezeichnet, für welchen die *Riemann*sche Konstante k_μ den Wert Null hat und infolgedessen die Funktion

$$\vartheta\left(\left(v(z) - \sum_{\nu=1}^{p} v(z_\nu)\right)\right) \tag{465}$$

0^1 wird (vorausgesetzt, daß sie nicht identisch verschwindet) in den p Punkten $z = z_1, z_2, \ldots z_p$, so wird, da

$$v_\mu^z = v_\mu(z) - v_\mu(\alpha_0) \tag{466}$$

ist, die Funktion

$$\vartheta\left(\left(v^z - \sum_{\nu=1}^{p} v^{z_\nu} - (p-1)v(\alpha_0)\right)\right)$$

0^1 für $z = z_1, z_2, \ldots z_p$. Nennt man nun zwei Punkte, die in den beiden Blättern der *Riemann*schen Fläche übereinanderliegen, also Punkte wie z, s und $z, -s$ „verbundene" Punkte und bezeichnet sie mit z und $\bar{z}$, so ist

$$(v^z + v^{\bar{z}}) \equiv (0) \tag{467}$$

und man schließt nun leicht, daß

$$((p-1)v(\alpha_0)) \equiv \{n\} \tag{468}$$

202) *Prym,* Schweiz. Nat. Ges. N. Denkschr. 22 (1867); *Neumann,* „Riem. Th."; *Baker,* Amer. J. 20 (1898), p. 301 u. Math. Ann. 50 (1898), p. 462 und das im Bull sc. math. 12_2 (1888), p. 171 [auch J. f. Math. 126 (1903), p. 283] zitierte, dem Verf. nicht zugängliche Werk von *Tkhomandritzky* über die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale (Charkow 1885).

ist, wo $\{n\}$ ein vorerst noch unbekanntes System zusammengehöriger Halben der Periodizitätsmodulen bezeichnet. Das vorher ausgesprochene Resultat über die Nullpunkte der Thetafunktion lautet aber jetzt dahin, daß die Funktion

$$\vartheta[n]\Big(\Big(v^z - \sum_1^p v^{z_\nu}\Big)\Big) \tag{469}$$

(falls sie nicht identisch verschwindet) 0^1 wird in den p Punkten $z_1, z_2, \ldots z_p$, sich also ebenso verhält wie früher die Funktion (465).

Es ist infolgedessen nach dem *Riemann*schen Satze in Nr. **46** $\vartheta[n](\!(r)\!) = 0$, wenn bei beliebiger Wahl der $p-1$ Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{p-1}$

$$(r) \equiv \Big(\sum_1^{p-1} v^{\eta_\nu}\Big) \tag{470}$$

ist; und wenn bei gegebenem Wertesystem (r) m der Punkte η willkürlich gewählt werden können, so verschwindet für $(v) = (r)$ nicht nur die Funktion $\vartheta[n](\!(v)\!)$, sondern es verschwinden auch alle ihre partiellen Derivierten der 1^{ten}, $2^{\text{ten}}, \ldots m^{\text{ten}}$ Ordnung, aber nicht mehr alle Derivierten der $m+1^{\text{ten}}$ Ordnung.

Wenn nun unter den $p-1$ Punkten η m Paare verbundener Punkte vorkommen, so können wegen (467) diese, also in (469) m Punkte willkürlich gewählt werden; daraus folgt aber, daß für

$$(r) \equiv \Big(\sum_1^{p-2m-1} v^{\eta_\nu}\Big) \tag{471a}$$

und, da immer noch einer von den übrig gebliebenen Punkten η in den Grenzpunkt α_0 fallend angenommen werden kann, auch für

$$(r) \equiv \Big(\sum_1^{p-2m-2} v^{\eta_\nu}\Big) \tag{471b}$$

bei beliebiger Lage dieser $p-2m-1$ bzw. $p-2m-2$ Punkte η die Funktion $\vartheta[n](\!(r)\!)$ samt allen ihren Derivierten der 1^{ten}, $2^{\text{ten}}, \ldots$ m^{ten}, aber nicht mehr der $m+1^{\text{ten}}$ Ordnung verschwindet.

Für die Funktion (469) aber schließt man, daß sie als Funktion von z identisch verschwindet, sobald unter den p Punkten $z_1, z_2, \ldots$ z_p auch nur ein Paar verbundener Punkte sich befindet, daß sie dagegen in den genannten p Punkten und nur in ihnen 0^1 wird, wenn unter ihnen keine verbundenen Punkte vorkommen.

Das System (v^z) der p Integrale $v_1^z, v_2^z, \ldots v_p^z$ wird, wenn an Stelle von z einer der Vp. der *Riemann*schen Fläche gesetzt wird, einem Systeme zusammengehöriger Halben der Periodizitätsmodulen gleich. Läßt man an Stelle von z der Reihe nach die $2p+1$ Vp. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ α_{2p+1} treten, so erhält man aus (v^z) $2p+1$ Systeme zusammen-

gehöriger Halben der Periodizitätsmodulen, deren Per. Char. mit (a_1), $(a_2), \ldots (a_{2p+1})$ bezeichnet seien.

Versteht man unter $(\overset{\nu}{\sum} a)$ die Summe von irgend ν unter ihnen, so ergibt sich aus dem vorigen, daß eine Funktion

$$\vartheta[n + \overset{p-2m-1}{\sum} a](\!(v)\!) \quad \text{und} \quad \vartheta[n + \overset{p-2m-2}{\sum} a](\!(v)\!)$$

für $(v) = (0)$ samt allen ihren Derivierten der 1^{ten}, $2^{\text{ten}}, \ldots m^{\text{ten}}$, nicht aber der $m+1^{\text{ten}}$ Ordnung verschwindet, und man schließt hieraus, daß alle Th. Char. von den Formen

$$[n + \overset{p-4m-1}{\sum} a] \quad \text{und} \quad [n + \overset{p-4m-2}{\sum} a] \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

ungerade, alle Th. Char. von den Formen

$$[n + \overset{p}{\sum} a], \quad [n + \overset{p-4m-3}{\sum} a] \quad \text{und} \quad [n + \overset{p-4m-4}{\sum} a] \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

gerade sind, daß aber von allen Thetanullwerten nur die $\binom{2p+1}{p}$ Größen $\vartheta[n + \overset{p}{\sum} a](\!(0)\!)$ von Null verschieden sind.

Es ergibt sich jetzt sofort, daß irgend zwei der Per. Char. (a) zueinander azygetisch sind, die $2p+1$ Per. Char. $(a_1), (a_2), \ldots (a_{2p+1})$ also ein F. S. von Per. Char. bilden, und $[n]$ ergibt sich als die Summe der ungeraden unter den $[a]$.

Das F. S. $(a_1), (a_2), \ldots (a_{2p+1})$ hängt von der Zerschneidung der *Riemann*schen Fläche ab; durch deren passende Wahl kann an seine Stelle jedes überhaupt existierende F. S. von Per. Char. treten.

Bezüglich des Verschwindens der hyperelliptischen Thetafunktionen aber erhält man

für $p = 3$ die eine Bedingung, daß für $(v) = (0)$ die gerade Funktion $\vartheta[n](\!(v)\!)$ verschwindet,

für $p = 4$ die 10 Bedingungen, daß für $(v) = (0)$ die geraden Funktionen $\vartheta[n](\!(v)\!)$ und $\vartheta[n + \overset{1}{\sum} a](\!(v)\!)$ verschwinden,

für $p = 5$ die 66 Bedingungen, daß für $(v) = (0)$ die 66 geraden Funktionen $\vartheta[n + \overset{1}{\sum} a](\!(v)\!)$ und $\vartheta[n + \overset{2}{\sum} a](\!(v)\!)$ verschwinden und noch die weiteren Bedingungen, daß für $(v) = (0)$ die 5 ersten partiellen Derivierten der ungeraden Funktion $\vartheta[n](\!(v)\!)$ verschwinden; usw.

Beachtet man, daß die Anzahl der Modulen der allgemeinen p-fach unendlichen Thetareihe $\frac{1}{2}p(p+1)$, die Anzahl der wesentlichen Konstanten des hyperelliptischen Gebildes vom Geschlecht p aber $2p-1$ beträgt, so ergibt sich als die Anzahl der zwischen den

Modulen einer hyperelliptischen Thetafunktion bestehenden wesentlichen Relationen $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$, d. i. 1 im Falle $p=3$, 3 im Falle $p=4$, 6 im Falle $p=5$. Vergleicht man diese Zahlen mit den obigen, so erkennt man, daß die oben angegebenen Bedingungen, sobald $p>3$ ist, nicht unabhängig voneinander sind, sondern sich auf weniger reduzieren lassen müssen.[203])

75. Zuordnung der Wurzelfunktionen zu den Per. Char. Die Zuordnung von Wurzelfunktionen zu den Per. Char. wird am einfachsten an einen Thetaquotienten von der Form

$$Q=\frac{\vartheta[n+\sum^{p-1}a_\nu+a'](v^z)}{\vartheta[n+\sum^{p-1}a_\nu](v^z)} \tag{472}$$

geknüpft, bei dem $\left(\sum^{p-1}a_\nu\right)$ die Summe von irgend $p-1$, (a') aber eine davon verschiedene p^{te} Per. Char. des F. S. bezeichnet und der, da Zähler und Nenner in den $p-2$ Vp. α_ν gleichzeitig verschwinden, 0^1 wird nur in dem zu (a') gehörigen Vp. α', ∞^1 in α_0, so daß

$$Q=c\sqrt{\frac{z-\alpha'}{z-\alpha_0}} \tag{473}$$

ist, wo c eine von z freie Konstante bezeichnet. Ist $(a')=\binom{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\dots\,\varepsilon_p}{\varepsilon_1'\,\varepsilon_2'\,\dots\,\varepsilon_p'}$, so erlangt Q an den Querschnitten die folgenden Faktoren: es ist

---

203) Daß schon *Rosenhain* auf die Schwierigkeiten hingewiesen hatte, welche der Ausdehnung seiner Theorie der ultraelliptischen Funktionen auf beliebiges p deshalb entgegenstehen, weil bei größerem p die Anzahl der Modulen der Thetareihe über die Anzahl der wesentlichen Konstanten des hyperelliptischen Gebildes hinausgeht, ist bereits in Nr. 6 erwähnt worden. Welcher Art die besonderen Bedingungen sind, denen die Modulen der hyperelliptischen Thetafunktionen genügen, haben *Riemann* [„Vorl.“, dazu *Prym*, Schweiz. Nat. Ges. N. Denkschr. 22 (1867)] und *Weierstraß* [Math. W. 1 (1894), p. 143, dazu *Königsberger*, J. f. Math. 64 (1865), p. 25, und *Pringsheim*, Math. Ann. 12 (1877), p. 435] sehr früh erkannt. Daß diese Bedingungen auch hinreichende sind und daß man im Falle ihres Erfülltseins von den zwischen den Thetafunktionen bestehenden Relationen aus in der gleichen Weise, wie es von *Rosenhain* im Falle $p=2$ geschehen ist, zu den Differentialgleichungen des Umkehrproblems gelangen kann, haben für $p=3$ *Schottky* („Abr.“ p. 147) und für $p=4$ *Pringsheim* (a. a. O.) gezeigt. Die Reduktion der 10 Bedingungen im Falle $p=4$ auf 3 ist von *Noether* [Math. Ann. 14 (1879), p. 293], ebenso der 71 Bedingungen im Falle $p=5$ auf 6 von demselben [Math. Ann. 16 (1880), p. 337] durchgeführt worden.

Weierstraß [bei *Königsberger*, J. f. Math. 87 (1879), p. 189] hat darauf hingewiesen, daß zwar durch eine lineare, nicht aber durch eine Transformation höheren Grades aus einer hyperelliptischen Thetafunktion wieder eine hyperelliptische hervorgehe; vgl. dazu *Königsberger*, Mein Leben (1919), p. 170.

$$\begin{array}{ll} \text{längs } a_\nu\text{:} & Q^+ = (-1)^{\varepsilon_\nu} Q^- , \\ \text{längs } b_\nu\text{:} & Q^+ = (-1)^{\varepsilon'_\nu} Q^- \end{array} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots p) \tag{474}$$

und es ist daher

der Per. Char. (a') die Wurzelfunktion $\sqrt{\frac{z-\alpha'}{z-\alpha_0}}$

zugeordnet. Da man nun weiter jede beliebige Per. Char. in der Form $(\sum^m a_\mu)$ darstellen kann, so kann man auch jeder Per. Char. eine Wurzelfunktion zuordnen, nämlich

der Per. Char. $(\sum^m a_\mu)$ die Wurzelfunktion $\sqrt{\prod^m \frac{z-\alpha_\mu}{z-\alpha_0}}$.

76. Zuordnung der Wurzelformen zu den Th. Char. Sind $p-1$ Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{p-1}$ so gewählt, daß

$$(\sum_{\nu=1}^{p-1} v^{\eta_\nu}) \equiv \{\varepsilon\}, \tag{475}$$

d. h. einem Systeme zusammengehöriger Halben der Periodizitätsmodulen kongruent ist, so verschwindet $\vartheta[n\varepsilon](v^z)$, falls es nicht identisch verschwindet, in $z = \alpha_0$ und den $p-1$ Punkten $z = \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{p-1}$ und der Th. Char. $[n\varepsilon]$ wird jene Wurzelform $\sqrt{\varphi}$ zugeordnet, für welche φ in den $p-1$ Punkten η 0^2 ist. Nimmt man nun für die η $p-1$ Vp. α, so wird

$$(\sum^{p-1} v^{\alpha_\nu}) \equiv (\sum^{p-1} a_\nu) \tag{476}$$

und man erhält jeder ungeraden Th. Char. von der Form $[n + \sum^{p-1} a_\nu]$ eine Wurzelform $\sqrt{\prod^{p-1}(z-\alpha_\nu)}$ zugeordnet. Läßt man von den $p-1$ Vp. α_ν einen mit α_0 zusammenfallen, so erscheint jeder ungeraden Th. Char. von der Form $[n + \sum^{p-2} a_\nu]$ eine Wurzelform $\sqrt{\prod^{p-1}(z-\alpha_\nu)}$ zugewiesen, bei welcher jetzt unter den $p-1$ Faktoren $z-\alpha_\nu$ auch der Faktor $z-\alpha_0$ auftritt, und man hat also den ungeraden Th. Char. von den Formen $[n + \sum^{p-1} a]$ und $[n + \sum^{p-2} a]$ gleichmäßig Wurzelformen $\sqrt{\prod^{p-1}(z-\alpha)}$ zugeordnet erhalten.

Läßt man weiter in (475) an Stelle zweier der Punkte η ein Paar verbundener Punkte z_1 und $\bar{z}_1$ treten, so erscheint jeder Th. Char. $[n + \sum^{p-3} a]$ und $[n + \sum^{p-4} a]$, die alle gerade Th. Char. sind, für welche aber die Funktion $\vartheta[\varepsilon](v)$ und auch alle ihre ersten partiellen Derivierten für $(v) = (0)$ verschwinden, eine einfach unendliche Schar von

Wurzelformen $(z-z_1)\sqrt{\Pi^{p-3}(z-\alpha)}$ zugeordnet, da z_1 willkürlich gewählt werden kann.

Jeder der ungeraden Th. Char. $[n+\overset{p-5}{\sum}a]$ und $[n+\overset{p-6}{\sum}a]$, für welche außer der Thetafunktion selbst alle ihre ersten und zweiten partiellen Derivierten für $(v)=(0)$ verschwinden und zu denen wir gelangen, wenn wir annehmen, daß unter den $p-1$ Punkten η zwei Paare $z_1, \bar{z}_1$ und $z_2, \bar{z}_2$ verbundener Punkte auftreten, erhalten wir eine zweifach unendliche Schar von Wurzelformen $(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{\Pi^{p-5}(z-\alpha)}$ zugeordnet und allgemein wird, unter der Annahme des Vorkommens von m Paaren verbundener Punkte unter den η, jeder Th. Char. $[n+\overset{p-2m-1}{\sum}a]$ und $[n+\overset{p-2m-2}{\sum}a]$ eine m-fach unendliche Schar von Wurzelformen $(z-z_1)\ldots(z-z_m)\sqrt{\Pi^{p-2m-1}(z-\alpha)}$ zugeordnet.

Fährt man so fort, so werden endlich bei geradem p den Th. Char. $[n+\overset{3}{\sum}a]$ und $[n+\overset{2}{\sum}a]$ die $\frac{1}{2}p-2$-fach unendlichen Scharen von Wurzelformen $(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{\frac{1}{2}p-2})\sqrt{\Pi^{3}(z-\alpha)}$ und den Th. Char. $[n+\overset{1}{\sum}a]$ und $[n]$ die $\frac{1}{2}p-1$-fach unendlichen Scharen von Wurzelformen $(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{\frac{1}{2}p-1})\sqrt{z-\alpha}$ zugeordnet, wo dem früheren entsprechend im Falle der Th. Char. $[n]$ die Wurzel $\sqrt{z-\alpha_0}$ zu nehmen ist.

Bei ungeradem p dagegen werden schließlich den Th. Char. $[n+\overset{2}{\sum}a]$ und $[n+\overset{1}{\sum}a]$ die $\frac{1}{2}(p-3)$-fach unendlichen Scharen von Wurzelformen $(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{\frac{p-3}{2}})\sqrt{\Pi^{2}(z-\alpha)}$ und endlich der Th. Char. $[n]$ die $\frac{1}{2}(p-1)$-fach unendliche Schar $(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{\frac{p-1}{2}})$ zugewiesen.

Daß der Th. Char. $[n]$ in der Tat die Wurzelform $\sqrt{(z-\alpha_0)^{p-1}}$ entspricht, erhellt auch daraus, daß nach Nr. 75 einer Per. Char. $(\overset{p-}{\sum}a)$ eine Wurzelfunktion $\sqrt{\frac{\Pi^{p-1}(z-\alpha)}{(z-\alpha_0)^{p-1}}}$ entspricht, also die relative Zuordnung der Wurzelformen $\sqrt{\Pi^{p-1}(z-\alpha)}$ zu den Per. Char. $(\overset{p-1}{\sum}a)$ ihre

absolute Zuordnung zu den Th. Char. $[n + \sum_{1}^{p-1} a]$ liefert, wenn man der Wurzelform $\sqrt{(z-\alpha_0)^{p-1}}$ die Th. Char. $[n]$ zuweist; es steht diese Zuordnung aber endlich auch in direkter Übereinstimmung mit der Gleichung (468).

Im Vorigen ist der Vp. α_0, der als gemeinsame untere Grenze der Integrale v^s gewählt wurde, vor den $2p+1$ übrigen bevorzugt. Will man dies vermeiden, so wird man von dem F. S. von Per. Char. $(a_1), (a_2), \ldots (a_{2p+1})$ durch Hinzunahme der uneigentlichen Per. Char. (0) und Addition einer beliebigen Th. Char. $[a_0']$ zu einem F. S. von $2p+2$ Th. Char. $[a_0'], [a_1'], \ldots [a_{2p+1}']$ übergehen, welche jetzt den $2p+2$ Vp. $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{2p+1}$ entsprechen. Jede beliebige Th. Char. $[\varepsilon]$ kann (vgl. Nr. 27) durch die $2p+2$ Th. Char. $[a']$ auf zwei Weisen in der Form

$$[\varepsilon] = [n' + \sum_{1}^{p-2m+1} a'] = [n' + \sum_{1}^{p+2m+1} a'] \tag{477}$$

dargestellt werden, wo $[n'] = [n + (p+1)a_0']$ ist und wo jedesmal in den beiden Darstellungen zusammen jede der $2p+2$ Th. Char. $[a']$ und jede nur einmal auftritt. Dieser doppelten Darstellung tritt jedesmal eine Zerlegung von

$$s = \sqrt{(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{2p+1})} \tag{478}$$

in zwei Faktoren

$$s = \sqrt{\prod^{p-2m+1}(z-\alpha)} \cdot \sqrt{\prod^{p+2m+1}(z-\alpha)} \tag{479}$$

an die Seite, in denen zusammen alle $2p+2$ Linearfaktoren $z-\alpha$ auftreten, und es entspricht in diesem Sinne jeder Th. Char. $[\varepsilon]$, also auch jeder Thetafunktion $\vartheta[\varepsilon](v)$, eine Zerlegung von s^2 in zwei Faktoren von den Graden $p-2m+1$ und $p+2m+1$ (Nr. 94); jede der beiden Wurzelformen aber, die dabei auf der rechten Seite von (479) auftreten, charakterisiert die m-fach unendliche Schar der der Th. Char. $[\varepsilon]$ zugeordneten Wurzelformen. Nur die den Zerlegungen von s in zwei Faktoren gleichen, nämlich $p+1^{\text{ten}}$ Grades entsprechenden Thetafunktionen verschwinden für $(v) = (0)$ nicht.

77. Darstellung von Thetaquotienten durch Wurzelfunktionen. Greift man aus den $2p+1$ Vp. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}$ irgendeine gerade Anzahl, $2m$, heraus, teilt sie in zwei Gruppen zu je m, $\alpha_1', \ldots \alpha_m'$ die eine, $\alpha_1'', \ldots \alpha_m''$ die andere, und bezeichnet mit $(a_1'), \ldots (a_m')$ und $(a_1''), \ldots (a_m'')$ die ihnen nach Nr. 75 zugehörigen Per. Char., so wird der Thetaquotient

$$Q(z) = \frac{\vartheta[n + \sum_{1}^{m} a']\left(\left(v^z + \sum_{1}^{p-m} v^{z_\lambda}\right)\right)}{\vartheta[n + \sum_{1}^{m} a'']\left(\left(v^z + \sum_{1}^{p-m} v^{z_\lambda}\right)\right)}, \tag{480}$$

da sein Zähler und sein Nenner in den $p-m$ mit $z_1, \ldots z_{p-m}$ verbundenen Punkten $\bar{z}_1, \ldots \bar{z}_{p-m}$ gleichzeitig verschwinden, 0^1 nur für $z = \alpha'_1, \ldots \alpha'_m$, ∞^1 nur für $z = \alpha''_1, \ldots \alpha''_m$, und da er an allen Querschnitten zweite Einheitswurzeln als Faktoren annimmt, so ist

$$Q(z) = c\sqrt{\frac{(z-\alpha'_1)\ldots(z-\alpha'_m)}{(z-\alpha''_1)\ldots(z-\alpha''_m)}}, \tag{481}$$

wo c von z unabhängig ist. Setzt man daher, indem man noch z mit z_0 bezeichnet,

$$\frac{\vartheta[n+\sum^{m}\alpha']\left(\left(\sum_{0}^{p-m} v^{z_\lambda}\right)\right)}{\vartheta[n+\sum^{m}\alpha'']\left(\left(\sum_{0}^{p-m} v^{z_\lambda}\right)\right)} = c_0 \prod_{\lambda=0}^{p-m}\sqrt{\frac{(z_\lambda-\alpha'_1)\ldots(z_\lambda-\alpha'_m)}{(z_\lambda-\alpha''_1)\ldots(z_\lambda-\alpha''_m)}}, \tag{482}$$

so ist c_0 nun auch von $z_1, \ldots z_{p-m}$ unabhängig und kann folgendermaßen bestimmt werden.

Man teile die $2p+2-2m$ von den α' und α'' verschiedenen Vp. $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{2p+1-2m}$ irgendwie in 2 Gruppen von je $p+1-m$ und bezeichne die Punkte der einen Gruppe mit $\alpha_\lambda^{(0)}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots p-m)$, die der anderen mit $\alpha_\lambda^{(1)}$. Läßt man dann in (482) an Stelle der Punkte z_λ das eine Mal die Punkte $\alpha_\lambda^{(0)}$, das andere Mal die Punkte $\alpha_\lambda^{(1)}$ treten, so erhält man zwei Gleichungen, auf deren linken Seiten, von gewissen vierten Einheitswurzeln abgesehen[204]), die Zählerfunktion der zweiten mit der Nennerfunktion der ersten und umgekehrt übereinstimmt und aus denen durch Multiplikation

$$c_0^2 = \varepsilon\sqrt{\frac{\Delta(\alpha')\Delta(\alpha,\alpha'')}{\Delta(\alpha'')\Delta(\alpha,\alpha')}}, \tag{483}$$

durch Division

$$\frac{\vartheta^2[n+\sum^{m}\alpha'+\sum_{0}^{p-m}\alpha_\lambda^{(0)}](0)}{\vartheta^2[n+\sum^{m}\alpha''+\sum_{0}^{p-m}\alpha_\lambda^{(0)}](0)} = \varepsilon'\sqrt{\frac{\Delta(\alpha^{(0)},\alpha')\Delta(\alpha^{(1)},\alpha'')}{\Delta(\alpha^{(0)},\alpha'')\Delta(\alpha^{(1)},\alpha')}} \tag{484}$$

sich ergibt, wo $\Delta(\alpha')$ die Diskriminante der m Größen $\alpha'_1, \ldots \alpha'_m$, $\Delta(\alpha, \alpha'')$ die Diskriminante der $2p+2-m$ Größen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{2p+1-2m}$, $\alpha''_1, \ldots \alpha''_m$ usw., endlich $\Delta(\alpha^{(1)}, \alpha')$ die Diskriminante der $p+1$ Größen $\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \ldots \alpha_{p-m}^{(1)}, \alpha'_1, \ldots \alpha'_m$ bezeichnet, $\varepsilon, \varepsilon'$ aber leicht angebbare vierte Einheitswurzeln sind.

Durch (483) ist die auf der rechten Seite von (482) stehende Konstante c_0 bis aufs Vorzeichen bestimmt; durch (484) wird der Quo-

204) Bezüglich dieser siehe *Prym*, a. a. O. p. 40.

tient der Nullwerte von zwei beliebigen Funktionen $\vartheta^2[n+\sum^p a](v)$ durch die Verzweigungspunkte ausgedrückt.

In (482) sind zwei bemerkenswerte Fälle enthalten, in denen das Resultat eine besonders einfache Gestalt annimmt.

Wird erstens $m = p$ genommen, so erhält man

$$(485)\quad \frac{\vartheta[n+\sum^p a'](v^z)}{\vartheta[n+\sum^p a''](v^z)} = \eta \cdot \frac{\sqrt{\frac{(z-\alpha_1')\dots(z-\alpha_p')}{(z-\alpha_1'')\dots(z-\alpha_p'')}}}{\sqrt[4]{\frac{(\alpha_0-\alpha_1')\dots(\alpha_0-\alpha_p')}{(\alpha_0-\alpha_1'')\dots(\alpha_0-\alpha_p'')}}\sqrt[4]{\frac{(\alpha_1-\alpha_1')\dots(\alpha_1-\alpha_p')}{(\alpha_1-\alpha_1'')\dots(\alpha_1-\alpha_p'')}}},$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_1', \dots \alpha_p', \alpha_1'', \dots \alpha_p''$ die sämtlichen $2p+2$ Vp. bezeichnen und η eine achte Einheitswurzel ist.

Wird zweitens $m = 1$ genommen, so erhält man, wenn man noch z_0 durch z_p ersetzt,

$$(486)\quad \frac{\vartheta[n+a']\left(\sum_1^p v^{z_\lambda}\right)}{\vartheta[n+a'']\left(\sum_1^p v^{z_\lambda}\right)} = \eta \cdot \frac{\prod_{\lambda=1}^{p}\sqrt{\frac{z_\lambda-\alpha'}{z_\lambda-\alpha''}}}{\prod_{\mu=0}^{2p-1}\sqrt[4]{\frac{\alpha_\mu-\alpha'}{\alpha_\mu-\alpha''}}},$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{2p-1}, \alpha', \alpha''$ die sämtlichen $2p+2$ Vp. sind und η wieder eine achte Einheitswurzel bezeichnet. Setzt man jetzt

$$(487)\quad \prod_{\nu=0}^{2p+1}(z-\alpha_\nu) = f(z),$$

so erhält man aus (486) auch

$$(488)\quad \frac{\vartheta[n+a']\left(\sum_1^p v^{z_\lambda}\right)}{\vartheta[n+a'']\left(\sum_1^p v^{z_\lambda}\right)} = \eta \cdot \frac{\prod_{\lambda=1}^{p}\sqrt{\frac{z_\lambda-\alpha'}{z_\lambda-\alpha''}}}{\sqrt[4]{-\frac{f'(\alpha')}{f'(\alpha'')}}}.$$

78. Darstellung von Thetaquotienten durch Wurzelfunktionen, Fortsetzung. Dem Quotienten

$$(489)\quad Q(z) = \frac{\vartheta\left[n+\sum^{2m} a\right]\left(v^z+\sum_1^p v^{z_\lambda}\right)}{\vartheta[n]\left(v^z+\sum_1^p v^{z_\lambda}\right)}$$

ist nach Nr. **76** die Wurzelfunktion

$$(490)\quad \frac{\sqrt{(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_{2m})}}{(z-\alpha_0)^m}$$

zuzuordnen. Setzt man daher

$$(491)\quad (z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_{2m}) = g(z),$$

so ist $Q(z)\sqrt{g(z)}$ eine Funktion der Klasse und läßt sich, da sie

außer im Unendlichen nur in den Punkten $z = \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots \bar{z}_p$ unendlich wird, die $2m$ Vp. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m}$ aber als Nullpunkte hat, in der Form

$$Q(z)\sqrt{g(z)} = \frac{p(z)g(z) + q(z)\cdot s}{(z-z_1)\ldots(z-z_p)}, \tag{492}$$

$Q(z)$ selbst also, wenn man noch

$$\frac{s}{\sqrt{g(z)}} = \sqrt{h(z)} \tag{493}$$

setzt, in der Form

$$Q(z) = \frac{p(z)\sqrt{g(z)} + q(z)\sqrt{h(z)}}{(z-z_1)\ldots(z-z_p)} \tag{494}$$

darstellen, wo die ganzen rationalen Funktionen $p(z)$ und $q(z)$ der doppelten Bedingung zu genügen haben, daß $Q(z)$ im Unendlichen nicht mehr unendlich wird und auch nicht in den Punkten $z_1, z_2, \ldots z_p$. Die erste Bedingung verlangt, daß $p(z)$ höchstens vom Grade $p - m$ und $q(z)$ höchstens vom Grade $m - 1$ sei, die letztere aber, daß die so entstehende Zählerfunktion

$$\begin{aligned} Z = {} & (p_0 + p_1 z + \cdots + p_{p-m} z^{p-m})\sqrt{g(z)} \\ & + (q_0 + q_1 z + \cdots + q_{m-1} z^{m-1})\sqrt{h(z)} \end{aligned} \tag{495}$$

Null werde für $z = z_1, z_2, \ldots z_p$, woraus sich

$$Z = c \cdot \Delta \tag{496}$$

ergibt, wo Δ die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{g(z)} & z\sqrt{g(z)} & \cdots & z^{p-m}\sqrt{g(z)} & \sqrt{h(z)} & z\sqrt{h(z)} & \cdots & z^{m-1}\sqrt{h(z)} \\ \sqrt{g(z_1)} & z_1\sqrt{g(z_1)} & \cdots & z_1^{p-m}\sqrt{g(z_1)} & \sqrt{h(z_1)} & z_1\sqrt{h(z_1)} & \cdots & z_1^{m-1}\sqrt{h(z_1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{g(z_p)} & z_p\sqrt{g(z_p)} & \cdots & z_p^{p-m}\sqrt{g(z_p)} & \sqrt{h(z_p)} & z_p\sqrt{h(z_p)} & \cdots & z_p^{m-1}\sqrt{h(z_p)} \end{vmatrix} \tag{497}$$

bezeichnet. Setzt man dann

$$\frac{\vartheta[n + \sum_1^{2m} a]\left(v^z + \sum_1^p v^{z_\lambda}\right)}{\vartheta[n]\left(v^z + \sum_1^p v^{z_\lambda}\right)} = c_0 \cdot \frac{\Delta}{\Delta(z, z_1, \ldots z_p)}, \tag{498}$$

wo $\Delta(z, z_1, \ldots z_p)$ die Diskriminante der $p + 1$ Größen $z, z_1, \ldots z_p$ bezeichnet, so ist c_0 auch von $z_1, z_2, \ldots z_p$ unabhängig und kann bestimmt werden, indem man für die $p + 1$ Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ spezielle Lagen wählt.

Setzt man etwa

$$z = \alpha_0,\ z_1 = \alpha_1,\ \ldots\ z_m = \alpha_m,\ z_{m+1} = \alpha_{2m+1},\ \ldots\ z_p = \alpha_{m+p}, \tag{499}$$

so kann die linke Seite von (498) mittelst (484) durch die Vp. aus-

gedrückt werden und man erhält, wenn man auch rechts die z durch die Werte (499) ersetzt und der Vereinfachung wegen statt α_0 hier α_{2p+2} schreibt,

$$c_0 = \sqrt[4]{\frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2m})\,\Delta(\alpha_{2m+1}, \alpha_{2m+2}, \ldots \alpha_{2p+2})}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+2})}}. \tag{500}$$

79. Lösung des Jacobischen Umkehrproblems. Wenn die p Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ bei gegebenen Werten $w_1, w_2, \ldots w_p$ aus dem Kongruenzensystem

$$\left(\sum_1^p v^z\right) \equiv (w) \tag{501}$$

zu bestimmen sind, so liefert die Gleichung (488), wenn man in ihr die unbekannten Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ einführt, sofort die Gleichung

$$\prod_{\lambda=1}^{p} \frac{z_\lambda - \alpha'}{z_\lambda - \alpha''} = \varepsilon \sqrt{-\frac{f'(\alpha')}{f'(\alpha'')}} \left(\frac{\vartheta[n+a'](w)}{\vartheta[n+a''](w)}\right)^2, \tag{502}$$

wo rechts alles bekannt ist (auch die vierte Einheitswurzel ε) und woraus man, indem man für α', α'' verschiedene Paare von Vp. treten läßt, genügend viel Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $z_1, z_2, \ldots z_p$ ableiten kann.

Man kann aber der Lösung des Umkehrproblems noch eine andere Form geben. Setzt man

$$F(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_p), \tag{503}$$

so erhält man

$$\frac{F(z)}{f(z)} = \sum_{\nu=0}^{2p+1} \frac{F(\alpha_\nu)}{f'(\alpha_\nu)} \cdot \frac{1}{z - \alpha_\nu}, \tag{504}$$

und hieraus durch Anwendung von (502)

$$\frac{\sqrt{f'(\alpha'')}}{F(\alpha'')} \cdot F(z) = \sum_{\nu=0}^{2p+1} \varepsilon_\nu \left(\frac{\vartheta[n+a_\nu](w)}{\vartheta[n+a''](w)}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{-f'(\alpha_\nu)}} \cdot \frac{f(z)}{z - \alpha_\nu}. \tag{505}$$

Man erkennt daraus, daß man die p Wurzeln der Gleichung $F(z) = 0$, d. h. die p gesuchten Werte $z_1, z_2, \ldots z_p$ auch als die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{2p+1} \frac{\varepsilon_\nu}{\sqrt{-f'(\alpha_\nu)}} \cdot \frac{\vartheta^2[n+a_\nu](w)}{\vartheta^2[n+a](w)} \cdot \frac{f(z)}{z - \alpha_\nu} = 0 \tag{506}$$

definieren kann, wobei (a) irgendeine der $2p+1$ Per. Char. des F. S. ist. Diese Gleichung löst also das Umkehrproblem, soweit es die Bestimmung der Werte $z_1, z_2, \ldots z_p$ angeht.

Nachdem diese Werte bestimmt sind, handelt es sich um die Ermittlung der zugehörigen Werte $s_1, s_2, \ldots s_p$.

Zu dem Ende gehe man auf die Formel (498) zurück und setze darin $m = 1$. Man erhält dann

$$\frac{\vartheta[n+\sum_1^2 a]\left(\left(v^z+\sum_1^p v^{z_\nu}\right)\right)}{\vartheta[n]\left(\left(v^z+\sum_1^p v^{z_\nu}\right)\right)} = c_1 \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta(z, z_1, \ldots z_p)}, \tag{507}$$

wobei

$$c_1 = \sqrt[4]{\frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2)\Delta(\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_{2p+2})}{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+2})}} \tag{508}$$

und

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sqrt{g(z)} & z\sqrt{g(z)} & \ldots & z^{p-1}\sqrt{g(z)} & \frac{s}{\sqrt{g(z)}} \\ \sqrt{g(z_1)} & z_1\sqrt{g(z_1)} & \ldots & z_1^{p-1}\sqrt{g(z_1)} & \frac{s_1}{\sqrt{g(z_1)}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sqrt{g(z_p)} & z_p\sqrt{g(z_p)} & \ldots & z_p^{p-1}\sqrt{g(z_p)} & \frac{s_p}{\sqrt{g(z_p)}} \end{vmatrix}, \tag{509}$$

endlich

$$g(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \tag{510}$$

ist. Setzt man $z = \alpha_0$, so wird die linke Seite von (507) bekannt, die rechte Seite aber zu einer linearen Funktion von $s_1, s_2, \ldots s_p$ mit bekannten Koeffizienten und man erhält, indem man für α_1, α_2 verschiedene Paare von Vp. setzt, genügend viele lineare Gleichungen zur Bestimmung von $s_1, s_2, \ldots s_p$.

80. Additionstheorem der hyperelliptischen Thetafunktionen. Man teile die $2p + 2$ Th. Char. eines F. S. in zwei Hälften $[\alpha_0], [\alpha_1], \ldots [\alpha_p]$ die eine, $[\alpha_{p+1}], [\alpha_{p+2}], \ldots [\alpha_{2p+1}]$ die andere, nenne $[a_0], [a_1], \ldots [a_{r-1}]$ die $r = 2^p$ Th. Char. des Systems mit der Basis $[\alpha_0], \ldots [\alpha_p]$, dagegen $[b_0], [b_1], \ldots [b_{r-1}]$ die $r = 2^p$ Th. Char. des Systems mit der Basis $[\alpha_{p+1}], \ldots [\alpha_{2p+1}]$ und bezeichne mit $[n]$ die Summe der ungeraden (oder geraden) unter den $2p + 2$ Th. Char. $[\alpha]$, mit $[\eta_0]$ die Th. Char. $[\eta_0] = [n\,\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_p] = [n\,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2} \ldots \alpha_{2p+1}]$, mit $[\xi]$ aber eine beliebige Th. Char. Bildet man dann aus den zugeordneten hyperelliptischen Thetafunktionen, während man unter den u, v, w unabhängige Variablen, unter $(\varrho), (\sigma)$ beliebige Per. Char. versteht, die Ausdrücke (165), so bestehen zwischen diesen die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_{[\eta_0]} &= \sum_{\varrho=0}^{r-1} |\eta_0, \xi a_\varrho|\, x_{[\xi a_\varrho]}, \\ y_{[\eta_0]} &= \sum_{\varrho=0}^{r-1} |\eta_0, \xi b_\varrho|\, x_{[\xi b_\varrho]}. \end{aligned} \tag{511}$$

Vermittelst dieser Gleichungen kann man jede der $\binom{2p+1}{p}$ von Null

verschiedenen Größen y auf $2 \cdot 2^p$ Weisen durch je 2^p Größen x ausdrücken[205]).

Aus den Formeln (511) ergeben sich für $(w) = (-v)$, indem man zwei Formeln mit der gleichen Charakteristik $[\eta + \varrho]$ durcheinander dividiert, Additionstheoreme für die Quotienten hyperelliptischer Thetafunktionen, für $(v) = (w) = (0)$ dagegen Relationen zwischen diesen Funktionen[206]). Man erhält daraus endlich auch die

81. Verallgemeinerung der Rosenhainschen Differentialformeln für den hyperelliptischen Fall beliebigen Geschlechts. Durch Addition einer Per. Char. von der Form $(n + \sum_{1}^{p} a)$ zu den $2p + 2$ Th. Char. $[a_0], [a_1], \ldots [a_{2p+1}]$ eines F. S. entsteht stets ein F. S., das aus p ungeraden und $p + 2$ geraden Th. Char. besteht, und man erhält auf diese Weise alle derartigen F. S. eines Komplexes.

Bezeichnet man nun die p ungeraden Th. Char. des F. S. mit $[A_1], [A_2], \ldots [A_p]$, die $p + 2$ geraden mit $[B_1], [B_2], \ldots [B_{p+2}]$ und bezeichnet weiter den Wert, den die aus den partiellen Derivierten der p ungeraden Thetafunktionen $\vartheta[A_\nu](v)$ gebildete Determinante

$$\left| \frac{\partial \vartheta[A_\nu](v)}{\partial v_\mu} \right| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p)$$

für $(v) = (0)$ annimmt, mit $[A_1, A_2, \ldots A_p]$, so ist

$$[A_1, A_2, \ldots A_p] = \varepsilon \prod_{\varrho=1}^{p+2} \vartheta[B_\varrho](0), \tag{512}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist[207]).

82. Anwendungen. In seiner Preisschrift von 1867 hat *Schwarz*[208]) diejenige Minimalfläche untersucht, die durch ein von 4 gleichlangen,

205) Die Formel (511) wurde zuerst von *Weierstraß* angegeben [vgl. *Königsberger,* J. f. Math. 64 (1865), p. 27]; später hat sie *Prym* („Riem. Thetaf.", p. 94) aus der *Riemann*schen Thetaformel abgeleitet.

206) Vgl. dazu *Pringsheim,* Math. Ann. 12 (1877), p. 435. Den Thetarelationen entsprechen wieder Relationen zwischen Wurzelformen wie umgekehrt; dazu *Brioschi*, Ann. di Mat. 1 (1858), p. 20 = Op. mat. 1 (1901), p. 285; Ann. di Mat. 10_2 (1882), p. 161 = Op. mat. 2 (1902), p. 247; Paris C. R. 99 (1884), p. 889, 951 u. 1050 = Op. mat. 5 (1909), p. 45; *Brunel*, Ann. Éc. Norm. 12_2 (1883), p. 199; *Craig,* Amer. J. 6 (1884), p. 183; *Dixon,* Lond. M. S. Proc. 33 (1901), p. 274.

207) Siehe *Thomae,* J. f. Math. 71 (1870), p. 218; *Frobenius,* J. f. Math. 98 (1885), p. 254. Die Formel (512) gilt auch im allgemeinen Falle $p = 3$, siehe Nr. 87; für $p > 3$ treten dagegen im allgemeinen Falle auf der rechten Seite Summen von mehreren Produkten von je $p + 2$ geraden Thetanullwerten auf, wie *Frobenius* a. a. O. p. 263 für den Fall $p = 4$ gezeigt hat. Daß alle diese Resultate bereits *Riemann* bekannt waren, geht aus dem Berichte über dessen Nachlaß hervor, den *Noether* in den Nachtr., Anm. 31, p. 64, gibt.

208) Ges. math. Abh. 1 (1890), p. 6.

unter Winkeln von 60^0 aneinanderstoßenden Strecken gebildetes räumliches Vierseit hindurchgeht, und hat für deren rechtwinklige Koordinaten x, y, z 3 linearunabhängige Integrale 1. Gattung des durch die Gleichung $s = \sqrt{1 - 14z^4 + z^8}$ definierten hyperelliptischen Gebildes vom Geschlecht 3 erhalten. Diese Integrale sind auf elliptische Integrale reduzierbar und die Gleichung der Minimalfläche erhält *Schwarz* in der Form, daß eine in bezug auf elliptische Funktionen der x, y, z ganze rationale Funktion gleich Null ist.

Weierstraß[209]) hat darauf hingewiesen, daß die *Schwarz*sche Minimalfläche zu einer allgemeineren Gattung solcher gehört, bei denen stets die Koordinaten durch hyperelliptische Integrale vom Geschlecht 3 gegeben sind, und hat zugleich gezeigt, daß die Gleichung einer solchen Minimalfläche in der Gestalt $\vartheta(\!(v)\!) = 0$ dargestellt werden kann, wo die v lineare Funktionen von x, y, z sind. Die Koeffizienten dieser und die Modulen der ϑ-Funktion sind in jedem einzelnen Falle besonders zu bestimmen.

Für die *Schwarz*sche Fläche hat diese Bestimmung *Hettner*[210]) durchgeführt und gezeigt, daß die ϑ-Funktion in der Tat als Aggregat von Thetafunktionen einer Veränderlichen dargestellt werden kann.

83. Bestimmung von $d\log\vartheta(\!(0)\!)$ durch die Klassenmodulen im allgemeinen Abelschen Falle. Die Th. Char. $[\varepsilon]$ sei so gewählt, daß $\vartheta[\varepsilon](\!(0)\!) \neq 0$ ist; bestimmt man dann zu dem Vp. α p Punkte $z_1, z_2, \ldots z_p$ so, daß

$$\left(v(\alpha) - \sum_{\nu=1}^{p} v(z_\nu)\right) \equiv \{\varepsilon\} \tag{513}$$

ist, sodaß also $z_1, z_2, \ldots z_p$ die 0^1-Punkte der Funktion $\vartheta[\varepsilon](\!(v(z) - v(\alpha))\!)$ sind, und bezeichnet mit Δ die aus den Integranden v' der p *Riemann*schen Normalintegrale gebildete Determinante

$$\Delta = |v'_\mu(z_\nu)|, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p) \tag{514}$$

so ist nach *Thomae*[211])

$$\frac{\partial \log\vartheta[\varepsilon](\!(0)\!)}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\partial' \log\Delta}{\partial\alpha}, \tag{515}$$

wo rechts der Akzent anzeigen soll, daß bei der Differentiation nach α die p Punkte z_ν als konstant anzusehen sind.

Fuchs[212]) hat an Stelle der *Riemann*schen Normalintegrale v in die Formel (515) p andere linear unabhängige Integrale 1. Gattung

209) Berl. Ber. 1867, p. 511 = Math. W. 3 (1903), p. 241.
210) J. f. Math. 138 (1910), p. 54.
211) J. f. Math. 66 (1866), p. 95.
212) J. f. Math. 73 (1871), p. 316 = Ges. math. W. 1 (1904), p. 333.

u eingeführt, bei denen der Integrand u'_μ, wenn $b_1, b_2, \ldots b_p$ p willkürliche Punkte bezeichnen, für $z = b_1, \ldots b_{\mu-1}, b_{\mu+1}, \ldots b_p$ verschwindet, für $z = b_\mu$ aber $= 1$ wird. Bezeichnet man dann mit $\psi_\alpha(z)$ die nach Nr. 57 zu der linearen Funktion $z - \alpha$ gehörige, in den Punkten $z_1, z_2, \ldots z_p$ 0^2 werdende ψ-Funktion und mit ∇ die Determinante $\sum \pm A_{11} A_{22} \ldots A_{pp}$ der Periodizitätsmodulen der Integrale u_μ an den Querschnitten a_ν, so ist

$$\frac{\partial \log \vartheta[\varepsilon](0)}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \nabla}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{p} C_\mu \left[\frac{\psi_\alpha(z)}{(z-\alpha) \frac{\partial F}{\partial s}} \right]_{z=b_\mu}, \tag{516}$$

wo die Konstanten C dadurch bestimmt sind, daß

$$\frac{\partial u_u}{\partial \alpha} - C_\mu \int \frac{\psi_\alpha(z)\, dz}{(z-\alpha) \frac{\partial F}{\partial s}} \tag{517}$$

allenthalben endlich bleibe[213]).

84. Integration der erhaltenen Gleichung im hyperelliptischen Falle. Jeder Th. Char. $[\varepsilon]$, für welche $\vartheta[\varepsilon](0) \neq 0$ ist, entspricht (vgl. Nr. 76) eine Zerlegung der $2p + 2$ Vp. in zwei Gruppen von je $p + 1$ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_p$ die eine, $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots \alpha_{2p+1}$ die andere. Bezeichnet man dann mit Δ_1 die Diskriminante der $p + 1$ Größen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_p$, mit Δ_2 diejenige der $p + 1$ Größen $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots \alpha_{2p+1}$ und bezeichnet auch mit $A_{\mu\nu}$ den Periodizitätsmodul des Integrals 1. Gattung

$$u_\mu = \int \frac{z^{\mu-1} dz}{s} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{518}$$

am Querschnitte a_ν und mit ∇ die Determinante $\sum \pm A_{11} A_{22} \ldots A_{pp}$ dieser p^2 Größen, so entsteht aus (515) durch Integration die Formel[214])

$$\vartheta[\varepsilon](0) = \sqrt{\frac{\nabla}{(2\pi i)^p}} \cdot \sqrt[4]{\Delta_1 \cdot \Delta_2}. \tag{519}$$

Thomae hat a. a. O. auch die Nullwerte der partiellen Derivierten der ungeraden Thetafunktionen von der Form $\vartheta[n + \sum_{}^{p-1} a](v)$ berechnet und dafür die Formel

$$\left(\frac{\partial \vartheta[\varepsilon](v)}{\partial v_\mu}\right)_0 = \frac{\frac{1}{2} \sqrt[4]{\Delta_1 \Delta_2} \sum_{\varrho=1}^{p} A_{\mu\varrho} S_{\varrho-1}}{2\pi i \sqrt{(2\pi i)^p} \cdot \sqrt{\nabla}} \tag{520}$$

213) Eine weitere Ausführung dieser Formel unter der Annahme einer p-blättrigen *Riemann*schen Fläche bei *Thomae*, J. f. Math. 75 (1873), p. 252, und für den speziellen Fall $p = 3$ noch besonders in Leipz. Ber. 39 (1887), p. 100.

214) *Thomae*, J. f. Math. 71 (1870), p. 216, dazu auch *Cayley*, J. f. Math. 100 (1887), p. 87 = Coll. math. pap. 12 (1897), p. 442; man vgl. mit (519) die Formel (484).

gefunden; dabei haben $A_{\mu\varrho}$ und ∇ die gleiche Bedeutung wie vorher, ferner bezeichnet, wenn $[\varepsilon] = [n + \sum_{\mu=1}^{p-1} a_\mu]$ ist, Δ_1 die Diskriminante der $p-1$ Vp. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}$, $S_{\varrho-1}$ die Summe aller Produkte von je $\varrho-1$ unter ihnen und Δ_2 die Diskriminante der $p+3$ übrigen Vp. $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots \alpha_{2p+2}$.

X. Der Fall $p = 3$.[215])

85. Charakteristikentheorie. Von den 64 Th. Char. sind 36 gerade und 28 ungerade. Man kann auf 288 Weisen 7 ungerade Th. Char. $[\beta_1], [\beta_2], \ldots [\beta_7]$ so auswählen, daß sie eine Hauptreihe (bei *Weber* vollständiges System genannt) bilden. Ihre Summe $[p]$ ist dann gerade und die 35 Kombinationen der $[\beta]$ zu dreien $[\beta_i\beta_k\beta_l]$ sind die 35 übrigen geraden Th. Char., während die Kombinationen zu 5 oder die Th. Char $[p\beta_i\beta_k]$ die 21 noch fehlenden ungeraden Th. Char. darstellen. Die Kombinationen gerader Ordnung der 7 Charakteristiken $[\beta]$, also die 21 Charakteristiken $(\beta_i\beta_k)$, die 35 $(p\beta_i\beta_k\beta_l)$ und die 7 $(p\beta_i)$ liefern zusammen die 63 eigentlichen Per. Char.

Addiert man zu den 7 Th. Char. einer Hauptreihe und $[p]$ eine beliebige Th. Char., so bilden die entstehenden 8 ein F. S. von Th. Char. Man erhält so zu jeder Hauptreihe einen Komplex von 64 verschiedenen F. S., aber zu allen 288 Hauptreihen zusammen nur $8 \cdot 288 = 2304$ verschiedene F. S., da jedes F. S. in 8 verschiedenen Komplexen auftritt. Von den 64 F. S. eines Komplexes bestehen immer 8 aus 7 ungeraden und 1 geraden, die übrigen 56 aus 3 ungeraden und 5 geraden Th. Char. Bezeichnet man die 8 Th. Char. eines F. S. mit $[\alpha_0], [\alpha_1], \ldots [\alpha_7]$ und mit $[n]$ die stets gerade Summe der ungeraden unter ihnen, so erhält man in der Form $[n + \sum^{2} \alpha]$

215) *Riemann*, „Vorl."; schon vorher Ges. math. W. 1876, p. 456, 2. Aufl. 1892, p. 487. *Weber*, „$p = 3$"; dazu J. f. Math. 88 (1880), p. 82, s. auch das Referat von *Fuchs*, Gött. N. 1875, p. 288. *Cayley*, J. f. Math. 87 (1879), p. 134, 165 u. 190 = Coll. math. P. 10 (1896), p. 432, 441 u. 446; Mess. of Math. 7 (1878), p. 48 = Coll. math. pap. 11 (1896), p. 47; dazu *Borchardt*, J. f. Math. 87 (1879), p. 169 = Ges. W. 1888, p. 491; vgl. noch *Cayley*, J. f. Math. 68 (1868), p. 176 = Coll. math. pap. 7 (1894), p. 123 u. J. f. Math. 94 (1883), p. 93 = Cambr. Phil. Soc. Proc. 4 (1883), p. 321 = Coll. math. pap. 12 (1897), p. 74. *Schottky*, „Abr."; ferner J. f. Math. 105 (1889), p. 269; Acta math. 27 (1903), p. 235; Berl. Ber. 1903, p. 978 u. 1022; 1904, p. 486; 1906, p. 752; 1910, p. 182; J. f. Math. 146 (1916), p. 128; *Frobenius*, Gött. N. 1888, p. 67; J. f. Math. 105 (1889), p. 35; *Stahl*, J. f. Math. 130 (1905), p. 153. Eine vollständige algebraische Begründung der Charakteristikentheorie bei *Noether*, Münch. Abh. 17 I (1888/9), p. 103.

die 28 ungeraden Th. Char., während $[n + \sum^{4} \alpha]$ die 35 von $[n]$ verschiedenen geraden Th. Char. und zwar jede zweimal liefert, da zwei Th. Char., in denen zusammen alle 8 Th. Char. $[\alpha]$ auftreten, einander gleich sind.

86. Thetarelationen. Die Relationen zwischen den 64 Funktionen $\vartheta[\varepsilon](v)$ können (ebenso wie die Additionstheoreme ihrer Quotienten) aus der Formel (167) abgeleitet werden. Setzt man darin $(u) = (w) = (0)$, so wird

$$(521) \quad x_{[\varepsilon]} = y_{[\varepsilon]} = \vartheta[\varepsilon](0)\,\vartheta[\varepsilon+\sigma](0)\,\vartheta[\varepsilon+\varrho](v)\,\vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma](-v)$$

und man erhält, wenn man weiter $[\omega] = [n\alpha_5\alpha_6\alpha_7]$ wählt

$$(522) \qquad x_{[n]} = \sum_{\mu=0}^{4} | n, n\alpha_\mu\alpha_5\alpha_6\alpha_7 |\, x_{[n\alpha_\mu\alpha_5\alpha_6\alpha_7]},$$

da die 3 letzten Glieder der rechten Seite wegfallen.

Hieraus folgt für $(\sigma) = (0)$ eine lineare Relation zwischen 6 Thetaquadraten von der Form

$$\vartheta^2[\varkappa\alpha_0](v), \quad \vartheta^2[\varkappa\alpha_1](v), \quad \ldots \quad \vartheta^2[\varkappa\alpha_4](v) \quad \text{und} \quad \vartheta^2[\varkappa\alpha_5\alpha_6\alpha_7](v)$$

und für $(\sigma) = (\alpha_4\alpha_5)$ eine lineare Relation zwischen 4 Thetaprodukten von der Form

$$\vartheta[\varkappa\alpha_\mu\alpha_4](v)\,\vartheta[\varkappa\alpha_\mu\alpha_5](v), \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

wobei stets $(\varkappa)$ eine beliebige Per. Char. bezeichnet.

Mittelst dieser Relationen ist es möglich, durch die nämlichen 8 linear unabhängigen Thetaquadrate alle weiteren 56 linear auszudrücken, entsprechend dem Umstande, daß jedes Thetaquadrat eine gerade Thetafunktion zweiter Ordnung mit der Charakteristik [0] ist und solcher Funktionen nur 8 linear unabhängige vorhanden sind. Weiter ist ein Thetaprodukt $\vartheta[\varkappa\alpha_\mu\alpha_4](v)\,\vartheta[\varkappa\alpha_\mu\alpha_5](v)$ eine Thetafunktion zweiter Ordnung mit der Charakteristik $[\alpha_4\alpha_5]$ und in Übereinstimmung damit, daß es nur 4 linear unabhängige, sowohl gerade wie ungerade, solche Funktionen bei gegebener von [0] verschiedener Charakteristik gibt, läßt sich mittels (522) durch vier linear unabhängige solche Produkte jedes weitere fünfte linear ausdrücken.

87. Thetanullwerte. Aus der Gleichung (522) kann man für $(v) = (0)$ alle Relationen zwischen den Nullwerten der 36 geraden Thetafunktionen erhalten.

Für $(\varrho) = (\sigma) = (0)$ folgen aus ihr lineare Relationen zwischen je 6 Biquadraten der Thetanullwerte; setzt man dagegen $(\varrho) = (\alpha_4\alpha_5)$, $(\sigma) = (0)$, so erhält man lineare Relationen zwischen je 4 Produkten von 2 Thetaquadraten, und setzt man endlich $(\varrho) = (\alpha_4\alpha_5)$, $(\sigma) = (\alpha_3\alpha_6)$, so entstehen lineare Gleichungen zwischen je 3 Produkten von 4 Theta-

funktionen mit verschiedenen Charakteristiken. Über die Auflösung dieser Gleichungen, d. h. die Darstellung aller 36 Thetanullwerte durch 6 unabhängige Größen, siehe Nr. 88.

Dazu treten noch jene Relationen, welche die Nullwerte der 36 geraden mit den Nullwerten der partiellen Derivierten der 28 ungeraden Thetafunktionen verknüpfen (vgl. Nr. 81).

Addiert man nämlich zu den 8 Th. Char. $[\alpha_0], [\alpha_1], \ldots [\alpha_7]$ eines F. S. eine Per. Char. von der Form $(n + \sum^{3} a)$, so entsteht ein F. S., das aus 3 ungeraden und 5 geraden Th. Char. besteht. Bezeichnet man darin die 3 ungeraden Th. Char. mit $[A_1], [A_2], [A_3]$, die 5 geraden mit $[B_1], [B_2], \ldots [B_5]$, auch den Wert, den die Funktionaldeterminante der 3 Funktionen $\vartheta[A_i](v)$, $i = 1, 2, 3$, für $(v) = (0)$ annimmt, mit $[A_1, A_2, A_3]$, so ist

$$[A_1, A_2, A_3] = \pm \prod_{\varrho=1}^{5} \vartheta[B_\varrho](0). \tag{523}$$

Diese Formel, welche schon *Riemann*[216]) bekannt war, wurde zuerst von *Frobenius*[217]) angegeben, nachdem *Weber* und *Schottky* nur die Verhältnisse gewisser Paare solcher Determinanten berechnet hatten.

88. Riemann-Weber. Da die ebene Kurve vierter Ordnung C_4 ohne Doppelpunkt vom Geschlecht 3 ist, kann sie, wie zuerst *Riemann* in seiner Vorlesung vom W.-S. 1861/62 getan hat, der Theorie der *Abel*schen Funktionen dreier Variablen zugrunde gelegt werden. Die φ-Kurven sind dann gerade Linien; unter ihnen gibt es 28 spezielle, deren Schnittpunkte mit C_4 paarweise zusammenfallen, die also Doppeltangenten von C_4 sind. Sie sind den 28 ungeraden Th. Char. zugeordnet und zeigen daher die nämlichen Gruppierungen wie diese; insbesondere entsprechen die *Aronhold*schen Systeme von 7 Doppeltangenten, bei denen die Berührungspunkte von keinen dreien auf einem Kegelschnitt liegen[218]), den 288 Hauptreihen von je 7 ungeraden Th. Char.

216) Ges math. W. Nachtr., p. 64, Anm. 31.

217) J. f. Math. 98 (1895), p 260.

218) Näheres über die Doppeltangenten einer C_4 und insbesondere die einschlägige Literatur III C 5, Nr. 59 u. f.; auch in *Pascals* Repert. d. höh. Math. 2. Bd., 1. Hälfte, 2. Aufl. 1910, p. 406 u. f.; hier seien nur die ersten grundlegenden Arbeiten genannt: *Plücker,* Th. d. algebr. Curven 1839; *Hesse,* J. f. Math. 40 (1850), p. 260; 49 (1855), p. 243 u. 279; 55 (1858), p. 83 = Ges. W. 1897, p. 260, 319, 345 u. 469; *Steiner,* Paris C. R. 37 (1853), p. 121; J. f. Math. 49 (1855), p. 265 = Ges. W. 2 (1882), p. 603; *Aronhold,* Berl. Ber. 1864, p. 499.

Da die Kurven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt vom Geschlecht 2 sind, so ist auf diese speziellen C_4, wie schon in Nr. 72 erwähnt wurde, die Theorie der *Abel*schen Funktionen für $p = 2$ anwendbar; bezüglich des Übergangs von

Solche 7 Doppeltangenten bestimmen die C_4 eindeutig. Wie man aus ihren Gleichungen die der 21 übrigen Doppeltangenten und sodann die Gleichung der C_4 selbst ableitet, hat *Weber* im Anschluß an *Riemann* ausführlich gezeigt. Es erscheint dabei die Gleichung der letzteren in der Gestalt

$$\sqrt{x_1\xi_1} + \sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} = 0, \tag{524}$$

wo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die den 3 Th. Char. $[\beta_1]$, $[\beta_2]$, $[\beta_3]$ einer Hauptreihe, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ die den 3 Th. Char. $[p\beta_2\beta_3]$, $[p\beta_3\beta_1]$, $[p\beta_1\beta_2]$ zugeordneten Doppeltangenten darstellen. Die Gleichung der Grundkurve enthält 6 wesentliche Konstanten, die Klassenmodulen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ *Webers*, welche zusammen mit 3 daraus abgeleiteten Modulen $\alpha_1'', \alpha_2'', \alpha_3''$ als Koeffizienten in den Gleichungen der Doppeltangenten auftreten. Die zwischen ihnen und den Nullwerten der 36 geraden Thetafunktionen bestehenden Relationen, welche sowohl diese durch jene wie umgekehrt auszudrücken gestatten, hat gleichfalls *Weber* angegeben.

Ist für die 3 *Riemann*schen Normalintegrale

$$dv_1 : dv_2 : dv_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3, \tag{525}$$

so sind, bezogen auf das Koordinatendreieck $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ die Linienkoordinaten der irgendeiner ungeraden Th. Char. $[\varepsilon]$ zugehörigen Doppeltangente den Nullwerten der 3 partiellen Derivierten von $\vartheta[\varepsilon](v)$ proportional. Es entspricht daher durchaus der *Aronhold*schen Bestimmung der Kurve 4. Ordnung durch 7 Doppeltangenten, deren Th. Char. eine Hauptreihe bilden, wenn *Schottky* durch die Nullwerte der partiellen Derivierten solcher 7 ungeraden Thetafunktionen die der 21 übrigen und die Nullwerte der 36 geraden Thetafunktionen ausdrückt.

Bei der Untersuchung der Gruppierungen der 28 Doppeltangenten wird man, um alle gleichberechtigt zu haben, von der Darstellung der 28 ungeraden Th. Char. durch die 8 Th. Char. eines F. S. in der Form $[n + \sum^{2}\alpha]$ Gebrauch machen, wodurch jetzt jede Doppeltangente durch ein Zahlenpaar aus der Reihe $1, 2, \ldots 8$ bestimmt wird, wie es, von anderen Gesichtspunkten ausgehend, schon *Hesse* getan hat. Auf die Tripel von Doppeltangenten kann man die Begriffe syzygetisch und azygetisch von den Th. Char. übertragen. Es zeigt sich dabei, daß von den 3276 Tripeln 1260 syzygetisch und 2016 azygetisch sind; bei

der allgemeinen C_4 zu dieser speziellen vgl. *Roch*, J. f. Math. 66 (1866), p. 114; *Cayley*, J. f. Math. 94 (1883), p. 270 = Coll. math. pap. 12 (1897), p. 95; *Klein*, Math. Ann. 36 (1890), p. 59; auch *Riemann*, Ges. math. W. Nachtr. (1902), p. 97.

den ersteren liegen ihre 6 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt, bei den letzteren nicht. Wegen der übrigen Gruppierungsverhältnisse der Doppeltangenten C III 5, Nr. 73.

89. Die Wurzelformen zweiter und dritter Dimension. Ist wie in Nr. 60 $X^{(2)}$ eine ganze homogene Funktion zweiten Grades der φ, deren 8 Nullpunkte paarweise zusammenfallen, also $X^{(2)} = 0$ die Gleichung eines die C_4 in 4 Punkten berührenden Kegelschnitts, so stellt $\sqrt{X^{(2)}}$ eine Wurzelform zweiter Dimension dar und ist als solche einer bestimmten Per. Char. zugeordnet. Es gibt daher den 63 eigentlichen Per. Char. entsprechend 63 verschiedene Systeme von Kegelschnitten, von denen jeder die C_4 in 4 Punkten berührt. Die 8 Berührungspunkte von je 2 zu demselben Systeme gehörigen Kegelschnitten liegen selbst wieder auf einem Kegelschnitt.

In jedem der 63 Systeme berührender Kegelschnitte treten, den 6 Zerlegungen der dem Systeme zugeordneten Per. Char. in je zwei ungerade Th. Char. entsprechend, 6 zerfallende Kegelschnitte auf, von denen jeder aus zwei Doppeltangenten der C_4 besteht. Diese 6 Paare von Doppeltangenten, welche hier in einem Systeme auftreten, bilden eine *Steiner*sche Gruppe und es gibt daher 63 verschiedene *Steiner*sche Gruppen, deren jede durch eine eigentliche Per. Char. charakterisiert ist. Infolgedessen lassen sich die Begriffe azygetisch und syzygetisch (Nr. 23) auf die *Steiner*schen Gruppen übertragen und ebenso die Sätze über die zwei und mehr Gruppen gemeinsamen Th. Char. (Nr. 25). Die 8 Berührungspunkte von zwei derselben *Steiner*schen Gruppe entnommenen Paaren von Doppeltangenten liegen auf einem Kegelschnitte; man erhält so 315 Kegelschnitte, von denen jeder 8 Berührungspunkte von 4 Doppeltangenten ausschneidet.

Nachdem *Kummer* bereits bemerkt hatte, daß sich durch eine allgemeine Kurve 4. Ordnung unendlich viele *Kummer*sche Flächen hindurchlegen lassen, hat *Wirtinger* dieses Verhältnis dahin präzisiert, daß die 63 Systeme von Berührungskegelschnitten, von denen jedes einer eigentlichen Per. Char. (ε) zugehört, ebensoviele *Kummer*sche Flächen definieren, auf denen die Grundkurve 4. Ordnung C_4 liegt. Die 16 singulären Ebenen der *Kummer*schen Fläche schneiden dabei in der Ebene der C_4 16 ihrer Doppeltangenten aus, die sich auf 16 Arten zu je 6 so gruppieren, daß diese 6 jedesmal einen Kegelschnitt umhüllen. Die 12 nicht ausgeschnittenen Doppeltangenten bilden die zu der Per. Char. (ε) gehörige *Steiner*sche Gruppe.[219])

219) Hierzu *Wirtinger*, „Thetaf.“, p. 113; *Ciani*, Ann. di Mat. 2_3 (1897), p. 53, schon vorher Lomb. Ist. Rend. 31_2 (1898), p. 312, vgl. auch *Cayley*, J. f. Math. 94

Ist $X^{(3)}$ eine ganze homogene Funktion dritten Grades der φ, deren 12 Nullpunkte paarweise zusammenfallen, also $X^{(3)} = 0$ die Gleichung einer die C_4 in 6 Punkten berührenden Kurve 3. Ordnung, so stellt $\sqrt{X^{(3)}}$ eine Wurzelform dritter Dimension dar und ist als solche einer bestimmten Th. Char. zugeordnet. Es gibt daher den 64 Th. Char. entsprechend 64 verschiedene Systeme von Kurven 3. Ordnung, von denen jede die Grundkurve in 6 Punkten berührt. Die 12 Berührungspunkte zweier Berührungskurven eines und desselben Systems liegen selbst wieder auf einer Kurve 3. Ordnung.

Die 64 Systeme von Berührungskurven 3. Ordnung zerfallen in 2 Arten; die 28 Systeme von Berührungskurven 1. Art entsprechen den ungeraden Th. Char., die 36 Systeme 2. Art den geraden.

Die den ersteren entsprechenden Wurzelformen $\sqrt{X^{(3)}}$ sind auf Wurzelformen erster Dimension $\sqrt{\varphi}$ reduzierbar. Jedes System 1. Art ist also durch eine Doppeltangente festgelegt und die Gleichung der C_4 kann mit ihrer Hilfe in der Form

$$\varphi X^{(3)} - \Omega^2 = 0 \tag{526}$$

dargestellt werden, wo $\Omega = 0$ ein Kegelschnitt ist, der durch die beiden Berührungspunkte von $\varphi = 0$ hindurchgeht und die C_4 in 6 weiteren Punkten schneidet, eben den 6 Berührungspunkten von $X^{(3)} = 0$ mit der Grundkurve. Es liegen also für jede Berührungskurve 1. Art die 6 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt und dieser Kegelschnitt geht dann immer noch durch die Berührungspunkte der zu der gleichen Charakteristik wie $\sqrt{X^{(3)}}$ gehörigen Doppeltangente, also der nämlichen für alle Kurven des gleichen Systems, hindurch.

Zu den Berührungsformen 2. Art gelangt man folgendermaßen. Sind

$$F_1 \equiv \sum_{i,k} \alpha_{ik}\xi_i\xi_k = 0, \quad F_2 \equiv \sum_{i,k} \beta_{ik}\xi_i\xi_k = 0, \quad F_3 \equiv \sum_{i,k} \gamma_{ik}\xi_i\xi_k = 0, \tag{527}$$

in denen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ homogene Punktkoordinaten des Raumes bezeichnen, die Gleichungen dreier Oberflächen 2. Ordnung und x_1, x_2, x_3 Parameter, so stellt

$$x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3 = 0 \tag{528}$$

ein Flächennetz 2. Ordnung dar, und wenn man

$$\alpha_{ik}x_1 + \beta_{ik}x_2 + \gamma_{ik}x_3 = a_{ik} \tag{529}$$

setzt, so ist

$$|a_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{530}$$

die Bedingung dafür, daß die Fläche des Netzes ein Kegel wird. Die

(1883), p. 270 = Coll. math. pap. 12 (1897), p. 95. Ausführliches über die Berührungskegelschnitte einer C_4 und die einschlägige Literatur in III C 5, Nr. 60—63.

Gleichung (530) ist aber eine Gleichung 4. Grades in den x und stellt also, wenn man diese als homogene Punktkoordinaten der Ebene auffaßt, eine Kurve 4. Ordnung dar. Man kann auf die Weise die allgemeine Kurve 4. Ordnung erhalten.

Rändert man nun in der Gleichung (530) die links stehende Determinante seitlich und unten mit den nämlichen 4 Parametern, so liefert die neue Gleichung eines der 36 zu der erhaltenen C_4 gehörigen Systeme von Berührungskurven 2. Art, von dem aus man dann auch zu den 35 übrigen gelangen kann (III C 5, Nr. 66).

Zugleich ist dadurch die Grundkurve in ein-eindeutige Beziehung zu jener Raumkurve 6. Ordnung gebracht, welche der geometrische Ort der Spitzen aller in dem Flächennetze (528) enthaltenen Kegel oder auch der geometrische Ort jener Punkte des Raumes ist, deren Polarebenen in bezug auf alle Flächen des Netzes sich in einer Geraden schneiden. Man erhält diese Raumkurve 6. Ordnung, wenn man die homogenen Punktkoordinaten des Raumes den Werten von 4 linearunabhängigen zu der das System bestimmenden geraden Th. Char. $[\varepsilon]$ gehörigen Wurzelformen dritter Dimension proportional setzt. Jede der eben genannten Geraden, in denen sich die Polarebenen eines Punktes P_0 der Raumkurve schneiden, ist eine dreifache Sekante dieser und ihre 3 Schnittpunkte entsprechen den 3 Nullpunkten der Funktion $\vartheta[\varepsilon](u(z) - u(z_0))$.[220])

90. Schottky-Frobenius. Während *Riemann* und *Weber* von vorneherein von dem Zusammenhang der *Abel*schen Funktionen dreier Veränderlichen mit der allgemeinen Kurve 4. Ordnung Gebrauch machten, hat *Schottky* jenen Weg eingeschlagen, den *Göpel* und *Rosenhain* im Falle $p = 2$ gegangen waren und der von den Thetafunktionen aus, allein mittels der zwischen ihnen und ihren partiellen Derivierten bestehenden Relationen direkt und ohne vorherige Zuhilfenahme eines algebraischen Gebildes zu den Differentialgleichungen des Umkehrproblems der *Abel*schen Integrale führt. Da die Anzahlen $\frac{1}{2}p(p+1)$ der Thetamodulen und $3p - 3$ der Klassenmodulen des algebraischen Gebildes für $p = 3$ einander gleich, nämlich 6, sind, so stand von dieser Seite der Lösung der Aufgabe kein prinzipielles Hindernis entgegen. Zur Überwindung der technischen Schwierigkeiten aber nahm *Schottky*[221])

220) Dazu *Frobenius*, G. N. 1888, p. 67.

221) Der Gedanke, durch Hinzunahme weiterer algebraischer Gleichungen zu den immer geltenden Thetarelationen deren Argumente zunächst als *Abel*sche Integrale zu erhalten und weiterhin dann die Thetaquotienten für beliebige Werte der Argumente mit Hilfe des Additionstheorems algebraisch darzustellen, rührt von *Weierstraß* her [Berl. Ber. 1869, p. 853 = Math. Werke 2 (1895), p. 45].

zunächst nur eine partikuläre Lösung des gestellten Problems in Angriff, indem er die Veränderlichkeit der 3 Argumente der Thetafunktionen dadurch beschränkte, daß er zu den identischen Relationen zwischen den Thetafunktionen noch eine weitere, für beliebige Argumente nicht bestehende Gleichung hinzunahm, so daß die 3 Argumente nur von 2 Größen abhängen.

Zu dieser Gleichung ist *Schottky* folgendermaßen gelangt.

Zunächst sei bemerkt, daß *Schottky* die Thetafunktionen durch σ-Funktionen ersetzt, welche sich von ihnen um konstante Faktoren unterscheiden[222]), und die 64 verschiedenen σ-Funktionen durch Indizes charakterisiert, welche mit den Th. Char. in dem Zusammenhang stehen, daß die 7 einfachen Indizes $1, 2, \ldots 7$ den 7 ungeraden Th. Char. einer Hauptreihe mit der Summe $[p] = [0]$, die 21 Kombinationen zu zweien also den 21 übrigen ungeraden und die 35 Kombinationen zu dreien den 35 von [0] verschiedenen geraden Th. Char. entsprechen.

Mit Hilfe der zwischen den σ-Funktionen bestehenden algebraischen Relationen kann man die 21 Funktionen

$$\varphi_{\varkappa\lambda} = \sigma_\varkappa \sigma_\lambda \sigma_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots 7; \varkappa < \lambda) \tag{531}$$

durch 6 unter ihnen oder durch 6 andere linearunabhängige Größen ausdrücken. Dies geschieht bei *Schottky* in der Gleichung

$$\varphi_{\varkappa\lambda} = \xi^2 L_{11} + 2\xi\eta L_{12} + 2\xi\zeta L_{13} + \eta^2 L_{22} + 2\eta\zeta L_{23} + \zeta^2 L_{33}. \tag{532}$$

Nimmt man nun zwischen den Größen L die Bedingung

$$\sum \pm L_{11} L_{22} L_{33} = 0 \tag{533}$$

an, so zerfällt $\varphi_{\varkappa\lambda}$ in das Produkt zweier Faktoren

$$\varphi_{\varkappa\lambda} = (\xi x + \eta y + \zeta z)(\xi x' + \eta y' + \zeta z'). \tag{534}$$

Diese Annahme ist die von *Schottky* eingeführte Beschränkung der Argumente u, u', u'' der Thetafunktionen. Da jedes L eine ungerade Thetafunktion 3. Ordnung, ihre Determinante also eine ungerade Thetafunktion 9. Ordnung ist, so sagt die *Schottky*sche Bedingung aus, daß für u, u', u'' nur solche Werte zugelassen werden, für welche eine gewisse ungerade Thetafunktion 9. Ordnung verschwindet. Geleitet wurde aber *Schottky* bei der Einführung seiner Beschränkung der u von der

222) Bezüglich dieser Faktoren sei auf eine spätere Arbeit *Schottkys*, Berl. Ber. 1903, p. 981, sowie auf *Frobenius*, J. f. Math. 105 (1889), p. 39 verwiesen. Es sei hier schon bemerkt, daß diese *Schottky*schen σ-Funktionen weder mit den in Nr. **94** eingeführten *Klein*schen, noch mit den in Nr. **103** erwähnten *Krause*schen identisch sind.

Gleichung (374), nach welcher bei der algebraischen Darstellung des Quotienten zweier ungeraden Thetafunktionen mit den Argumenten $v_\mu(z) - v_\mu(\alpha)$ die rechte Seite in das Produkt zweier Faktoren zerfällt, von denen der eine nur z, der andere nur α enthält. Dementsprechend findet auch *Schottky* in der Tat, daß seine in obiger Weise beschränkten Argumente u, u', u'' sich als Integrale 1. Gattung einer durch eine Gleichung 6. Grades $L = 0$ charakterisierten Klasse algebraischer Funktionen ausdrücken. Setzt man dabei $du : du' : du'' = H : \bar{H} : \bar{\bar{H}}$, so sind die H homogene Formen 3. Grades in x, y, z.

Zu der von *Schottky* auf diese Weise der Theorie der *Abel*schen Funktionen von drei Veränderlichen zugrunde gelegten *Aronhold*schen Kurve 6. Ordnung $L = 0$ ist er später folgendermaßen gelangt.

Es seien 7 Punkte der Ebene $\alpha, \beta, \ldots$ in allgemeiner Lage gegeben, so daß keine 3 auf einer Geraden und keine 6 auf einem Kegelschnitte liegen; dann gibt es eine dreifach unendliche lineare Schar von Kurven 3. Ordnung, welche durch diese 7 Punkte hindurchgehen; diese lassen sich durch 3 linear unabhängige $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ unter ihnen linear zusammensetzen und dabei diese letzteren so wählen, daß für sie identisch $xX + yY + zZ = 0$ ist. Setzt man dann die Funktionaldeterminante der 3 Formen X, Y, Z Null, so erhält man die Gleichung der Kurve 6. Grades $L = 0$.

Auf der Kurve $L = 0$ liegen die Doppelpunkte aller vorher genannten durch die 7 Punkte $\alpha, \beta, \ldots$ gehenden Kurven 3. Ordnung. Unter diesen befinden sich 21 zerfallende $H_{\alpha\beta} = 0$, wobei $H_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$ ist und $F_{\alpha\beta} = 0$ die Gerade durch α und β, $G_{\alpha\beta} = 0$ aber den Kegelschnitt durch die 5 übrigen Grundpunkte darstellt. Die Kurve $L = 0$ geht durch jene beiden Punkte hindurch, in denen Gerade und Kegelschnitt sich schneiden. Es gibt ferner 7 Kurven 3. Ordnung $H_\alpha = 0$ $H_\beta = 0, \ldots$, von denen $H_\alpha = 0$ in α einen Doppelpunkt hat. Die Kurve $L = 0$ geht daher auch die 7 Grundpunkte hindurch; sie hat in jedem dieser Punkte selbst einen Doppelpunkt und ihre beiden Zweige berühren in α die beiden Zweige von $H_\alpha = 0$.

Infolge der Gleichung $L = 0$ besteht nun aber zwischen den 3 Formen X, Y, Z selbst eine Gleichung 4. Grades $M = 0$, die mit $L = 0$ in birationalem Zusammenhange steht und sich damit als gleichfalls vom Geschlecht 3 erweist. Die vorher genannten 28 Gleichungen $H_{\alpha\beta} = 0$ und $H_\alpha = 0$ sind die Gleichungen ihrer 28 Doppeltangenten.

Damit ist *Schottky* gleichfalls zu der allgemeinen Kurve 4. Ordnung gelangt, von der *Riemann* und *Weber* in ihrer Theorie der *Abel*schen Funktionen im Falle $p = 3$ ausgegangen sind.

Frobenius[223]) hat gezeigt, daß die von *Schottky* eingeführte ungerade Thetafunktion 9. Grades das Produkt $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_7$ als Faktor enthält, der andere Faktor φ aber eine gerade Thetafunktion 2. Ordnung ist, deren Entwicklung nach Potenzen von u, u', u'' mit den Gliedern der 4. Dimension beginnt. Diese Funktion φ (die im hyperelliptischen Falle in das Quadrat der gleichzeitig mit den Argumenten verschwindenden geraden Thetafunktion übergeht) ist durch diese Bedingung bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Die Glieder der 4. Dimension, mit denen die Entwicklung von φ beginnt, bilden eine ganze Funktion 4. Grades $F(u, u', u'')$. Werden hier u, u', u'' durch die homogenen Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3 ersetzt, so liefert $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ jene Kurve 4. Ordnung, zu welcher die vorgegebenen Thetafunktionen im *Riemann*schen Sinne gehören.

Eine Anwendung von Thetafunktionen dreier Veränderlichen auf ein Problem der Statik biegsamer, unausdehnbarer Flächen bei *Kötter*[224]).

Weiteres über den Fall $p = 3$ in Nr. **100** u. **101**.

XI. Der Fall $p = 4$.

91. Noether. An dem Falle $p = 4$ hat *Noether*[225]) seine Charakteristikentheorie, die er dann später[226]) auf beliebiges p ausdehnte, zuerst entwickelt und mit ihrer Hilfe das Additionstheorem der Thetaquotienten und die algebraischen Relationen zwischen den 256 Thetafunktionen, sowie speziell jene zwischen den Nullwerten der 136 geraden unter ihnen aufgestellt.

Bei der Lösung dieser Aufgaben geht man von der aus (166) folgenden Formel

$$(535)\quad \left\{ \begin{array}{l} y_{[n\,\alpha_8]} + |\,\omega\,\alpha_0,\ \alpha_8\alpha_9\,|\,y_{[n\,\alpha_9]} \\ \qquad = \sum_{\mu=0}^{7} \left(|\,n\,\alpha_8,\ \omega\,\alpha_\mu\,|\,x_{[\omega\,\alpha_\mu]} + |\,n\,\alpha_8,\ \omega\,\alpha_\mu\alpha_8\alpha_9\,|\,x_{[\omega\,\alpha_\mu\,\alpha_8\,\alpha_9]} \right) \end{array} \right.$$

aus, in der mit $[\alpha_0]$, $[\alpha_1]$, $\ldots$ $[\alpha_9]$ die 10 Th. Char. eines F. S., mit $[n]$ die Summe der ungeraden unter ihnen und mit $[\omega]$ eine beliebige

223) J. f. Math 105 (1889), p. 39.

224) Diss. Halle 1883; J. f. Math. 103 (1888), p. 44.

225) *Noether* wurde [vgl. Math. Ann. 33 (1889), p. 525] auf die Gruppierung der Charakteristiken im Falle $p = 4$ durch algebraische Betrachtungen an speziellen Kurven vom Geschlecht 4 geführt, bei denen eine der 136 geraden Th. Char. ausgezeichnet ist (vgl. dazu den Schluß von Nr. 92), er hat aber seiner Charakteristikentheorie [Math. Ann. 14 (1879), p. 248; vorher Erl. Ber. 10 (1878), p. 87] eine Form gegeben, bei der diese Auszeichnung nicht auftritt.

226) Math. Ann. 16 (1880), p. 270; vorher Erl. Ber. 11 (1879), p. 198 und 12 (1880), p. 1.

Th. Char. bezeichnet, die Größen x, y aber durch die Gleichungen (165) definiert sind. Indem man darin $(w) = (-v)$ setzt, erhält man aus den Gleichungen (535) die Additionstheoreme; setzt man dagegen $(u) = (w) = (0)$, so entsteht, wenn man noch $[\omega] = [n]$ setzt, die Formel

$$x_{[n\alpha_0]} = \sum_{\mu=1}^{9} | n\alpha_0, n\alpha_\mu | x_{[n\alpha_\mu]}, \tag{536}$$

aus welcher die algebraischen Relationen zwischen den 256 Thetafunktionen hervorgehen. Setzt man endlich darin auch $(v) = (0)$, so erhält man die Relationen zwischen den Nullwerten der geraden Thetafunktionen, und zwar lineare Relationen entweder zwischen je 10 Biquadraten von Thetanullwerten oder zwischen je 6 Produkten von zwei Quadraten solcher oder endlich zwischen je 4 Produkten von vier Thetanullwerten mit verschiedenen Charakteristiken je nach der Wahl der Per. Char. (ϱ), (σ).[227])

Wenn man diese Resultate mit denen der Fälle $p = 3$ und $p = 2$ vergleicht, so bemerkt man jene Analogien, welche schon in Nr. **36** erwähnt worden sind und welche insbesondere *Schottky*[228]) näher verfolgt hat.

Ist nämlich c_i der Nullwert einer, p_i der Nullwert eines Produktes von zwei und q_i der Nullwert eines Produktes von vier geraden Thetafunktionen (wobei in letzterem Falle die 4 Th. Char. stets einem syzygetischen Systeme entnommen sind), so bestehen Relationen von den 3 Typen

$$\Sigma \pm c_i^4, \quad \Sigma \pm p_i^2, \quad \Sigma \pm q_i$$

und zwar dreigliedrige[229]) für

	$p = 1,$	$p = 2,$	$p = 3,$
viergliedrige[230]) für	$p = 2,$	$p = 3,$	$p = 4,$
sechsgliedrige[231]) für	$p = 3,$	$p = 4,$	...
	. . .	. . .	. . .

Auch bei den Relationen zwischen Thetafunktionen mit veränderlichen Argumenten kann man solche Analogien in verschiedenen Formen nachweisen.

227) Über Relationen zwischen Thetafunktionen von vier Argumenten auch bei *Craig*, Amer. J. 6 (1884), p. 14, 183 und 205.

228) Acta math. 27 (1903), p. 235.

229) *Jacobi*, Ges. W. 1 (1881), p. 511 Gl. (E); *Göpel*, Gl. (25)—(28), *Rosenhain*, Gl. (90), *Krazer*, „$p = 2$“, p. 36 u. 41; *Weber*, „$p = 3$“, p. 44.

230) *Göpel*, Gl. (23), (24); *Rosenhain*, Gl. (89); *Krazer*, p. 34 u. 41; *Weber*, p. 40; *Noether*, Math. Ann. 14 (1879), p. 291.

231) *Weber*, p. 40; *Noether*, p. 290.

92. Schottky. Da die Gleichung, welche zur Definition einer Klasse algebraischer Funktionen vom Geschlecht 4 dient, nur 9 wesentliche Konstanten enthält, die Anzahl der Modulen der vierfach unendlichen Thetareihe aber 10 beträgt, so sind diese, wie schon in Nr. **46** erwähnt wurde, bei denjenigen Thetafunktionen, welche bei der Umkehrung der Integrale algebraischer Funktionen vom Geschlecht 4 auftreten, oder, wie wir kurz sagen, bei den „*Riemann*schen Thetafunktionen" von vier Veränderlichen, nicht unabhängig voneinander, sondern durch eine Relation verknüpft; diese Relation hat *Schottky*[232]) aufgestellt; er ist dazu auf folgende Weise gelangt.

Für die *Riemann*schen Thetafunktionen wird der Quotient zweier ungerader Thetafunktionen mit den Argumenten $v_\mu(\beta) - v_\mu(\alpha)$ gemäß (374) eine symmetrische und zerfallende Funktion der beiden Grenzen α und β. Nun gibt es in der Theorie der allgemeinen Thetafunktionen von 4 Veränderlichen ein System von homogenen quadratischen Gleichungen, welches nur ungerade Thetafunktionen enthält. Diesen dadurch zu genügen, daß man jede vorkommende ungerade Thetafunktion durch einen Ausdruck von der Form $\sqrt{\varphi(\alpha)} \cdot \sqrt{\varphi(\beta)}$ ersetzt, ist nur dann möglich, wenn zwischen den Nullwerten der geraden Thetafunktionen eine im allgemeinen Falle nicht bestehende Gleichung angenommen wird. Es gibt nämlich im Falle $p = 4$ in dem zu einer syzygetischen Gruppe vom Range 3 gehörigen Komplexe von Systemen von Th. Char. immer 3 Systeme, die aus 8 geraden Th. Char. gebildet sind (Nr. **29**). Bezeichnet man mit r_1, r_2, r_3 die Nullwerte der 3 zugehörigen Produkte von je 8 geraden Thetafunktionen, so hat auch für allgemeine Modulen der Ausdruck

$$J = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 2r_1r_2 - 2r_2r_3 - 2r_3r_1 \tag{537}$$

für jede syzygetische Gruppe, von der man ausgehen mag, den nämlichen Wert. Den Wert Null aber nimmt diese Invariante nur dann an, wenn die Thetafunktionen *Riemann*sche sind, und es ist also eine Gleichung von der Form

$$\sum_{i=1}^{3} \pm \sqrt{r_i} = 0 \tag{538}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür.

Den $(2^3 - 1)(2^2 - 1)(2^4 - 1) = 240\,975$ verschiedenen syzygetischen Gruppen vom Range 3 entsprechend existieren ebenso viele verschiedene Gleichungen (538), die aber nur eine Beziehung zwischen

232) J. f. Math. 102 (1888), p. 304; siehe auch *Poincaré,* Paris C. R. 120 (1895), p. 242; J. de Math. 1_5 (1895), p. 292; S. M. F. Bull. 29 (1901), p. 61 u. Acta math. 26 (1902), p. 94.

den 10 Thetamodulen darstellen, so daß eine einzige von ihnen mit Notwendigkeit alle anderen nach sich zieht.

Daß die Relation (538), die doch nur für *Riemann*sche Thetafunktionen gilt, sich der oben angeschriebenen Reihe der für allgemeine Modulen in den Fällen $p = 1$, $p = 2$ und $p = 3$ geltenden dreigliedrigen Gleichungen anfügt, läßt erkennen, daß für die darin zum Ausdruck gebrachte Analogie noch eine andere Quelle als die in Nr. **36** aufgezeigte existieren muß; vgl. dazu Nr. **124**.

Daß man die allgemeinen Thetafunktionen von 4 Veränderlichen mit algebraischen Gebilden höheren Geschlechts in Verbindung setzen kann, ist schon in Nr. **34** angegeben worden. Wie später (Nr. **119**) gezeigt werden wird, gestaltet sich diese Beziehung so, daß die zu einem speziellen algebraischen Gebilde von einem Geschlechte $q > 4$ gehörigen *Riemann*schen Thetafunktionen nach einer Transformation höheren Grades in solche von 4 und von $q - 4$ Veränderlichen zerfallen, derart daß die ersteren allgemeine Thetafunktionen sind. Dies ist unter der Annahme $q = 7$ von *Jung*[233]) durchgeführt worden (hierüber und über das folgende vgl. Nr. **123**).

Von der gleichen Allgemeinheit wie die *Riemann*schen Thetafunktionen, d. h. von 9 Parametern abhängig sind die von *Jung*[234]) betrachteten Thetafunktionen von 4 Veränderlichen, die in der oben geschilderten Weise aus einem algebraischen Gebilde vom Geschlechte $q = 6$ abgeleitet werden und, wie die *Riemann*schen, durch eine zwischen den Nullwerten der geraden Thetafunktionen bestehende Relation 8. Grades charakterisiert werden können.

Von 8 Parametern hängen die elliptisch-hyperelliptischen Funktionen *Schottkys*[235]) ab, die aus einem algebraischen Gebilde vom Geschlechte $q = 5$ abgeleitet sind und bei denen für $(v) = (0)$ zwei der geraden Thetafunktionen verschwinden.

Die gleiche Allgemeinheit besitzen die zuerst von *Weber*[236]) erwähnten speziellen *Riemann*schen Thetafunktionen von 4 Veränderlichen, bei denen eine der geraden Funktionen gleichzeitig mit den Argumenten verschwindet. Die Normalkurve der φ, welche im Falle $p = 4$ eine Raumkurve 6. Ordnung ist, liegt in diesem Falle auf einem Kegel und die Tangentialebenen dieses Kegels liefern die zu der ausgezeichneten geraden Th. Char. gehörige einfach unendliche Schar *Abel*scher Funktionen, die hier neben den 120 einzelnen, den

233) Berl. Ber. 1905, p. 484.
234) J. f. Math. 130 (1905), p. 1.
235) J. f. Math. 108 (1891), p. 147 u. 193.
236) Math. Ann. 13 (1878), p. 47; auch *Kraus*, Math. Ann. 16 (1880), p. 254.

ungeraden Th. Char. entsprechenden existieren. Auf die nämlichen Funktionen stützte sich *Noether* (s. Anm. 225) bei Begründung seiner Charakteristikentheorie für $p = 4$; er ging dabei aus von einer auf die einfache Ebene rational eindeutig abbildbaren Doppelebene (vgl. auch Nr. **111**) mit einer Übergangskurve 6. Ordnung $\Omega = 0$, welche zwei unendlich benachbarte dreifache Punkte besitzt und infolgedessen vom Geschlecht 4 ist. Endlich hat auch *Schottky*[237]) für den vorliegenden Fall die Beziehungen zwischen den 256 Thetafunktionen und ihre algebraische Darstellung eingehend untersucht; er ist dabei auf eine ebene Kurve 9. Ordnung (*Bertini*sche Kurve) geführt worden, zu der die obengenannte Raumkurve 6. Ordnung in der gleichen Beziehung steht, wie im Falle $p = 3$ die ebene Kurve 4. Ordnung zu der von *Schottky* seiner Theorie zugrunde gelegten Kurve 6. Ordnung. Verschwindet bei diesen Thetafunktionen noch eine zweite der geraden gleichzeitig mit den Argumenten, so werden sie, wie *Weber* gezeigt hat, zu den von 7 Parametern abhängigen hyperelliptischen.

Vom Geschlechte $p = 4$ ist endlich das binomische algebraische Gebilde $s^3 = f_6(z)$, dessen Zweiteilungsproblem (vgl. dazu auch Nr. **110**) *Osgood*[238]) mit Hilfe der Charakteristikentheorie auf seine gruppentheoretischen Eigenschaften untersucht hat. Da auch hier eine der geraden Thetafunktionen gleichzeitig mit den Argumenten verschwindet, so gibt es wieder dieser entsprechend eine einfach unendliche Schar von *Abel*schen Funktionen, während die den 120 ungeraden Th. Char. entsprechenden sich in 40 Zyklen von je 3 anordnen.

XII. Kleins Sigmafunktionen.

93. Vorbemerkung. Die Durchführung der in Kap. VII mitgeteilten Lösungen des *Jacobi*schen Umkehrproblems verlangt in erster Linie die Bildung der Thetafunktionen, also die Ermittlung der zur Klasse gehörigen p *Riemann*schen Normalintegrale v_μ und ihrer Periodizitätsmodulen $a_{\mu\nu}$[239]). Abgesehen davon, daß diese Elemente der ursprünglichen Formulierung des Umkehrproblems fremd sind, hängen sie von der Wahl des Querschnittsystems ab und ändern sich mit dieser, d. h. bei jeder linearen Transformation der Perioden.

Aber weiter wird noch die Bildung gewisser Berührungsformen und deren Zuordnung zu den 2^{2p} verschiedenen Funktionen $\vartheta[\varepsilon](v)$

237) J. f. Math. 103 (1888), p. 185; Berl. Ber. 1920, p. 21; auch J. f. Math. 146 (1916), p. 139.

238) Diss. Erlangen 1890.

239) Vgl. darüber *Stahl*, Diss. Berlin 1882, „A. F." § 33.

verlangt; auch diese Aufgaben sind in dem Umkehrproblem selbst nicht enthalten. Was sie verlangen, erkennt man am klarsten im hyperelliptischen Falle, wo die 2^{2p} verschiedenen Thetafunktionen den Zerlegungen der gegebenen binären Form f_{2p+2} in zwei Faktoren entsprechen, die Bildung der zugehörigen Wurzelformen also letzten Endes die Kenntnis der Verzweigungspunkte voraussetzt.

Es entsteht daher naturgemäß die Aufgabe, zu untersuchen, inwieweit die Lösung des Umkehrproblems möglich ist, ohne daß die Erledigung der hier genannten Aufgaben vorangehen muß. Es zeigt nun vorab die *Weierstraß*sche Theorie der elliptischen Funktionen, daß man die Einführung der *Riemann*schen Normalintegrale, also die Annahme einer bestimmten Zerschneidung der *Riemann*schen Fläche dadurch umgehen kann, daß man statt der ϑ-Funktionen die *Al*- oder σ-Funktionen benutzt, deren Argument u das nicht normierte Integral 1. Gattung ist, und man wird dabei noch bemerken, daß die σ-Funktionen sich vor den *Al*-Funktionen, von denen sie sich um den Faktor $e^{\frac{1}{6}(1+k^2)u^2}$ unterscheiden[240]), dadurch auszeichnen, daß sie sich bei linearer Transformation der Perioden ohne Hinzutritt von Faktoren permutieren.

In der gleichen Weise enthalten die *Weierstraß*schen hyperelliptischen *Al*-Funktionen (Nr. 7) als Argumente $u_1, \ldots u_p$ die im Umkehrproblem (15) selbst auftretenden Integrale 1. Gattung. Diese setzen gewisse Zerspaltungen der Grundform $R(x)$ voraus; das gleiche gilt daher auch von den *Al*-Funktionen selbst. Es wird sich nun darum handeln, einmal an Stelle des Systems der 2^{2p}, den sämtlichen möglichen Zerlegungen der Grundform in zwei Faktoren entsprechenden ϑ-Funktionen ein System von ebenso vielen *Al*-Funktionen zu definieren, sodann aber diese gleichzeitig so mit Faktoren zu multiplizieren, daß sie sich bei linearer Transformation der Perioden ohne Hinzutritt von Faktoren permutieren. Diese Forderungen werden von den in Nr. **94** aufgestellten *Klein*schen σ-Funktionen erfüllt.

Die Frage nach dem Rationalitätsbereich der Entwicklungskoeffizienten der *Al*-Funktionen ist bei *Weierstraß* dahin zu beantworten, daß diese Koeffizienten sich rational aus den Verzweigungspunkten (genauer gesagt, aus einem Teile dieser und den symmetrischen Funktionen der übrigen) zusammensetzen. *Klein* zeigt, daß seine σ-Funktionen das Minimum der jeweils erforderlichen Irrationalitäten enthalten, indem in ihren Reihenentwicklungen im hyperelliptischen Falle lediglich die Koeffizienten der Formen φ und ψ, in welche die Grund-

240) *Fricke*, Ellipt. Funktionen 1 (1916), p. 401.

form jedesmal zerlegt ist, im allgemeinen Falle $p = 3$ (Nr. **100**) die Koeffizienten der die einzelne σ-Funktion bestimmenden Berührungsform 3. Dimension auftreten, und *Klein* charakterisiert diese Reihenentwicklungen noch genauer dadurch, daß sie die einzigen sind, welche nach ganzen rationalen Kovarianten der eben genannten Formen fortschreiten.

Der Umstand, daß bei linearer Transformation der Perioden die g_p geraden und ebenso die u_p ungeraden σ-Funktionen jeweils unter sich permutiert werden, bringt es mit sich, daß im Falle $p = 1$ die einzige ungerade σ-Funktion bei jeder linearen Transformation der Perioden in sich übergeht. Diese Ausnahmerolle der ungeraden den drei geraden σ-Funktionen gegenüber tritt darin in die Erscheinung, daß ihre Entwicklungskoeffizienten sich ausschließlich aus den Größen g_2 und g_3 rational zusammensetzen, während die drei geraden σ außerdem noch die einzelnen Verzweigungspunkte e_1, e_2, e_3 enthalten, wobei man noch bemerken wird, daß g_2, g_3 nicht nur bei jeder linearen Transformation der Perioden ungeändert bleiben, sondern zugleich auch die Invarianten der das elliptische Gebilde definierenden Binärform sind. Es wird sich nun darum handeln, auch im Falle $p > 1$ solche Funktionen zu bilden, welche bei allen linearen Transformationen der Perioden ungeändert bleiben und deren Entwicklungskoeffizienten dementsprechend sich rational ausschließlich aus den Koeffizienten der das algebraische Gebilde definierenden Gleichung zusammensetzen, und es wird anzustreben sein, das Umkehrproblem unter alleiniger Anwendung solcher Funktionen zu lösen. Funktionen der verlangten Art sind die in Nr. **95** eingeführten Funktionen 1. Stufe Σ und eine Lösung des Umkehrproblems von der gewünschten Weise ist die *Wirtinger*sche der Nr. **101**.

94. Hyperelliptische σ-Funktionen. *Klein* hat erstmals 1886[241]) auf die Aufgabe hingewiesen, die neueren Fortschritte, welche die Theorie der elliptischen Funktionen in der *Weierstraß*schen Behandlungsweise gemacht hat, auf hyperelliptische und *Abel*sche Funktionen zu übertragen.

Einen solchen Fortschritt sah *Klein* zunächst in dem einfacheren Verhalten der σ-Funktionen im Vergleich mit den Thetafunktionen bei linearer Transformation der Perioden und er stellte daher, sich zunächst auf den Fall $p = 2$ beschränkend, die Aufgabe, die ϑ-Funktionen so mit einem Faktor zu multiplizieren, daß die neuen Funktionen

241) Math. Ann. 27 (1886), p. 431, vgl. auch *Krazer,* Math. Ann. 33 (1889), p. 591; zum folgenden auch *Klein,* Evanston Colloquium 1893.

sich bei linearer Transformation der Perioden ohne Zutritt irgendwelcher Faktoren permutieren. Diese Forderung erweist sich in einfachster Weise erfüllt, wenn man

$$(539)\qquad \sigma(v_1, v_2) = e^{-\frac{1}{20}\left(\sum_1^{10}\frac{\vartheta_{11}}{\vartheta}v_1^2 + 2\sum_1^{10}\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta}v_1 v_2 + \sum_1^{10}\frac{\vartheta_{22}}{\vartheta}v_2^2\right)}\frac{\vartheta(v_1 v_2)}{C}$$

setzt[242]); dabei sind die Summen $\sum_1^{10}$ über die 10 geraden Thetafunktionen zu erstrecken, ϑ bezeichnet den Wert von $\vartheta(v_1, v_2)$, ϑ_μ den Wert von $\frac{\partial\vartheta(v_1, v_2)}{\partial v_\mu}$ und $\vartheta_{\mu\nu}$ den Wert von $\frac{\partial^2\vartheta(v_1, v_2)}{\partial v_\mu \partial v_\nu}$ für $v_1 = v_2 = 0$; endlich ist C eine Konstante, für welche im Falle einer geraden Thetafunktion deren Nullwert ϑ, im Falle einer ungeraden $\frac{1}{p_1}\vartheta_1$ oder $\frac{1}{p_2}\vartheta_2$ gesetzt wird, wobei die Größen p_1, p_2 zur Verfügung bleiben, um die Koeffizienten der Anfangsglieder in der Entwicklung von $\sigma(v_1, v_2)$ nach Potenzen der v festzulegen.

Das weitere Ziel *Kleins* war, die σ-Funktionen unabhängig von den Thetafunktionen zu definieren; er erkannte im Verlaufe seiner Untersuchungen gerade umgekehrt in den σ-Funktionen den natürlichen Durchgangspunkt, um von dem algebraischen Gebilde zu den Thetafunktionen zu gelangen. Indem er gleichzeitig seine Untersuchungen auf hyperelliptische Funktionen beliebigen Geschlechts ausdehnte, erhielt er folgende Resultate[243]):

Man wähle als p Integrale 1. Gattung

$$(540)\qquad u_1 = \int\frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}},\quad u_2 = \int\frac{z_1^{p-2}z_2(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}},\quad \ldots u_p = \int\frac{z_2^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}$$

und bezeichne die Periodizitätsmodulen von u_μ an den Querschnitten a_ν, b_ν mit $\omega_{\mu\nu}$, $\omega_{\mu, p+\nu}$. Man definiere weiter, indem man in der Bezeichnungsweise der Invariantentheorie $f(z) = a_z^{2p+2}$ setzt, das Integral 3. Gattung durch die Gleichung

$$(541)\qquad Q_{xy}^{x'y'} = Q_{x'y'}^{xy} = \int_y^x\int_{y'}^{x'}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}\cdot\frac{(z'\,dz')}{\sqrt{f(z')}}\cdot\frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + a_z^{p+1}a_{z'}^{p+1}}{2(zz')^2}$$

242) Man wird auf diesen Ansatz auch geführt, wenn man verlangt, daß in der Entwicklung des Produkts der 10 geraden Thetafunktionen nach Potenzen der Variablen die Glieder zweiter Dimension sich wegheben. Daß diese *Klein*schen Sigmafunktionen weder mit den von *Schottky* (Nr. 90) noch mit den von *Krause* (Nr. 103) so bezeichneten Funktionen identisch sind, ist schon in Anm. 222 bemerkt worden.

243) Gött. N. 1887, p. 515, Math. Ann. 32 (1888), p. 351; die ausführlichen Beweise bei *Burkhardt*, ebenda p. 381.

und leite die p Integrale 2. Gattung aus

$$Z^{(t)} = \int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \cdot \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(t)} + a_z^{p+1} a_t^{p+1}}{2(zt)^2} \tag{542}$$

in der Form

$$Z_1^{(t)} = \frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1} Z^{(t)}}{\partial t_1^{p-1}}, \qquad Z_2^{(t)} = \frac{(p-1)_1}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1} Z^{(t)}}{\partial t_1^{p-2}\,\partial t_2}, \quad \ldots \tag{543}$$

ab; diese Integrale Z werden dann alle an der Stelle t ∞^p und ihre Periodizitätsmodulen $-\eta_{1\alpha}, \ldots -\eta_{p\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots p)$ sind von der Wahl des Punktes t unabhängig.[244]) Man bilde weiter den Primausdruck[245])

$$\Omega(x, y) = \frac{(xy)}{\sqrt[4]{f(x) f(y)}} e^{\frac{1}{2} Q_{x\,y}^{\bar{x}\,\bar{y}}}, \tag{544}$$

wo $\bar{x}, \bar{y}$ die mit x, y verbundenen (Nr. 74) Punkte der Fläche bezeichnen, und setze aus solchen den „transzendenten Zusatzfaktor“

$$M = \frac{\prod\limits_{i}\prod\limits_{k} \Omega(x^{(i)}, y^{(k)})}{\prod\limits_{i}\prod\limits_{k}(x^{(i)} y^{(k)}) \prod\limits_{i}\prod\limits_{k}{}' \Omega(x^{(i)}, x^{(k)}) \prod\limits_{i}\prod\limits_{k}{}' \Omega(y^{(i)}, y^{(k)})} \tag{545}$$

zusammen, wobei der Akzent am Produktzeichen andeuten soll, daß die Glieder mit $i = k$ auszulassen sind. Bezeichnet man dann endlich mit $w_1, w_2, \ldots w_p$ die Integralsummen

$$w_\mu = \int_{y'}^{x'} du_\mu + \int_{y''}^{x''} du_\mu + \cdots + \int_{y^{(n)}}^{x^{(n)}} du_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{546}$$

indem man die Zahl n einstweilen beliebig läßt, so erhält man den 2^{2p} Zerlegungen

$$f_{2p+2} = \varphi_{p+1-2m}\,\psi_{p+1+2m} \tag{547}$$

entsprechend ebensoviele σ-Funktionen durch die Gleichung

$$\sigma_{\varphi,\psi}(w_1, \ldots w_p) = \frac{(-1)^{mn+\frac{1}{2}m(m+1)}}{2^{n-m}} M \cdot D_{\varphi\psi} \tag{548}$$

definiert, wo $D_{\varphi\psi}$ die $2n$-reihige Determinante

$$D_{\varphi\psi} = \begin{vmatrix} \ldots x_1^{n+m-\varkappa} x_2^{\varkappa} \sqrt{\varphi(x)} \ldots & x_1^{n-m-\lambda} x_2^{\lambda} \sqrt{\psi(x)} \ldots \\ \ldots -y_1^{n+m-\varkappa} y_2^{\varkappa} \sqrt{\varphi(y)} \ldots & y_1^{n-m-\lambda} y_2^{\lambda} \sqrt{\psi(y)} \ldots \end{vmatrix} \tag{549}$$

bezeichnet, deren $2n$ Vertikalreihen aus den beiden angeschriebenen erhalten werden, wenn man für $\varkappa$ der Reihe nach die Zahlen 0, 1, $\ldots n + m - 1$ und für λ der Reihe nach die Zahlen 0, 1, $\ldots n - m - 1$ treten läßt, während die $2n$ Horizontalreihen aus den beiden ange-

244) Eine spätere, allgemeinere Form der Integrale 2. Gattung in II B 2, Nr. 33.

245) Wie die allgemeine Primform (397) im hyperelliptischen Falle zu dem Ausdrucke (544) führt, zeigt *Klein,* Math. Ann. 36 (1890), p. 17 u. f.

schriebenen entstehen, wenn man x, y der Reihe nach durch x', y'; x'', y''; $\ldots$ $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ ersetzt. Dabei muß $n > m$ sein, doch kann man den Fall $n = m$ mit einschließen, indem man dann unter $D_{\varphi\psi}$ den Ausdruck

$$(550)\quad D_{\varphi\psi} = (-1)^n \begin{vmatrix} x_1^{2n-1} & x_1^{2n-2}x_2 & \ldots & x_2^{2n-1} \\ y_1^{2n-1} & y_1^{2n-2}y_2 & \ldots & y_2^{2n-1} \end{vmatrix} \Pi\sqrt{\varphi(x^{(i)})}\sqrt{\psi(y^{(i)})}$$

versteht.

Wenn man σ-Funktionen für $n < m$ dadurch definiert, daß man bei den einem größeren n entsprechenden die beiden Grenzen y und x von einem Teile der Integrale zusammenfallen läßt, so sind diese Funktionen bei beliebigen Werten der übrigen x, y stets $(m-n)$-fach Null. Insbesondere verschwinden dann für $w_1 = \cdots = w_p = 0$ alle σ-Funktionen, bei denen $m > 0$ ist.

Die durch (548) definierten σ-Funktionen sind einwertige und ganze Funktionen der Integralsummen w. Bei Überschreitung der Querschnitte a_ν, b_ν erlangen sie durch die Vorzeichen unterschiedene Exponentialfaktoren

$$(551)\quad (-1)^{g_\nu} \cdot e^{\sum_\mu \eta_{\mu\nu}\left(w_\mu + \frac{\omega_{\mu\nu}}{2}\right)}, \qquad (-1)^{h_\nu} \cdot e^{\sum_\mu \eta_{\mu,p+\nu}\left(w_\mu + \frac{\omega_{\mu,p+\nu}}{2}\right)},$$

bei denen ein g bzw. $h = 0$ oder 1 zu nehmen ist, je nachdem sich die beiden vom betreffenden Integrationsweg umschlossenen Verzweigungspunkte auf φ und ψ verteilen oder nicht. Die Funktion $\sigma_{\varphi\psi}$ ist eine gerade oder ungerade Funktion der w, je nachdem m gerade oder ungerade ist; ihre Entwicklung nach Potenzen der w hat die Form

$$(552)\quad \sigma_{\varphi_{p+1-2m}\psi_{p+1+2m}} = (w)_m + (w)_{m+2} + \cdots + (w)_{m+2\varrho} + \cdots,$$

wo $(w)_{m+2\varrho}$ eine ganze homogene Funktion $m + 2\varrho^{\text{ten}}$ Grades der w ist, deren Koeffizienten rationale ganze Funktionen der Koeffizienten von φ vom $m + \varrho^{\text{ten}}$ und ψ vom ϱ^{ten} Grade mit rationalen Zahlenkoeffizienten sind, von der Art, daß sich $(w)_{m+2\varrho}$ aus ganzen rationalen Kovarianten der Formen φ und ψ, in denen die Variablen durch $w_1, \ldots w_p$ ersetzt sind, zusammensetzen läßt.

Daß die so erhaltenen σ-Funktionen in der Tat die Verallgemeinerungen der 4 *Weierstraß*schen elliptischen σ-Funktionen sind, hat *Klein*[246]) des Näheren ausgeführt und auch dargetan, daß sowohl bei der ursprünglichen Definition die Wahl des den ϑ-Funktionen beigefügten Faktors, als bei der neuen die Wahl des zugrunde gelegten Integrals 3. Gattung dadurch charakterisiert ist, daß die erhaltenen

246) Math. Ann. 27 (1886), p. 455; vgl. dazu *Bolza*, Amer. M. S. Trans. 1 (1900), p. 53.

σ-Funktionen die einzigen sind, deren Reihenentwicklungen nicht nur nach rationalen, sondern auch nach ganzen Kovarianten der Formen φ und ψ fortschreiten.

Von den σ-Funktionen gelangt man nun zunächst durch die Gleichung

$$(553) \qquad Th(w_1, \ldots w_p) = \sqrt[8]{\Delta_\varphi \cdot \Delta_\psi}\, \sigma(w_1, \ldots w_p),$$

in der Δ_φ, Δ_ψ die Diskriminanten von φ und ψ bezeichnen, zu den von *Wiltheiß*[247]) zuerst eingeführten *Th*-Funktionen und sodann von diesen zu den ϑ-Funktionen durch die Gleichung

$$(554) \qquad \vartheta_{[\substack{g\\h}]}(v, \tau) = c \sqrt{\frac{\Sigma \pm \omega_{11}\omega_{22}\cdots\omega_{pp}}{(2i\pi)^p}}\, e^{G(w_1, \ldots w_p)}\, Th(w_1, \cdots w_p),$$

wo die Argumente v und die Modulen τ in bekannter Weise aus den w und ω berechnet werden, wo ferner c einen rationalen Zahlenfaktor bedeutet und

$$(555) \qquad G(w_1, \cdots w_p) = \frac{1}{2\Sigma \pm \omega_{11}\omega_{22}\cdots\omega_{pp}} \begin{vmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1p} & w_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{1p} & \cdots & \omega_{pp} & w_p \\ \sum_i \eta_{i1} w_i & \cdots & \sum_i \eta_{ip} w_i & 0 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist.[248])

Bolza[249]) hat durch die Gleichungen

$$(556) \qquad \begin{aligned} \zeta_{\varphi\psi}(w_1, \cdots w_p;\, t) &= \sum_\alpha \frac{\partial \log \sigma_{\varphi\psi}(w_1, \cdots w_p)}{\partial w_\alpha}\, g_\alpha(t), \\ \wp_{\varphi\psi}(w_1, \cdots w_p;\, s, t) &= -\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial \log \sigma_{\varphi\psi}(w_1, \cdots w_p)}{\partial w_\alpha \partial w_\beta}\, g_\alpha(s)\, g_\beta(t), \end{aligned}$$

in denen die g ganze rationale Funktionen $p - 1^{\text{ten}}$ Grades bezeichnen, zu den erhaltenen σ-Funktionen ζ- und $\wp$-Funktionen definiert und deren Verwendung zur Lösung des Umkehrproblems gezeigt.

95. Funktionen 1. Stufe. Ein fortgesetzter Vergleich mit der Theorie der elliptischen Funktionen führte aber *Klein* noch weiter. Er sah die Normalform für diese Theorie nicht in jener, welche sich auf die Nebeneinanderstellung der 4 σ-Funktionen stützt, sondern in der anderen, welche konsequent mit $\wp u$, $\wp' u$ und σu operiert. Auch hier liegt das entscheidende Moment in dem Verhalten der Funktionen bei linearer Transformation der Perioden. Während nämlich die drei zuletzt genannten Funktionen bei jeder ganzzahligen linearen Transformation ungeändert bleiben, ist dies bei den drei übrigen σ-Funktionen

247) Math. Ann. 29 (1887), p. 272.

248) Zu dem vorstehenden auch *Schröder*, Diss. Göttingen 1890, Hamburg Math. Ges. Festschr. 1890, p. 162 und Mitt. 3 (1891/1900), p. 73.

249) Gött. N. 1894, p. 268; Amer. J. 17 (1895), p. 11.

nur für solche Transformationen der Fall, welche der identischen J nach dem Modul 2 kongruent sind. In diesem Sinne nennt man die ersteren Funktionen der 1. Stufe, die 3 geraden Sigmafunktionen aber solche der 2. Stufe.

Diesen Stufenbegriff hat nun *Klein* auch in der Theorie der hyperelliptischen Funktionen, sich wieder auf den Fall $p = 2$ beschränkend, eingeführt.[250])

Betrachtet man die rationalen symmetrischen Verbindungen der durch die Gleichungen

$$w_\mu = \int_{\sqrt{f(x)}}^{x'} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{\sqrt{f(x)}}^{x''} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{\sqrt{f(x)}} \qquad (\mu = 1, 2) \tag{557}$$

gegebenen Werten w_1, w_2 zugeordneten beiden Stellen x', x'' der zu $y^2 = f(x)$ gehörigen *Riemann*schen Fläche nicht nur als Funktionen dieser Integralwerte, sondern gleichzeitig auch als abhängig von den Periodizitätsmodulen $\omega_{\mu\alpha}\left(\substack{\mu=1,2\\ \alpha=1,2,3,4}\right)$ der Integrale, so besitzen sie die Eigenschaft ungeändert zu bleiben bei jeder Substitution von der Form

$$\begin{aligned}
w'_\mu &= w_\mu + h_1\omega_{\mu 1} + h_2\omega_{\mu 2} + h_3\omega_{\mu 3} + h_4\omega_{\mu 4},\\
\omega'_{\mu 1} &= c_{11}\omega_{\mu 1} + c_{12}\omega_{\mu 2} + c_{13}\omega_{\mu 3} + c_{14}\omega_{\mu 4},\\
\omega'_{\mu 2} &= c_{21}\omega_{\mu 1} + c_{22}\omega_{\mu 2} + c_{23}\omega_{\mu 3} + c_{24}\omega_{\mu 4}, \quad (\mu = 1,2),\\
\omega'_{\mu 3} &= c_{31}\omega_{\mu 1} + c_{32}\omega_{\mu 2} + c_{33}\omega_{\mu 3} + c_{34}\omega_{\mu 4},\\
\omega'_{\mu 4} &= c_{41}\omega_{\mu 1} + c_{42}\omega_{\mu 2} + c_{43}\omega_{\mu 3} + c_{44}\omega_{\mu 4},
\end{aligned} \tag{558}$$

in welcher die h und die c ganze Zahlen bezeichnen, von denen die letzteren den Bedingungen für Transformationszahlen (40) genügen müssen.

Die Substitutionen (558) bilden eine Gruppe, welche die Hauptgruppe genannt wird. Sind $c_{11} \equiv c_{22} \equiv c_{33} \equiv c_{44} \equiv 1$, alle anderen Zahlen c sowie die 4 Zahlen h alle $\equiv 0 \pmod{n}$, wo n irgendeine positive ganze Zahl bezeichnet, so heißt die Substitution (558) der Identität kongruent nach dem Modul n. Diese Substitutionen bilden für sich eine Gruppe, die Prinzipaluntergruppe n^{ter} Stufe. Man nennt nun hyperelliptische Funktionen n^{ter} Stufe jene einwertigen Funktionen der w und ω, welche bei allen Substitutionen der Prinzipaluntergruppe n^{ter} Stufe ungeändert bleiben, wobei man noch solche Funktionen als adjungierte zu bezeichnen pflegt, welche bei diesen Substitutionen nur Einheitswurzeln als Faktoren erlangen.

Im Falle $n = 1$ ist die Prinzipaluntergruppe die Hauptgruppe selbst und die hyperelliptischen Funktionen 1. Stufe sind die vorher-

250) *Burkhardt*, Math. Ann. 35 (1890), p. 198; dazu *Pascal*, Ann. di Mat. 18_2 (1890), p. 131 u. 227; 19_2 (1891/2), p. 159.

genannten rationalen symmetrischen Verbindungen der x', x'', wobei man als Konstanten (Modulfunktionen 1. Stufe) die Koeffizienten der Form f_6 zuläßt.

Die hyperelliptischen Funktionen 1. Stufe lassen sich durch die 4

$$X_1 = x' + x'', \quad X_2 = x'x'', \tag{559}$$
$$X_3 = \sqrt{f(x')}\sqrt{f(x'')}, \quad X_4 = \sqrt{f(x')} + \sqrt{f(x'')}$$

rational zusammensetzen, welche selbst durch Relationen von der Gestalt

$$X_3^2 = G_6(X_1, X_2), \quad X_4^2 = G_6'(X_1, X_2) + 2X_3 \tag{560}$$

miteinander verknüpft sind, wo G_6, G_6' ganze rationale Funktionen 6. Grades bezeichnen.

Bei Einführung homogener Variablen kann man das volle Formensystem 1. Stufe durch die folgenden 8 Formen darstellen

$$X_1 = x_1' x_1'', \quad X_2 = x_1' x_2'' + x_2' x_1'', \quad X_3 = x_2' x_2'', \tag{561}$$
$$X_4 = \sqrt{f(x_1', x_2')}\sqrt{f(x_1'', x_2'')}$$

und 4 Formen Y_α, welche unter Einführung eines Hilfspunktes t zu der einen

$$Y_t = (x't)^3\sqrt{f(x_1'', x_2'')} + (x''t)^3\sqrt{f(x_1' x_2')} \tag{562}$$

zusammengezogen werden können.

Aus diesen hyperelliptischen Formen 1. Stufe leitet *Klein* die hyperelliptischen Σ-Funktionen 1. Stufe in der Weise ab, daß er zunächst die Formen X durch die allgemeineren

$$\overline{X}_1 = l_{x'} l_{x''}(x'x'')^2, \quad \overline{X}_2 = m_{x'} m_{x''}(x'x'')^2, \quad X_3 = n_{x'} n_{x''}(x'x'')^2, \tag{563}$$
$$\overline{X}_4 = \sqrt{f(x')}\sqrt{f(x'')} + a_{x'}^3 a_{x''}^3,$$

wo l_x^2, m_x^2, n_x^2 drei ganze rationale quadratische Kovarianten von $f_6 = a_x^6$ bezeichnen, die Form Y_t aber durch

$$\overline{X}_5 = a_t\{a_x^4 a_{x''}\sqrt{f(x'')} + a_{x''}^4 a_{x'}\sqrt{f(x')}\}(x'x'')^5 \tag{564}$$

ersetzt und nun jede der Formen $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$, $\overline{X}_4$ mit Z^2, $\overline{X}_5$ mit Z^5 multipliziert, wo Z den Zusatzfaktor

$$Z = \frac{e^{\frac{1}{2}Q_{x'}^{\overline{x}'}\overline{x}''_{x''}}}{\sqrt[4]{f(x')f(x'')}} \tag{565}$$

bezeichnet. Es entstehen so die Funktionen $\Sigma_1, \ldots \Sigma_5$, welche das Analogon der ungeraden σ-Funktion des Falles $p = 1$ sind.

Entsprechend den Gleichungen (560) besteht für die Funktionen Σ (oder was dasselbe für die Formen $\overline{X}$) einmal eine homogene Gleichung 4. Grades zwischen $\Sigma_1, \ldots \Sigma_4$ allein von der Gestalt

$$\Sigma_4^2 \cdot G_2(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) + \Sigma_4 \cdot G_3(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) + G_4(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = 0 \tag{566}$$

und ferner läßt sich das Quadrat von Σ_5 durch $\Sigma_1, \ldots \Sigma_4$ ausdrücken in der Form

$$\Sigma_5^2 = \Sigma_4 \cdot G_5(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) + G_6(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3). \tag{567}$$

Die Gleichung (566) ist die Gleichung der *Kummer*schen Fläche, die Gleichung (567) stellt eine Schar von Flächen 6. Ordnung dar, welche die *Kummer*sche Fläche längs einer Kurve 12. Ordnung berühren.

Die Reihenentwicklungen der Funktionen Σ nach Potenzen der w charakterisieren sie dadurch als hyperelliptische Funktionen 1. Stufe, daß sich alle Koeffizienten rational aus den Invarianten der Form f_6 zusammensetzen.

96. Funktionen 2. Stufe. Da hyperelliptische Funktionen 2. Stufe nach zweimaligem Durchlaufen eines Periodenweges zum Anfangswerte zurückkehren müssen, so lassen sich dieselben als Quadratwurzeln rationaler Funktionen der Stellen x', x'' darstellen, und da weiter jeder Periodentransformation der Prinzipaluntergruppe 2. Stufe eine solche Monodromieänderung der Verzweigungspunkte entspricht, welche jeden einzelnen in seine Anfangslage zurückbringt, so wird man als Modulfunktionen 2. Stufe alle rationalen Funktionen der Verzweigungspunkte $\alpha, \beta, \ldots$ zulassen.

Demgemäß sind hyperelliptische Formen 2. Stufe die 6

$$D_\alpha = \sqrt{(\alpha x')(\alpha x'')} \tag{568}$$

und die 10 den Zerlegungen der Form f_6 in zwei Formen φ und ψ des 3. Grades

$$\varphi(x) = (\alpha x)(\beta x)(\gamma x), \quad \psi(x) = (\delta x)(\varepsilon x)(\xi x) \tag{569}$$

entsprechenden

$$D_{\varphi\psi} = \begin{vmatrix} \sqrt{\varphi(x')} & \sqrt{\psi(x')} \\ -\sqrt{\varphi(x'')} & \sqrt{\psi(x'')} \end{vmatrix}. \tag{570}$$

Alle hyperelliptischen Formen 2. Stufe lassen sich mit Hilfe der Determinanten $(\alpha\beta)$ als Koeffizienten rational durch 7 dieser Formen ausdrücken, nämlich durch die 6 Formen D_α und irgendeine der 10 Formen $D_{\varphi\psi}$.

Bezüglich der algebraischen Gleichungen, durch welche die Formen D untereinander verknüpft sind, kann auf die zwischen den 16 Thetafunktionen zweier Veränderlichen bestehenden verwiesen werden, denen die 16 Formen D proportional sind.

Aus den Formen D entstehen durch Hinzunahme des Zusatzfaktors (565) als hyperelliptische Funktionen 2. Stufe die 16 Sigmafunktionen und zwar die zu einer Zerlegung $f_6 = \varphi_1\psi_5$ gehörige ungerade in der Form

$$\sigma_{\varphi_1\psi_5}(w_1, w_2) = \frac{(x'x'')\sqrt{\varphi_1(x')\,\varphi_1(x'')}}{2\sqrt[4]{f(x')\,f(x'')}}\, e^{\frac{1}{2}Q^{\bar{x}'\bar{x}''}_{x'x''}} \tag{571}$$

und die zu einer Zerlegung $f_6 = \varphi_3\psi_3$ gehörige gerade in der Form

$$\sigma_{\varphi_3\psi_3}(w_1, w_2) = \frac{\sqrt{\varphi_3(x')}\sqrt{\psi_3(x'')} + \sqrt{\varphi_3(x'')}\sqrt{\psi_3(x')}}{2\sqrt[4]{f(x')\,f(x'')}}\, e^{\frac{1}{2}Q^{\bar{x}'\bar{x}''}_{x'x''}}. \tag{572}$$

Die Gleichungen (571), (572) charakterisieren die σ-Funktionen als Funktionen 2. Stufe dadurch, daß ihre Bildung die Zerlegungen der Form f_6 in die Formen φ_1 und ψ_5 bzw. φ_3 und ψ_3 und damit die Kenntnis der Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes verlangt; in der Reihenentwicklung (552) der σ-Funktionen ist die gleiche Tatsache damit in die Erscheinung getreten, daß die Koeffizienten sich rational aus den Koeffizienten der Formen φ und ψ zusammensetzen.

97. Die Funktionen $X_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$. Die gleiche Aufgabe, die Thetafunktionen derart mit Faktoren zu multiplizieren, daß die so entstehenden Funktionen sich bei linearer Transformation der Perioden einfacher verhalten als die ursprünglichen, hat *Klein* auch für Thetafunktionen höherer Ordnung gestellt und auch hier konnte ihm die Theorie der elliptischen Funktionen als Wegweiser dienen, in welcher er selbst[251]) in den Größen X_α solche Funktionen gebildet hatte.

Jede Thetafunktion n^{ter} Ordnung mit gegebener Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]$ läßt sich nach (86) aus den n^p Funktionen

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g+\varkappa \\ n \\ h \end{smallmatrix}\right](nv)_{n\alpha} \quad (\varkappa_1, \ldots \varkappa_p = 0, 1, \ldots n-1) \tag{573}$$

homogen und linear mit konstanten, d. h. von den v freien Koeffizienten zusammensetzen. Unterwirft man dann die Größen v, a, $\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]$ einer linearen ganzzahligen Transformation und nennt die dadurch gemäß (99), (101) und (105) entstehenden neuen Größen v', a', $\left[\begin{smallmatrix} \hat{g} \\ \hat{h} \end{smallmatrix}\right]$, so sind die diesen entsprechenden n^p Funktionen

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix} \hat{g}+\varkappa \\ n \\ \hat{h} \end{smallmatrix}\right](nv')_{n\alpha'} \quad (\varkappa_1, \ldots \varkappa_p = 0, 1, \ldots n-1) \tag{574}$$

homogene lineare Funktionen der ursprünglichen (573), so daß jeder linearen ganzzahligen Transformation hier eine homogene lineare Substitution entspricht.

Unsere Aufgabe ist nun, die Funktionen (573), (574) durch Hinzunahme von Faktoren so zu normieren, daß die genannten Substi-

251) Leipz. Ber. 36 (1884), p. 70; Leipz. Abh. 13 (1885), p. 367 und Ellipt. Modulfunktionen 2 (1892), p. 236.

tutionen in ihren Koeffizienten möglichst einfach werden. Auf diese Weise entstanden für den Fall $p = 2$ die zuerst von *Witting*[252]) eingeführten und sodann von *Burkhardt*[253]) weiter untersuchten Funktionen $X_{\alpha\beta}$, die sich von $\vartheta \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ n & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\!(nv)\!)_{na}$ nur um einen von den v unabhängigen Faktor unterscheiden und aus denen die weiteren Funktionen

(575) $$Y_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(X_{\alpha\beta} + X_{-\alpha,-\beta}), \quad Z_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} - X_{-\alpha,-\beta}$$

zusammengesetzt werden.

Für den Fall $n = 3$ ist die quinäre Gruppe der 25920 linearen Substitutionen der 5 Funktionen $Y_{\alpha\beta}$ und die quaternäre Gruppe der 51840 linearen Substitutionen der 4 Funktionen $Z_{\alpha\beta}$[254]) von *Burkhardt*[255]) eingehend untersucht worden.

Die Gruppe der $Z_{\alpha\beta}$ ist dadurch von besonderem Interesse, weil nach *Jordan*[256]) die Gruppe der Gleichung 27. Grades, von welcher die 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung abhängen, eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index 2 enthält, welche mit der Gruppe der $Z_{\alpha\beta}$ isomorph ist. Nachdem auf Grund dieses Zusammenhanges *Klein*[257]) die Reduktion des einen Problems auf das andere skizziert hatte, wurde sie von *Burkhardt*[258]) weiter ausgeführt (siehe Nr. **110** u. I B 3f., Nr. **23**).

98. Borchardtsche Modulen. *Borchardt*[259]) hat als Modulen des hyperelliptischen Gebildes im Falle $p = 2$ die Verhältnisse der Quadrate der Nullwerte von 4 geraden *Göpel*schen Thetafunktionen vorgeschlagen.[260]) Etwas abweichend davon hat *Klein* in seiner Vorlesung vom S.-S. 85 die Nullwerte von 4 geraden *Göpel*schen Thetafunktionen mit den doppelten Modulen als „*Borchardt*sche Modulen" bezeichnet. Nach einer ganzzahligen linearen Transformation der Perioden drücken sich

252) Diss. Göttingen 1887; Math. Ann. 29 (1887), p. 157.

253) Math. Ann. 38 (1891), p. 161.

254) Diese im Anschluß an die Untersuchungen *Wittings* a. a. O. und *Maschkes* Gött. N. 1888, p. 78; Math. Ann. 33 (1889), p. 317.

255) Gött. N. 1890, p. 376 u. 1892, p. 1; Math. Ann. 38 (1891), p. 161 u. 41 (1893), p. 313; dazu noch *Morrice,* Lond. M. S. Proc. 21 (1891), p. 58.

256) J. de Math. 14_2 (1869), p. 147; Paris C. R. 68 (1869), p. 865; „Traité", p. 316 u. 365; dazu *Pascal,* Ann. di Mat. 20_2 (1892/3), p. 163 u. 269; 21_2 (1893), p. 85; Acc. Linc. Rend. 2_5 (1893) I, p. 120.

257) J. de Math. 4_4 (1888), p. 169.

258) Math. Ann. 41 (1893), p. 339.

259) Paris C. R. 88 (1879), p. 834 = Ges. W. 1888, p. 439.

260) Anders bei *Brioschi,* Acc. Linc. Rend. 2_4 (1886), I, p. 159 = Op. mat. 3 (1904), p. 425.

die neuen Größen homogen und linear durch die ursprünglichen aus und es wird dadurch eine quaternäre Gruppe von 46080 homogenen linearen Substitutionen definiert, deren volles Formensystem von *Maschke*[261]) aufgestellt worden ist[262]) (I B 3f., Nr. 22).

99. Auflösung der Gleichung 6. Grades. *Brioschi*[263]) hat die allgemeine Gleichung 6. Grades auf eine gewisse Normalform transformiert, wobei die Wurzeln der gegebenen Gleichung rationale Funktionen der Wurzeln der neuen sind. Diese Normalform stimmt überein mit einer von *Maschke*[264]) aufgestellten Partialresolvente 6. Grades des quaternären Formenproblems der *Borchardt*schen Modulen. Es war jetzt nicht nur möglich, gewisse Ausdrücke aus den Nullwerten der 10 geraden Thetafunktionen des Falles $p = 2$ zu bilden, welche einer Gleichung 6. Grades von derselben Form genügen, sondern es gelang auch die Konstanten des den Thetafunktionen zugrunde liegenden algebraischen Gebildes so zu bestimmen, daß beide Gleichungen identisch werden.[265]) Auf solche Weise wird die Auflösung einer gegebenen Gleichung 6. Grades auf die Bildung der zu einem gegebenen algebraischen Gebilde gehörigen Thetafunktionen, also die Berechnung der Periodizitätsmodulen der Integrale 1. Gattung zurückgeführt. Da aber in unserem Falle die 6 Verzweigungspunkte die Wurzeln der zu lösenden Gleichung 6. Grades sind und also erst bestimmt werden sollen, so muß man zur Berechnung der Periodizitätsmodulen jene linearen Differentialgleichungen heranziehen, welchen sie als Funktionen der Koeffizienten der Gleichung 6. Grades genügen. Daß das so geschilderte Verfahren, auf dessen Notwendigkeit auch *Lindemann*[266]) hinweist, zur Lösung der Gleichung 6. Grades angewandt werden kann, ohne diese vorher auf die *Brioschi*sche Normalform reduziert zu haben, hat *Burkhardt*[267]) ausgeführt.

Lindemann[268]) hat ferner in Ergänzung eines *Jordan*schen Satzes[269]), nach welchem die Auflösung einer algebraischen Gleichung

261) Gött. N. 1887, p. 421; Math. Ann. 30 (1887), p. 496.

262) Vgl. dazu auch *Reichardt*, Leipz. Ber. 37 (1885), p. 419; Math. Ann. 28 (1887), p. 84; N. Acta Leop. 50 (1887), p. 373.

263) Acc. Linc. Rend. 4_4 (1888), I, p. 183, 301 u. 485 = Op. mat. 4 (1906), p. 41 u. 43; Acta math. 12 (1889), p. 83 = Op. mat. 5 (1909), p. 313.

264) A. a. O. u. Acc. Linc. Rend. 4_4 (1888), I, p. 181.

265) *Brioschi* a. a. O. u. Ann. Éc. Norm. 12_3 (1895), p. 343 = Op. mat. 5 (1909), p. 175.

266) Gött. N. 1892, p. 292.

267) Math. Ann. 35 (1890), p. 277; dazu *Cole*, Amer. J. 8 (1886), p. 265.

268) Gött. N. 1884, p. 245 u. 1892, p. 292.

269) „Traité", p. 380; vgl. dazu I B 3f., Nr. 21, Anm. 95.

beliebig hohen Grades auf das Zweiteilungsproblem der hyperelliptischen Funktionen zurückgeführt werden könne, gezeigt, daß die Auflösung einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades auf die folgenden 4 Prozesse zurückgeführt werden kann: 1. Auflösung von Gleichungen niedrigeren Grades, 2. Lösung von linearen homogenen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten und bekannten singulären Punkten, 3. Berechnung der Periodizitätsmodulen hyperelliptischer Integrale aus den Lösungen der genannten Differentialgleichungen, 4. Berechnung von Thetafunktionen mehrerer Veränderlichen für besondere Werte der Argumente (I B 3f., Nr. 22).

100. Der besondere Fall $p = 3$ in Kleins Theorie der Abelschen Funktionen. Da die Normalkurve der φ im Falle $p = 3$ die allgemeine Kurve 4. Ordnung ist, so liegt der *Klein*schen Theorie (Nr. 64) im Falle $p = 3$ ebenso wie der *Riemann-Weber*schen diese C_4 zugrunde und *Klein* knüpft bei seinen Untersuchungen[270]) speziell an die beiden Systeme von Berührungskurven 3. Ordnung (Nr. 89) an.

Mittelst jeder Berührungsform 1. Art $X^{(3)}$ kann man die Gleichung der C_4 in die Gestalt (526) bringen. Nimmt man dann noch x_4 als vierte Koordinate hinzu, so stellt

$$x_4^2 \varphi - 2 x_4 \Omega + X^{(3)} = 0 \tag{576}$$

eine Fläche 3. Ordnung F_3 dar, welche durch den vierten Eckpunkt des Koordinatentetraeders hindurchgeht, und die ursprüngliche C_4 ist der Schnitt des Umhüllungskegels, der sich von dieser Ecke aus an die F_3 legen läßt, mit der Ebene $x_4 = 0$. Bezeichnet man mit Σ die Diskriminante dieser F_3, deren Verschwinden aussagt, daß F_3 einen Doppelpunkt besitzt, und mit $\mathsf{T} = 0$ die Bedingung, daß die Ecke $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ auf einer der 27 Geraden der F_3 liegt, so erweist sich $\Sigma \mathsf{T}^2$ als die Diskriminante der gegebenen C_4.

Einem jeden der 36 Systeme von Berührungsformen 2. Art entspricht ein Flächennetz (528). Bezeichnet man mit S die Taktinvariante dieses Flächennetzes, deren Verschwinden aussagt, daß zwei von den 8 Grundpunkten des Netzes zusammenfallen, und ist $T = 0$ die Bedingung dafür, daß sich unter den Flächen des Netzes ein Ebenenpaar befindet, so stimmt wieder $S T^2$ mit der Diskriminante von C_4 überein.

Indem *Klein* nun einerseits das Verschwinden der Diskriminante der C_4 bei Auftreten eines Doppelpunktes, andererseits das Verhalten der Berührungskurven 3. Ordnung in diesem Falle untersucht, gelingt ihm durch diesen Grenzübergang auch für den allgemeinen Fall die

270) Math. Ann. 36 (1890), p. 45.

Bestimmung der konstanten Faktoren der Thetareihen. Es ergibt sich für das Produkt der 36 geraden Thetanullwerte

$$\prod_1^{36} \vartheta_{[h]}^{[g]}(0) = c\, p_{123}^{18}\, \text{Discr.}^2, \tag{577}$$

ferner für eine beliebige gerade Thetafunktion

$$\vartheta_{[h]}^{[g]}(0) = c' \sqrt{p_{123}} \sqrt[8]{S} \tag{578}$$

und für den bei einer beliebigen ungeraden Thetafunktion in (403) auftretenden Faktor C

$$C = c'' \sqrt{p_{123}} \sqrt[8]{\Sigma}. \tag{579}$$

Dabei bezeichnet p_{123} die aus Periodizitätsmodulen der Integrale 1. Gattung gebildete Determinante $\Sigma \pm \omega_{11}\omega_{22}\omega_{33}$, Discr. die schon mehrfach genannte Diskriminante der C_4, c, c', c'' rein numerische Konstanten, während S und Σ die vorher angegebene Bedeutung haben.

Aus den ϑ-Funktionen erhält man zunächst die *Wiltheiß*schen Funktionen Th mit Hilfe der Gleichung

$$Th_{[h]}^{[g]}(w_1, w_2, w_3;\ \omega_{ik}) = \frac{\vartheta_{[h]}^{[g]}(v, \tau)}{\sqrt{p_{123}}}\, e^{\Sigma a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta}, \tag{580}$$

wobei der auf der rechten Seite stehende Exponentialfaktor durch die Bedingung festgelegt ist, daß in der Reihenentwicklung des Produktes der 36 geraden Th-Funktionen das Glied zweiter Dimension ausfallen soll, woraus sich analog wie bei (539)

$$\Sigma a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = -\frac{1}{72}\left(\sum_1^{36} \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta} v_1^2 + 2 \sum_1^{36} \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta} v_1 v_2 + \cdots\right) \tag{581}$$

ergibt. Gleichzeitig werden aber zwecks Definition der Th die unter (402) und (405) für die ϑ aufgestellten Formeln in der Weise modifiziert, daß man an Stelle des transzendent normierten Integrals 3. Gattung Π das *Pick*sche Integral P (II B 2, Nr. 37) einführt. Diese Funktionen Th haben die Eigenschaft, sich bei linearer Transformation der Perioden lediglich unter Hinzutritt 8ter Einheitswurzeln als Faktoren zu permutieren.

Setzt man endlich bei gerader Th. Char. $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$

$$\sigma_{[h]}^{[g]}(w) = Th_{[h]}^{[g]} : c' \sqrt[8]{S}, \tag{582}$$

bei ungerader Th. Char.

$$\sigma_{[h]}^{[g]}(w) = Th_{[h]}^{[g]} : c'' \sqrt[8]{\Sigma}, \tag{583}$$

so sind diese σ-Funktionen einwertige, ganze Funktionen der Integralsummen w, die sich bei linearer Transformation der Perioden ohne Hinzutritt von Faktoren permutieren. In ihren Entwicklungen nach

fortschreitenden Potenzen der w sind alle Koeffizienten ganze rationale Funktionen innerhalb des durch die Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]$ festgelegten Rationalitätsbereiches, enthalten also in jedem Falle das jeweils mögliche Minimum von Irrationalitäten. Es ist nämlich in der Entwicklung einer geraden σ-Funktion

$$1 + (w)_2 + (w)_4 + \cdots + (w)_{2\nu} + \cdots \tag{584}$$

$(w)_{2\nu}$ eine rationale ganze Kovariante der gemischt ternär-quaternären Form

$$w_1 \Sigma \alpha_{ik} \xi_i \xi_k + w_2 \Sigma \beta_{ik} \xi_i \xi_k + w_3 \Sigma \gamma_{ik} \xi_i \xi_k \tag{585}$$

(oder eine Kombinante des früher genannten Flächennetzes), welche in den w den Grad 2ν, in den α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} zusammengenommen den Grad 8ν, in den ξ den Grad Null besitzt. Für eine ungerade σ-Funktion ist die Entwicklung von der Form

$$\varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2 + \varphi_3 w_3 + (w)_3 + (w)_5 + \cdots + (w)_{2\nu+1} + \cdots, \tag{586}$$

wo $(w)_{2\nu+1}$ ein Aggregat rationaler ganzer Kovarianten der drei zu der ungeraden Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]$ gehörigen ternären Formen φ, Ω, $X^{(3)}$ bezeichnet, in denen man die Koordinaten x_1, x_2, x_3 durch w_1, w_2, w_3 ersetzt hat; es ist nämlich

$$(w)_{2\nu+1} = \sum_{l=1}^{2\nu+1} \begin{pmatrix} 2\nu+1 & l & 4\nu+2-2l & l-1 \\ w, & \varphi, & \Omega & X^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{587}$$

Zur Ableitung von Rekursionsformeln für die Koeffizienten in den Entwicklungen (584) und (586) dienen Differentialgleichungen, von denen berichtet werden soll, nachdem vorher noch von einer gleichfalls den Fall $p = 3$ betreffenden Abhandlung *Wirtingers* gesprochen ist.

101. Wirtingers Lösung des Umkehrproblems im Falle $p = 3$.[271]) Setzt man

$$w_\mu^{x\, g_1} + w_\mu^{y\, g_2} + w_\mu^{z\, g_3} + w_\mu^{t\, g_4} = w_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, 3) \tag{588}$$

wo g_1, g_2, g_3, g_4 die Schnittpunkte einer Geraden mit der zugrunde liegenden C_4 sind, so entspricht einem gegebenen Wertesystem (w) eine einfach unendliche Schar korresidualer Quadrupel $(x\,y\,z\,t)$. Durch die vier Punkte eines solchen Quadrupels geht ein Büschel von ∞^1 Kegelschnitten; jeder davon schneidet die C_4 in vier weiteren Punkten, die ein zu $(x\,y\,z\,t)$ residuales Quadrupel $(x'\,y'\,z'\,t')$ bilden, das zu $(-w)$ gehört.

Die Polaren eines beliebigen Punktes ξ der Ebene in bezug auf alle Kegelschnitte eines solchen Büschels schneiden sich in einem

271) Monatsh. f. Math. 2 (1891), p. 55; Math. Ann. 40 (1892), p. 261.

Punkte η, der zu ξ hinsichtlich $(xyzt)$ konjugiert heißt. Durchläuft $(xyzt)$ alle Quadrupel der korresidualen Schar, so durchläuft der zu ξ konjugierte Punkt η einen Kegelschnitt $k\,(xyzt, \xi\eta)$. Der geometrische Ort jener Punkte ξ, für welche dieser Kegelschnitt zerfällt, ist eine Kurve 6. Ordnung $\Delta = 0$.

Die ∞^1 Kegelschnittbüschel, welche den verschiedenen korresidualen Quadrupelscharen $(xyzt)$ entsprechen, bilden ein System S von Kegelschnitten, das in einem dreifach unendlichen linearen Kegelschnittsystem R_3 enthalten ist und darin eine F_2 bildet, derart daß deren beide Regelscharen den Quadrupelsystemen $(xyzt)$ und den residualen $(x'y'z't')$ entsprechen. Um diese F_2 darzustellen, bezieht man alle ∞^5 Kegelschnitte der Ebene auf die Punkte eines R_5; in diesem liegt die vorhergenannte R_3, deren Koordinaten r_{ik} seien; die F_2 wird dann durch eine Gleichung zwischen diesen r_{ik} bestimmt.

Die Formen k, Δ, r hängen im wesentlichen von den Quadrupelscharen ab, gestatten aber umgekehrt das einzelne Quadrupel explizit zu berechnen. Es erwächst so die doppelte Möglichkeit, einmal die k, Δ, r als Funktionen der w_μ darzustellen und sodann mit ihrer Hilfe das Umkehrproblem zu lösen.

Die Funktionen k, Δ, r werden nach Multiplikation mit passenden Mittelformen zu *Jacobi*schen[272]) Funktionen K, D, R der w_μ, deren Reihenentwicklungen nach Potenzen der w_μ nach ganzen rationalen Kovarianten der C_4 fortschreiten, in denen die eine Reihe der Punktkoordinaten durch die w_μ ersetzt ist. K, D, R sind also Funktionen 1. Stufe Σ im Sinne von Nr. **95** und zwar ergibt sich K als eine gerade Σ-Funktion 2. Ordnung. Mit ihr hängt nahe zusammen jene von *Frobenius* eingeführte σ-Funktion 2. Ordnung φ, welche am Schlusse von Nr. **90** erwähnt wurde; ferner sind die Quadrate der 28 ungeraden *Klein*schen σ-Funktionen spezielle Fälle von K, aus diesem hervorgehend, wenn ξ, η auf einer Doppeltangente liegen. D ist eine gerade Σ-Funktion 4. Ordnung, deren Reihenentwicklung mit Gliedern 6. Grades beginnt und die sich als Aggregat der 36 geraden σ-Funktionen der doppelten Argumente ausdrücken läßt. Da diese als homogene Funktionen 2. Grades von 8 linearunabhängigen σ-Quadraten darstellbar sind, so ergibt sich unmittelbar ein Zusammenhang der Kurven $D = 0$ mit den Punkten der zu $p = 3$ gehörigen Mannigfaltigkeit M_3^{24} (Nr. **34**). Die R endlich sind ungerade Σ-Funktionen

272) Unter diesem Namen faßt *Klein* [Math. Ann. **27** (1886), p. 432] alle Funktionen zusammen, welche wie die σ-, *Th*-, Σ-Funktionen aus Thetafunktionen durch Hinzufügung von Faktoren der Form $ce^{\varphi((v))}$ entstehen, wo c eine Konstante und $\varphi((v))$ eine homogene ganze rationale Funktion 2. Grades der v ist.

4. Ordnung, deren Reihenentwicklungen mit Gliedern 5. Grades beginnen und die linear durch die 28 ungeraden σ-Funktionen der doppelten Argumente darstellbar sind. Es wird sich noch darum handeln, die allgemeinen Gesetze für die Bildung der Glieder in den Reihen für die K, D, R mit Hilfe von Differentialgleichungen, welche den im nächsten Paragraphen betrachteten *Wiltheiß*schen analog sind, aufzufinden. Ist dies geschehen, so hat die Berechnung der Funktionen für gegebene w keine Schwierigkeiten mehr.

Wirtinger erhält aber jetzt weiter die explizite Lösung des Umkehrproblems mit Hilfe der Funktionen K und R in rationaler Weise, indem er für jeden Punkt ξ der C_4 ein Kegelschnittbüschel angeben kann, dessen Basispunkte ein zu den (w) gehöriges Quadrupel bilden, welches ξ enthält, und er hat damit das Umkehrproblem mit Vermeidung jeder überflüssigen Irrationalität und mit durchaus an der C_4 invarianten Funktionen gelöst.

102. Die Wiltheißschen Differentialgleichungen und die Reihenentwicklungen der σ-Funktionen. *Wiltheiß*[273]) hat in die *Riemann*schen Differentialgleichungen (69) der Thetafunktionen für den Fall, daß diese Funktionen hyperelliptisch sind, an Stelle der Differentiationen nach den Modulen solche nach den Verzweigungspunkten der *Riemann*schen Fläche eingeführt und hat diese Gleichungen dann zuerst im speziellen Falle $p = 2$[274]) und später für beliebiges p[275]) so umgeformt, daß die sämtlichen darin vorkommenden Ausdrücke Kovarianten sind oder sonst mit der Invariantentheorie in engster Verbindung stehen.

Die Verwertung der so erhaltenen Differentialgleichungen zur Reihenentwicklung der σ-Funktionen geschah dann gleichfalls zuerst für den speziellen Fall $p = 2$. In diesem hatte *Klein*[276]) schon die Form der Ausdrücke für die ersten drei Glieder der Reihenentwicklungen der geraden und der ungeraden σ-Funktionen durch Kovarianten,

273) J. f. Math. 99 (1886), p. 236.

274) Math. Ann. 29 (1887), p. 272; später noch Math. Ann. 35 (1890), p. 433; 36 (1890), p. 134 und 37 (1890), p. 229.

275) Math. Ann. 31 (1888), p. 134 u. 410; 33 (1889), p. 267; es seien hier auch erwähnt die in Math. Ann. 34 (1889), p. 150 angegebenen $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung zwischen den Periodizitätsmodulen der Integrale 1. Gattung, welche diese als hyperelliptische charakterisieren, und die im Jahresber. d D. M.-V. 1 (1892), p. 72 mitgeteilten Gleichungen zwischen den partiellen Derivierten 2^{ter}, 3^{ter} und 4^{ter} Ordnung der hyperelliptischen Thetafunktionen 1. Ordnung.

276) Math. Ann. 27 (1886), p. 452.

ohne Bestimmung der numerischen Koeffizienten, angegeben und *Brioschi*[277]) hatte im Anschluß an die kurz vorher erschienene, oben an erster Stelle genannte Abhandlung von *Wiltheiß* schon ein Rekursionsverfahren für die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten der Funktion $\sigma(u_1, u_2)$ mit der Charakteristik [0] mitgeteilt. *Wiltheiß* gab nun in der oben an zweiter Stelle genannten Abhandlung für die Berechnung des allgemeinen Gliedes in der Entwicklung der geraden und der ungeraden σ-Funktionen Rekursionsformeln und berechnete mit ihrer Hilfe, nachdem jeweils die ersten zwei Glieder bestimmt waren, die folgenden beiden, $(w)_4$ und $(w)_6$ im Falle der geraden, $(w)_5$ und $(w)_7$ im Falle der ungeraden σ-Funktionen.[278])

Für den allgemeinen hyperelliptischen Fall hatte *Klein*[279]) die Form des ersten Gliedes der Entwicklung der σ-Funktionen bestimmt; mit der Berechnung des zweiten Gliedes beschäftigt sich für den Fall $m = 0$ *Schröder*[280]), für beliebiges m *Brioschi.*[281])

Weiter hat *Wiltheiß*[282]) die Differentialgleichung, welcher die *Th*-Funktionen im allgemeinen Falle $p = 3$ genügen, in einer äußerst eleganten Form aufgestellt; bei dieser treten neben den Differentialquotienten nach den Argumenten diejenigen nach den Koeffizienten der Gleichung der zugrundeliegenden C_4 auf. *Pascal*[283]) hat gezeigt, wie sich diese Gleichungen gestalten, wenn man die an zweiter Stelle genannten Differentiationen nach den Koeffizienten der bei den σ-Funktionen auftretenden Kovarianten ausführt, und hat auf Grund der dann sich ergebenden Rekursionsformeln für die Reihenentwicklung (586) den Term $(w)_3$, für (584) den Term $(w)_2$ berechnet.

277) Acc. Linc. Rend. 2_4 (1886), I p. 199 u. 215 = Op. mat. 4 (1906), p. 1; auch Ann. di Mat. 14_2 (1887), p. 241 = Op. mat. 2 (1902), p. 345.

278) Vgl. dazu noch *Brioschi,* Rend. Acc. Linc. 4_4 (1888), II, p. 341 u. 429 = Op. mat. 4 (1906), p. 53; Gött. N. 1890, p. 236 = Op. mat. 5 (1909), p. 375; J. f. Math. 116 (1896), p. 326 = Op. mat. 5 (1909), p. 307 und *Bolza,* Amer. J. 21 (1899), p. 107 u. 175; 22 (1900), p. 101.

279) Math. Ann. 32 (1888), p. 351.

280) Siehe Anm. 219 und Hamburg Math. Ges. Mitt. 3 (1891/1900), p. 7.

281) Acc. Linc. Trans. 6_4 (1890), p. 471 = Op. mat. 4 (1906), p. 85.

282) Math. Ann. 38 (1891), p. 1, vorher schon Gött. N. 1889, p. 381.

283) Ann. di Mat. 17_2 (1889/90), p. 81 u. 197; 18_2 (1890), p. 1; 24_2 (1896), p. 193, auch Gött. N. 1889, p. 416 u. 547. Für den speziellen hyperelliptischen Fall $p = 3$ hat *Pascal*, Ann. di Mat. 17_2 (1889/90), p. 257 die Differentialgleichungen aufgestellt und die ersten Glieder der Entwicklung der σ-Funktionen berechnet, und zwar für die 28 ungeraden Funktionen die Glieder $(w)_1$ und $(w)_3$; für die 35 nicht mit den Argumenten verschwindenden geraden Funktionen das Glied $(w)_2$, für die 36^{te} gerade Funktion die Glieder $(w)_2$, $(w)_4$ und $(w)_6$.

103. Weitere Differentialgleichungen im Gebiete der Thetafunktionen zweier Veränderlichen. *Fuchs*[284]) hat auf eine Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung hingewiesen, welche durch hyperelliptische Funktionen integriert werden und von denen die *Lamé*sche Differentialgleichung (II B 3, Nr. **80** u. 5, Nr. **23**) der dem Falle $p = 1$ entsprechende besondere Fall ist. Diese Differentialgleichungen haben für den Fall $p = 2$ eine eingehende Behandlung durch *Krause*[285]) erfahren.

Es wurden dann weiter in mehreren Abhandlungen jene Differentialgleichungen, welchen die von *Bolza* (Nr. **94**) aufgestellten $\wp$-Funktionen genügen, von *Baker*[286]) und *Wright*[287]) untersucht.

Krause[288]) hat ferner für die von ihm eingeführten „hyperelliptischen Funktionen"

$$al_\alpha(u_1, u_2) = \frac{\sigma_\alpha(u_1, u_2)}{\sigma_b(u_1, u_2)} \tag{589}$$

die Differentialquotienten sowohl für beliebige Werte der Argumente, wie auch speziell deren Nullwerte untersucht; er hat endlich auch jene Differentialgleichungen aufgestellt, denen die Nullwerte der geraden Thetafunktionen als Funktionen der *Rosenhain*schen Modulen $\varkappa$, λ, μ genügen. Im Anschlusse an *Staude*[289]) werden dabei die σ-Funktionen von *Krause* in der Weise eingeführt, daß man $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ als Funktion der nicht normierten Integrale u_1, u_2 mit $\Theta_\alpha(u_1, u_2)$ bezeichnet, unter Θ_α den Nullwert dieser Funktion und unter $\Theta'^{(1)}_\alpha$ bzw. $\Theta'^{(2)}_\alpha$ den ihrer partiellen Derivierten nach u_1 bzw. u_2 versteht und nun eine gerade σ-Funktion durch die Gleichung

$$\sigma_\alpha(u_1, u_2) = \frac{\Theta_\alpha(u_1, u_2)}{\Theta_\alpha}, \tag{590}$$

284) Gött. N. 1878, p. 19 = Ann. di Mat. 9_2 (1878), p. 25 = Ges. math. W. 2 (1906), p. 151; auch J. de Math. 4_3 (1878), p. 125 = Ges. math. W. 2 (1906), p. 161; schon vorher J. f. Math. 81 (1876), p. 97 = Ges. math. W. 2 (1906), p. 11.

285) Paris C. R. 126 (1898), p 1086, 1489 u. 1618; 127 (1898), p. 91; Leipz. Ber. 50 (1898), p. 192 u. 231; Ann. di Mat. 1_3 (1898), p. 265; Amer. M. S. Trans. 1 (1900), p. 287; dazu *Reichardt,* Leipz. Ber. 53 (1901), p. 124 u. Progr. Dresden 1902.

286) Cambr. Ph. Soc. Proc. 9 (1898), p. 513 u. 12 (1904), p. 219; Acta math. 27 (1903), p. 135.

287) Amer. J. 31 (1909), p. 271.

288) Acta math. 3 (1883), p. 283; J. f. Math. 95 (1883), p. 256 u. 98 (1885), p. 148; Math. Ann. 26 (1886), p. 1 u. 16; „Transf.", § 27 u. f.; ferner J. de Math. 3_4 (1887), p. 87; Ann. di Mat. 15_2 (1887/8), p. 173 u. 187; dazu *Bertolani,* Giorn. di Math. 34 (1896), p. 135.

289) Math. Ann. 24 (1884), p. 281; *Staude* fügt auf der rechten Seite der Gleichung (591) ein Minuszeichen bei.

eine ungerade durch die Gleichung

$$\sigma_\alpha(u_1, u_2) = \frac{\Theta_\alpha(u_1, u_2)}{\Theta'^{(1)}_\alpha + \Theta'^{(2)}_\alpha} \tag{591}$$

definiert. Es sind also, wie schon früher (Anm. 222 u. 242) bemerkt wurde, die *Krause*schen Sigmafunktionen weder mit den *Schottky*schen (Nr. **90**) noch mit den *Klein*schen (Nr. **94**) identisch.

XIII. Erweitertes Umkehrproblem und Teilung.

104. Clebsch und Gordans erweitertes Umkehrproblem. *Clebsch* und *Gordan*[290]) erweitern das *Jacobi*sche Umkehrproblem (vgl. Nr. **47**) in der Form, daß sie zu p Summen von je $p+q$ Integralen 1. Gattung q Summen von je $p+q$ Integralen 3. Gattung hinzufügen, also verlangen, daß aus $p+q$ Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h = v_h, && (h = 1, 2, \ldots p) \\ &\sum_{i=1}^{p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi^{(k)}\eta^{(k)}} = w_k && (k = 1, 2, \ldots q) \end{aligned} \tag{592}$$

bei gegebenen Punkten $c^{(i)}$ und gegebenen Unstetigkeitsstellen $\xi^{(k)}$, $\eta^{(k)}$ die $p+q$ Punkte $x^{(i)}$ als Funktionen der $p+q$ Größen v_h und w_k dargestellt werden.

Zur Lösung dieses Problems bestimme man bei beliebig gewählten unteren Grenzen $c^{(p+q+1)}$, $c^{(p+q+2)}$, $\ldots$ $c^{(2p+q)}$ p Punkte $x^{(p+q+1)}$, $x^{(p+q+2)}$, $\ldots$ $x^{(2p+q)}$ mit Hilfe des *Jacobi*schen Umkehrproblems aus den p Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{c^{(p+q+i)}}^{x^{(p+q+i)}} du_h = -v_h; \qquad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{593}$$

dann ergibt sich aus diesen verbunden mit den ersten p Gleichungen (592), daß eine Funktion der Klasse existiert, die ∞^1 wird in den $2p+q$ Punkten $c^{(i)}$ und 0^1 in den $2p+q$ Punkten $x^{(i)}$. Um eine solche Funktion zu bilden, wähle man eine adjungierte Funktion Ψ von genügend hohem Grade so, daß sie 0^1 wird in den $2p+q$ Punkten $c^{(i)}$; sie mag noch verschwinden in Punkten $\beta_1, \beta_2, \ldots$; man wähle dann eine zweite adjungierte Funktion gleich hohen Grades Φ so, daß sie in den Punkten β ebenso verschwindet wie Ψ, ferner 0^1 wird in den p bekannten Punkten $x^{(p+q+1)}$, $x^{(p+q+2)}$, $\ldots$ $x^{(2p+q)}$; man kann ihr dann noch q weitere Bedingungen auferlegen, wodurch sie bestimmt ist. Dies geschieht in folgender Weise:

290) „A. F." § 43, p. 143.

Man definiere q Größen l_k durch die Gleichungen

$$l_k = \frac{\Psi_{\eta^{(k)}}}{\Psi_{\xi^{(k)}}} \cdot e^{w_k + T_{\xi^{(k)}\eta^{(k)}} \begin{pmatrix} x^{(p+q+1)} \dots x^{(2p+q)} \\ c^{(p+q+1)} \dots c^{(2p+q)} \end{pmatrix}}; \quad (k = 1, 2, \dots q) \tag{594}$$

dann ist wegen der q letzten Gleichungen (592) und des *Abel*schen Theorems

$$\Phi_{\eta^{(k)}} - l_k \Phi_{\xi^{(k)}} = 0. \qquad (k = 1, 2, \dots q) \tag{595}$$

Aus diesen q Gleichungen können die noch unbestimmten Koeffizienten von Φ berechnet werden und es drücken sich dann alle Koeffizienten von Φ rational durch die Größen e^w und durch Transzendenten $e^{T_{\xi\eta}}$ aus. Die Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(p+q)}$ aber, die wir suchen, sind die $p+q$ von den β und den $x^{(p+q+i)}$ verschiedenen Schnittpunkte von $\Phi = 0$ mit der Grundkurve.

Man kann nun auch die Werte, welche eine gegebene Funktion für die gesuchten Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(p+q)}$ annimmt, als Wurzeln einer Gleichung darstellen, deren Koeffizienten rationale Funktionen der e^w und der Transzendenten $e^{T_{\xi\eta}}$ sind.

Bezeichnet man auch hier die symmetrischen Funktionen der x als *Abel*sche Funktionen, so sind diese $(2p+q)$-fach periodisch, indem sie ungeändert bleiben, wenn man die p Variablen v_h um Größen

$$2m_h \pi i + \sum_{i=1}^{p} a_{hi} q_i \qquad (h = 1, 2, \dots p) \tag{596}$$

und gleichzeitig die w_k um

$$2n_k \pi i + \sum_{i=1}^{p} \int_{\eta^{(k)}}^{\xi^{(k)}} du_i \qquad (k = 1, 2, \dots q) \tag{597}$$

vermehrt, wobei die m, n, q ganze Zahlen bezeichnen.

Zu dem erweiterten Umkehrproblem kann man gleichfalls *Abel*sche Transzendenten 3. und 2. Gattung durch die Gleichungen

$$T^{(q)}_{\xi\eta} \begin{pmatrix} x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(p+q)} \\ c^{(1)} c^{(2)} \dots c^{(p+q)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} d\Pi_{\xi\eta} \qquad \text{und} \tag{598}$$

$$T^{(q)}_{\xi} \begin{pmatrix} x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(p+q)} \\ c^{(1)} c^{(2)} \dots c^{(p+q)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} dZ_{\xi} \tag{599}$$

einführen; es lassen sich diese unter Benutzung der vorher definierten Funktion $\frac{\Phi}{\Psi}$ auf die Transzendenten des *Jacobi*schen Umkehrproblems (593) zurückführen.

Gehen r der Integrale 3. Gattung durch Zusammenrücken ihrer Unstetigkeitspunkte in Integrale 2. Gattung über, so sind die entsprechenden *Abel*schen Funktionen nur noch $(2p+q-r)$-fach periodisch.

In einem späteren Teile ihres Buches[291]) nehmen *Clebsch* und *Gordan* das erweiterte Umkehrproblem nochmals auf und führen es unter der Voraussetzung, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit gemacht werden kann, weiter, daß die Integrale 3. Gattung in Doppelpunkten der Grundkurve unstetig werden. Sind dann noch δ weitere Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte vorhanden, so hat man an Stelle der adjungierten Kurven solche einzuführen, die nur durch die $\delta + r$ zuletzt genannten Ausnahmepunkte hindurchgehen. Unter Benutzung dieser gelingt es *Clebsch* und *Gordan*, ganz analog den Untersuchungen beim *Jacobi*schen Umkehrproblem, die Transzendente $T^{(q)}_{\xi\eta}$ zunächst auf speziellere, nur von $p+q+2$ Punkten abhängige $T^{(q)}_{\xi\eta}(x)$ zurückzuführen und dann weiter jede solche als Differenz zweier nur von $p+q+1$ Punkten abhängigen Funktionen $U^{(q)}$ darzustellen. Die Funktion $V^{(q)} = e^{-U^{(q)}}$ ist dann eine einwertige und für alle endlichen Werte ihrer Argumente stetige Funktion der $p+q$ Größen

$$w_h = \sum_{i=1}^{p+q} \int_{c^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h - \int_{\mu}^{\xi} du_h + K_h, \quad (h = 1, 2, \ldots p+q) \tag{600}$$

welche nur verschwindet, wenn entweder ξ mit einem der x zusammenfällt oder wenn die letzteren auf einer Kurve $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, welche durch die $\delta + r$ abgesonderten Ausnahmepunkte hindurchgeht, und man kann dabei die Konstanten K_h so wählen, daß $V^{(q)}$ bis auf das Vorzeichen ungeändert bleibt, wenn alle w_h gleichzeitig ihr Zeichen wecheln. Durch Hinzufügung eines Faktors von der Gestalt

$$C e^{-\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{p+q} k_h w_h}, \tag{601}$$

in welchem die k ganze Zahlen sind, entsteht endlich aus der Funktion $V^{(q)}$ die Funktion $\Theta^{(q)}$, die auf Grund ihrer Periodizitätseigenschaften entwickelt sich als Summe von 2^q Θ-Funktionen von $p+q$ Argumenten darstellt.

Mit Hilfe der Funktion $\Theta^{(q)}$ erfolgt dann die Darstellung der spezielleren Transzendenten $T^{(q)}_{\xi\eta}(x)$, der allgemeineren $T^{(q)}_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(p+q)} \\ c^{(1)} c^{(2)} \ldots c^{(p+q)} \end{pmatrix}$ sowie der Produkte $\prod_{i=1}^{p+q} \frac{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{x^{(i)}} - \lambda}{\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{c^{(i)}} - \lambda}$ und damit die Lösung des erweiterten Umkehrproblems.

Zum Schlusse besprechen *Clebsch* und *Gordan* diejenigen Modifikationen, welche die vorstehenden Untersuchungen erfahren, wenn

291) „A. F.", Elfter Abschnitt, p. 270; die q Integrale 3. Gattung sind hier mit $u_{p+1}, \ldots u_{p+q}$ bezeichnet.

einige der q bevorzugten Doppelpunkte in Rückkehrpunkte übergehen, in welchem Falle an Stelle der Integrale 3. Gattung in dem Rückkehrpunkte ∞^1 werdende Integrale 2. Gattung treten.

105. Zur Geschichte des erweiterten Umkehrproblems. Ein erweitertes Umkehrproblem wurde zum ersten Male, durch *Jacobi*[292]) veranlaßt, von *Rosenhain*[293]) behandelt, der aus den Gleichungen

$$(602)\qquad \begin{aligned} u &= \int_0^{x_1} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\,s} \pm \int_0^{x_2} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\,s}, \\ v &= \int_0^{x_1} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\cdot s} \pm \int_0^{x_2} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\,s}, \end{aligned}$$

wo

$$(603)\qquad s = \sqrt{x\,(1-x)\,(1-\varkappa^2 x)}$$

gesetzt ist, die Größen x_1, x_2 als Funktionen von u und v bestimmte In der Tat folgen aus (602) durch passende Verfügung über die Konstanten α, β, α', β' oder, was dasselbe, durch lineare Verbindung der beiden Gleichungen, die folgenden

$$(604)\qquad \begin{aligned} u &= \int_0^{x_1} \frac{dx}{s} \pm \int_0^{x_2} \frac{dx}{s} = u_1 + u_2, \\ v + u\,Z(a) &= \Pi(u_1, a) \pm \Pi(u_2, a), \end{aligned}$$

wo der Parameter a des *Jacobi*schen Integrals 3. Gattung $\Pi(u, a)$ durch die Gleichung

$$(605)\qquad \lambda^2 = \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(a, \varkappa)$$

bestimmt ist und Z das *Jacobi*sche Integral 2. Gattung bezeichnet. *Rosenhain* zeigt, daß x_1, x_2 die Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades sind, deren Koeffizienten einwertige Funktionen von u und v sind, und weiter, daß sie dreifach periodisch sind mit den Perioden

$$(606)\qquad (2K, 0),\quad \left(2iK', \frac{i\pi a}{K}\right),\quad (0, i\pi).$$

Clebsch[294]) hat den *Rosenhain*schen Ansatz verallgemeinert, indem er die Summe von $\mu+1$ elliptischen Integralen 1. Gattung und μ Summen von je $\mu+1$ Integralen 3. Gattung gegebenen Größen v, $v_1, \ldots v_\mu$ gleich setzt. Er zeigt, daß man immer eine Gleichung $\mu+1^{\text{ten}}$ Grades mit in den v einwertigen Koeffizienten angeben kann, deren Wurzeln die in jenen Integralen auftretenden oberen Grenzen

292) J. f. Math. 39 (1850), p. 349 = Ges. W. 2 (1882), p. 351.
293) Mém. prés. 11 (1851), p. 376.
294) J. f. Math. 64 (1865), p. 234.

$z, z_1, \ldots z_\mu$ sind, und weiter, daß $z, z_1, \ldots z_\mu$ $(\mu + 2)$-fach periodische Funktionen von $v, v_1, \ldots v_\mu$ sind.

Brill[295]) behandelt dann ebenso den Fall, wo neben zwei Summen von je $\mu + 2$ hyperelliptischen Integralen 1. Gattung vom Geschlecht $p = 2\ \mu$ Summen von je $\mu + 2$ gleichartigen Integralen 3. Gattung treten.

Schirdewahn[216]) leitet den Fall $p = 2$, $\mu = 1$ aus dem höheren $p = 2$, $\mu = 2$ her, indem er schließlich den vierten oberen Grenzpunkt in einen Verzweigungspunkt rücken läßt.

Weitergeführt wurden die Untersuchungen von *Clebsch* und *Gordan* durch *Elliot*[297]), der den von diesen nur angedeuteten Fall des Auftretens von Integralen 2. Gattung ausführlich behandelt, und zwar in der Weise, daß er eine Funktion $\Theta^{(q)}_{(r)}$ bildet, welche von den $p + q + r$ Argumenten

$$
\begin{aligned}
u^{(i)}(x) &- \sum_{j=1}^{p+q+r} u^{(i)}(x_j) + C_i, && (i = 1, 2, \ldots p)\\
v^{(k)}(x) &- \sum_{j=1}^{p+q+r} v^{(k)}(x_j) + D_k, && (k = 1, 2, \ldots q)\\
w^{(h)}(x) &- \sum_{j=1}^{p+q+r} w^{(h)}(x_j) + E_h && (h = 1, 2, \ldots r)
\end{aligned}
\tag{607}
$$

abhängt, in denen die $u^{(i)}$ Integrale 1. Gattung, die $v^{(k)}$ Integrale 3. Gattung und die $w^{(h)}$ an einer Stelle ∞^1 werdende Integrale 2. Gattung bezeichnen. Dadurch, daß die Funktion $\Theta^{(q)}_{(r)}$ dann und im allgemeinen nur dann verschwindet, wenn x mit einem der $p + q + r$ Punkte x_j zusammenfällt, vermittelt sie die Lösung jenes Umkehrproblems, in welchem die Summen der p Integrale 1. Gattung $u^{(i)}$, der q Integrale 3. Gattung $v^{(k)}$ und der r Integrale 2. Gattung $w^{(h)}$ auftreten.

In einem zweiten Teile[298]) seiner Arbeit untersucht *Elliot* die Bedingungen für die Eindeutigkeit des gestellten Umkehrproblems.[299])

Den *Elliot*schen Ansatz hat *Appell*[300]) verallgemeinert, indem er auch Integrale 2. Gattung aufnimmt, die von höherer Ordnung unendlich werden.

Am Schlusse seiner Abhandlung bemerkt *Appell*, daß man zu

295) J. f. Math. 65 (1866), p. 277.

296) Diss. Breslau 1886.

297) Ann. Éc. Norm. 11_2 (1882), p. 79.

298) Ebd. p. 425.

299) Diese Frage auch bei *Appell* et *Goursat*, Fonct. algébr. 1895, p. 465; vgl. auch *Wiltheiß*, Diss. Berlin 1879.

300) J. de Math. 1_4 (1885), p. 245.

noch allgemeineren Ansätzen aufsteigen könne, in denen Summen beliebiger Integrale der Klasse auftreten. Diese Frage hat *Goursat*[301]) weiter verfolgt, indem er durch dieselben Schlüsse, wie sie *Clebsch* und *Gordan* angewandt haben, zeigt, daß die Lösung eines Umkehrproblems, in welchem neben p Integralen 1. Gattung q ganz beliebige Integrale der Klasse auftreten, vorausgesetzt nur, daß diese $p+q$ Integrale linear unabhängig sind, auf ein *Jacobi*sches Umkehrproblem und die Auflösung gewisser im allgemeinen Falle transzendenter Gleichungen von einfacher Form reduziert werden kann.

An die geometrische Tatsache, daß bei *Clebsch* und *Gordan* die $p+q$ gesuchten oberen Grenzpunkte der Integrale aus der Grundkurve durch Kurven ausgeschnitten werden, welche durch q ihrer Doppelpunkte nicht hindurchgehen, ihr also nicht adjungiert sind, hat *Lindemann*[302]) angeknüpft und ganz allgemein solche Scharen von Punktgruppen untersucht, welche auf Grundkurven mit ganz beliebigen Singularitäten durch nicht adjungierte Kurven ausgeschnitten werden, also durch Kurven, welche in einem s fachen Punkte der Grundkurve selbst nur einen σ-fachen Punkt besitzen, daher σ-Kurven genannt. *Lindemann* hebt am Schlusse seiner Arbeit hervor, daß die hier auftretenden algebraischen Bedingungen in transzendente umgesetzt werden können und so auf Umkehrprobleme führen, deren Lösungen von den genannten Punktgruppen geliefert werden.

Diesen Weg zur Aufstellung erweiterter Umkehrprobleme hat *Roth*[303]) weiter verfolgt. Während im Falle $\sigma = 0$ Umkehrprobleme entstehen, in denen wie bei *Clebsch* und *Gordan* die Integralsummen linear auftreten, trifft dies im Falle $\sigma > 0$ nicht mehr zu, wodurch der Charakter und der Bau der Gleichungen ziemlich kompliziert werden; doch gelingt es *Roth* auch in diesem Falle, die eindeutige Lösbarkeit des Umkehrproblems im allgemeinen Falle zu beweisen.

106. Lindemanns Verallgemeinerung des Jacobischen Umkehrproblems. In anderer Weise als *Clebsch* und *Gordan* hat *Lindemann*[304]) das *Jacobi*sche Umkehrproblem verallgemeinert, indem er die Aufgabe stellte, aus p Gleichungen von der Form

$$(608) \qquad q_1 \int_{\mu}^{x_1} du_h + q_2 \int_{\mu}^{x_2} du_h + \cdots + q_p \int_{\mu}^{x_p} du_h = v_h, \quad (h = 1, 2, \ldots p)$$

301) Paris C. R. 115 (1892), p. 787.

302) Unters. ü. d. *Riemann-Roch*schen Satz. Akad. Antrittsschr. Freiburg 1879; vgl. dazu *Noether*, Erl. Ber. 11 (1879), p. 144 u. Math. Ann. 15 (1879), p. 507.

303) Monatsh. f. Math. 24 (1913), p. 87.

304) Freib. Ber. 7 (1878), p. 273.

in denen $u_1, u_2, \ldots u_p$ die Normalintegrale 1. Gattung, $v_1, v_2, \ldots v_p$ gegebene Größen und $q_1, q_2, \ldots q_p$ beliebige positive ganze Zahlen $\geqq 1$ bedeuten, die oberen Grenzen $x_1, x_2, \ldots x_p$ zu bestimmen.

Geometrisch handelt es sich um die Bestimmung jener durch eine passende Zahl fester Punkte der Grundkurve gehenden adjungierten Kurven, welche die Grundkurve in τ Punkten ($\tau \gtreqless p$) von den Ordnungen $q_1 - 1, q_2 - 1, \ldots q_\tau - 1$ berühren.

Ist $q_1 = q_2 = \cdots = q_p$, so geht das gestellte Problem in das Teilungsproblem über und schon dieser spezielle Fall zeigt, daß man es nicht mehr mit einem eindeutig lösbaren Problem zu tun hat. In der Tat gibt es, wenn etwa $p - \tau$ der Zahlen q den Wert 1 haben, die übrigen τ aber von 1 und voneinander verschieden sind, nach *Lindemann*

$$(609) \qquad \Delta = q_1^2 q_2^2 \ldots q_\tau^2 p(p-1)(p-2)\ldots(p-\tau+1)$$

verschiedene Lösungen, die von ihm als Nullpunkte einer gewissen Thetafunktion höherer Ordnung nachgewiesen werden.

Dieselbe Verallgemeinerung kann man, wie schon *Lindemann* bemerkt hat, auch an dem erweiterten Umkehrproblem anbringen und nach nicht adjungierten Kurven fragen, welche die Grundkurve in zu bestimmenden Punkten von gegebenen Ordnungen berühren.

Solche Probleme sind schon in den obengenannten Abhandlungen über das erweiterte Umkehrproblem von *Clebsch* und *Brill*[305]) behandelt worden. Die Abzählungen, welche in diesen Schriften hinsichtlich der Systeme von Berührungskurven, insbesondere der Berührungskegelschnitte einer ebenen Kurve 4. Ordnung gegeben werden, sind, wie *Humbert*[306]) und *Weiß*[307]) auf anderem Wege nachgewiesen haben, nicht immer richtig. *Roth* hat sie a. a. O. aus dem erweiterten Umkehrproblem heraus richtig gestellt.

107. Das Teilungsproblem bei Clebsch und Gordan.[308]) Es sei eine adjungierte Kurve ν^{ten} Grades gegeben, welche die Grundkurve $F = 0$ in p Punkten $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(p)}$ m-punktig berührt; ihre weiteren Schnittpunkte mit $F = 0$ seien $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(q)}, b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots b^{(r)}$; gesucht

305) Dazu noch *Clebsch,* J. f. Math. 64 (1865) p. 43; *Clebsch-Lindemann,* Vorl. über Geometrie Bd. 1 (1876), p. 866; auch *Appell* et *Goursat,* Fonct. algébr. 1895, p. 509.

306) J. de Math. 2_4 (1886), p. 306.

307) Wiener Sitzb. 99 (1890), IIa, p. 284 (auch Diss. Erlangen 1890) und 102 (1893), IIa, p. 1025.

308) „A. F.", 10. Abschnitt, p. 230; man vgl. auch *Clebsch,* J. f. Math. 63 (1864), p. 198. Unter der speziellen Annahme, daß auch die Punkte a und x zu je m zusammenfallen, ist das Problem schon in Nr. 56 behandelt worden.

ist eine adjungierte Kurve $\varphi = 0$ gleich hohen Grades, welche ebenfalls durch die Punkte $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots b^{(r)}$ hindurchgeht, die Grundkurve in q weiteren gegebenen Punkten $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(q)}$ trifft und deren noch übrige mp Schnittpunkte mit $F = 0$ zu je m zusammenfallen, so daß sie gleichfalls diese in p Punkten m-punktig berührt. Heißen diese unbekannten Punkte $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(p)}$, so sind sie auf transzendentem Wege bestimmt durch die Kongruenzen

$$m \sum_{i=1}^{p} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{q} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h \equiv 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{610}$$

oder

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h \equiv \frac{1}{m}\left(P_h - \sum_{i=1}^{q} \int_{a^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h\right), \quad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{611}$$

wo P_h irgendein System zusammengehöriger Ganzen der Periodizitätsmodulen bezeichnet. Den m^{2p} verschiedenen mit Zahlen $0, 1, \ldots m-1$ gebildeten Systemen P_h entsprechen ebensoviele verschiedene Berührungskurven, von denen jede durch das ihr zugehörige Größensystem $\frac{1}{m} P_h$, also durch eine der m^{2p} aus m^{teln} ganzer Zahlen gebildete Per. Char. $(\varepsilon)_m$ (Nr. **40**), charakterisiert ist. Die Aufgabe hat also m^{2p} Lösungen.

Wenn die q gegebenen Punkte $x^{(i)}$ sich stetig ändern, so ändern sich auch die $y^{(i)}$ stetig und es kann daher auf diesem Wege nie das zu einer Per. Char $(\varepsilon)_m$ gehörige System von Berührungspunkten $y^{(i)}$ in das zu einer anderen $(\eta)_m$ gehörige übergehen; es gibt also m^{2p} getrennte Systeme von Berührungskurven.

Denkt man sich das Teilungsproblem für m verschiedene Per. Char. $(\varepsilon)_m$ gelöst, deren Summe $\equiv 0$ (mod. m) ist, so zeigt die Addition der m entsprechenden Gleichungen (611), daß es eine adjungierte Kurve ν^{ter} Ordnung gibt, welche durch die gegebenen Punkte x (und b) und die m Systeme von Berührungspunkten $y^{(i)}$ geht, daß also, wenn man eine adjungierte Kurve ν^{ter} Ordnung durch die x (und die b) und $m-1$ von Systemen von Berührungspunkten $y^{(i)}$ legt, diese Kurve dann immer noch durch ein ganz bestimmtes m^{tes} System von Punkten $y^{(i)}$ hindurchgeht.

Zur algebraischen Bestimmung der y bezeichne man mit $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots \varphi_{(m-1)p+1} = 0$ die Gleichungen von $(m-1)p + 1$ adjungierten Kurven ν^{ten} Grades, die alle durch die Punkte b und x hindurchgehen; es läßt sich dann φ stets in der Form

$$\varphi = \varkappa_1 \varphi_1 + \varkappa_2 \varphi_2 + \cdots + \varkappa_{(m-1)p+1} \varphi_{(m-1)p+1} \tag{612}$$

darstellen und die Aufsuchung der Punkte y führt nun auf zwei algebraische Gleichungen. Die erste $K = 0$ mit der Unbekannten $\varkappa_1 : \varkappa_2$

ist vom Grade m^{2p}; ihre Koeffizienten enthalten die $x^{(i)}$ rational und symmetrisch. Kennt man eine Wurzel dieser Gleichung, so sind x_3, $x_4, \ldots x_{(m-1)p+1}$ rationale Funktionen derselben und der x; die Gleichung $\varphi = 0$ ist mithin rational durch diese Wurzel und die x dargestellt. Alsdann ist noch eine Gleichung p^{ten} Grades[309]) zu lösen, deren Koeffizienten gleichfalls rational und symmetrisch in den x sind und deren Wurzeln die Punkte y liefern.

Den Fall $q = 0$ nennt man das Problem der speziellen Teilung, Es ist also eine adjungierte Kurve ν^{ten} Grades gegeben, welche die Grundkurve in p Punkten $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots c^{(p)}$ m-punktig berührt und in gewissen weiteren Punkten $b^{(1)}, b^{(2)} \ldots b^{(r)}$ schneidet und es ist eine adjungierte Kurve gleich hohen Grades gesucht, welche durch alle r Punkte b hindurchgeht und die Grundkurve gleichfalls in p Punkten m-punktig berührt. Heißen diese unbekannten Punkte wieder $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(p)}$. so ist jetzt

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{c^{(i)}}^{y^{(i)}} du_h \equiv \frac{1}{m} P_h. \qquad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{613}$$

Bei der algebraischen Bestimmung der Berührungskurve $\varphi = 0$ tritt an Stelle der Gleichung $K = 0$ eine Gleichung desselben Grades wie vorher, von der aber jetzt, der Lösung $y^{(1)} = c^{(1)}, \ldots y^{(p)} = c^{(p)}$ entsprechend, eine Wurzel bekannt ist, so daß nur noch eine Gleichung $m^{2p} - 1^{\text{ten}}$ Grades $M = 0$ zu lösen übrig bleibt.

Bezüglich der Wurzeln der speziellen Teilungsgleichung (613) wird man aber bemerken, daß nicht allen m^{2p} verschiedenen Per. Char. $(\varepsilon)_m$ wirkliche Berührungskurven der gesuchten Art entsprechen. Haben nämlich die in $(\varepsilon)_m$ auftretenden $2p$ ganzen Zahlen alle einen Faktor δ mit m gemeinsam, so berührt die zugehörige Kurve die Grundkurve nur $\frac{m}{\delta}$-punktig und kann für das vorliegende Problem nur insofern in Betracht kommen, als sie δ-fach gerechnet eine uneigentliche m-punktig berührende Kurve darstellt. Sondert man diese Fälle, für welche die entsprechenden Wurzeln y schon als Wurzeln niedrigerer Teilungsgleichungen auftreten, aus, so bleiben, wenn

$$m = \nu_1^{\alpha_1} \nu_2^{\alpha_2} \ldots \qquad \text{ist, nur} \tag{614}$$

$$\nu_1^{2p(\alpha_1-1)} \nu_2^{2p(\alpha_2-1)} \ldots (\nu_1^{2p} - 1)(\nu_2^{2p} - 1) \cdots \tag{615}$$

eigentliche Berührungskurven übrig.

108. Zurückführung des allgemeinen Teilungsproblems auf das spezielle. Es möge $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(p)}$ diejenige Lösung des allgemeinen Teilungsproblems (611) sein, welche einer bestimmten Per. Char $(\varepsilon)_m$

309) Vgl. dazu *Brioschi,* Paris C. R. 70 (1870), p. 504 = Op. mat. 4 (1906), p. 371.

entspricht und $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(p)}$ die zu einer andern Per. Char. $(\eta)_m$ gehörige. Ist dann weiter $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots \xi^{(p)}$ jene Lösung des speziellen Teilungsproblems, welche der Per. Char. $(\xi)_m$ des Periodensystemes $P_h - P_h'$ zugehört, so ist

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{y^{(i)}}^{\eta^{(i)}} du_h + \sum_{i=1}^{p} \int_{c^{(i)}}^{\xi^{(i)}} du_h = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{616}$$

und man sieht daraus, daß aus den Punkten $y^{(i)}$ und $\xi^{(i)}$ sich die $\eta^{(i)}$, transzendent wie algebraisch, bestimmen lassen. Indem man aber an Stelle von $\xi^{(i)}$ alle $m^{2p} - 1$ verschiedenen Lösungen des speziellen Teilungsproblems treten läßt, erhält man alle von $y^{(i)}$ verschiedenen Lösungen $\eta^{(i)}$ des allgemeinen Problems. Dies zieht für die Gleichung $K = 0$ die folgende Eigenschaft nach sich.

Durch irgendeine Wurzel x der Gleichung $K = 0$ können wir alle übrigen Wurzeln derselben rational ausdrücken und zwar mit Hilfe einer Formel

$$x' = \Theta(x, \mu), \tag{617}$$

in der Θ eine gewisse rationale Funktion bezeichnet, μ aber eine Wurzel der Gleichung m^{2p} — 1^{ten} Grades $M = 0$ ist und aus der man alle Wurzeln x' erhält, wenn man für μ der Reihe nach alle Wurzeln dieser letzten Gleichung setzt.

Da aber ferner bei wiederholter Benutzung verschiedener Wurzeln von $M = 0$ die Reihenfolge, in welcher dieselben benutzt werden, keinen Unterschied macht, so ist die Gleichung $K = 0$ eine *Abel*sche Gleichung und folglich algebraisch auflösbar, natürlich unter Adjunktion der Wurzeln der Gleichung $M = 0$.

Wenn man weiter immer mit Anwendung der nämlichen Wurzel μ die aufeinanderfolgenden Wurzeln

$$x' = \Theta(x, \mu),\ x'' = \Theta(x', \mu),\ x''' = \Theta(x'', \mu), \ldots \tag{618}$$

bildet, so schließt sich dieser Zyklus nach m wiederholten Bildungen, d. h. es ist

$$x^{(m)} = x. \tag{619}$$

Daraus ergibt sich, daß die Auflösung der Gleichung $K = 0$ durch Ausziehen von m^{ten} Wurzeln aus Ausdrücken T geschieht, welche, neben den Wurzeln der Gleichung $M = 0$, die x rational und symmetrisch enthalten, und zwar werden, da sich die sämtlichen dabei auftretenden Größen $\sqrt[m]{T}$ durch $2p$ unter ihnen ausdrücken, schließlich die m^{2p} Wurzeln der Gleichung $K = 0$ durch den nämlichen linearen Ausdruck dieser $2p$ Größen $\sqrt[m]{T}$ geliefert, wenn man jede dieser $2p$ Wurzeln auf die m verschiedenen möglichen Weisen wählt.

109. Reduktion der speziellen Teilungsgleichung $M = 0$. Diese stützt sich zunächst auf die beiden Sätze:

Hat man das Teilungsproblem für die Grade $m = \nu_1^{\alpha_1}, m = \nu_2^{\alpha_2}, \ldots$ gelöst, so setzen sich aus deren Wurzeln die Wurzeln der Teilungsgleichung für $m = \nu_1^{\alpha_1}\nu_2^{\alpha_2} \ldots$ rational zusammen.

Hat man das Teilungsproblem für den Grad $m = \nu$ gelöst, so erhält man durch wiederholtes Wurzelziehen aus rationalen Funktionen seiner Wurzeln die Wurzeln der Teilungsgleichung für $m = \nu^{\alpha}$.

Damit ist die Lösung des speziellen Teilungsproblems auf den Fall reduziert, wo m eine Primzahl ist. Läßt man den Fall $m = 2$, der unten gesondert behandelt wird, zunächst beiseite, so hat man endlich den Satz:

Die Auflösung der speziellen Teilungsgleichung für eine ungerade Primzahl m reduziert sich auf die Auflösung einer Gleichung vom Grade $\frac{m^{2p}-1}{m-1}$ und das Ausziehen einer $m-1^{\text{ten}}$ Wurzel aus einer rationalen Funktion ihrer Wurzeln.[310])

110. Monodromiegruppe der Teilungsgleichung. *Jordan*[311]) hat die *Galois*sche Theorie auf das Teilungsproblem der hyperelliptischen Funktionen 1. Ordnung ($p = 2$) angewandt.

---

310) Die von *Clebsch* und *Gordan* gegebene Lösung der allgemeinen Teilungsgleichung war für den Fall $p = 2$ schon 1846 von Hermite [J. f. Math. 32 (1846), p. 277 = Œuv. 1 (1905), p. 10 = *Jacobi*s Ges. W. 2 (1882), p. 87 und Mém. prés. 10 (1848), p. 563 = Œuv. 1 (1905), p. 38] angegeben, der dabei an eine Bemerkung *Jacobi*s [J. f. Math. 3 (1828), p. 86 = Ges. W. 1 (1881), p. 241] über die Teilung der elliptischen Funktionen anknüpfte.

Auch die Reduktion des speziellen Teilungsproblems (la division des indices) auf die Auflösung einer Gleichung vom Grade $1 + m + m^2 + m^3$ und einer algebraisch auflösbaren Gleichung vom Grade $m - 1$ (oder, da bei *Hermite* die auftretenden Funktionen gerade, die Wurzeln des speziellen Teilungsproblems also paarweise einander gleich sind, vom Grade $\frac{m-1}{2}$) ist bereits von *Hermite* angegeben.

Die Division der hyperelliptischen Funktionen 1. Ordnung auch bei *Krause* (Festschr. Rostock 1886, und „Transf.", p. 257); hier wird gezeigt, in welcher Weise auf Grund der Zerlegung der Division in zwei Transformationen vom Grade $\frac{1}{m}$

$$v'_\mu = \frac{1}{m} v''_\mu, \quad a'_{\mu\nu} = \frac{1}{m} a''_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p)$$
$$v''_\mu = v_\mu, \quad a''_{\mu\nu} = m a_{\mu\nu}$$

die Lösung des Teilungsproblems auf die Lösung dieser beiden Transformationsprobleme zurückgeführt werden kann.

311) *Jordan*, „Traité", p. 354; dazu *Burkhardt*, Math. Ann. 35 (1890), p. 198.

Da jede Wurzel der (allgemeinen oder speziellen) Teilungsgleichung einer bestimmten Per. Char. zugeordnet ist, so läßt sich die Monodromiegruppe der Teilungsgleichung an den Per. Char. studieren und man sieht, daß die Monodromiegruppe der speziellen Teilungsgleichung keine andere ist als die Gruppe der mod. m inkongruenten linearen ganzzahligen Transformationen der Per. Char., deren Ordnung

$$N = (m^4 - 1)(m^3 - 1)m^3 \cdot m \tag{620}$$

ist. Die Monodromiegruppe der allgemeinen Teilungsgleichung enthält diese als ausgezeichnete Untergruppe und enthält ferner jene m^4 Substitutionen von Per. Char., welche der Addition ein und derselben Per. Char. zu allen m^4 entsprechen. Diese bilden eine *Abel*sche Gruppe von der Ordnung m^4 mit vier erzeugenden von der Ordnung m. Daraus zeigt sich, wie oben, daß nach Adjunktion der Wurzeln der speziellen Teilungsgleichung die allgemeine durch vier nebeneinander gestellte m^{te} Wurzeln lösbar ist.

Die Monodromiegruppe der speziellen Teilungsgleichung enthält, dem Übergang von der Per. Char. $(\varepsilon)_m$ zu $(-\varepsilon)_m$ entsprechend, eine ausgezeichnete Untergruppe von der Ordnung 2. Daher läßt sich die spezielle Teilung spalten in ein Problem mit einer Gruppe von der Ordnung $\frac{1}{2}N$ und ein solches mit einer Gruppe von der Ordnung 2. Als das erstere kann die spezielle Teilung der geraden Funktionen gewählt werden; ist diese erledigt, so erfordert die Teilung der ungeraden Funktionen nur noch die Ausziehung einer Quadratwurzel. Eine weitere Spaltung des speziellen Teilungsproblems ist nicht mehr möglich.

Über Untergruppen der speziellen Teilungsgleichung, insbesondere solche von der Ordnung $1 + m + m^2 + m^3$ bei *Jordan* und *Burkhardt* a. a. O.

Eine eingehende Untersuchung hat nur der Fall der Dreiteilung der hyperelliptischen Funktionen vom Geschlecht 2 gefunden. Hier hat *Clebsch*[312]) das Problem darauf zurückgeführt, die gegebene binäre Form 6. Grades f in die Gestalt $f = v^2 - u^3$ zu bringen, wo v eine Form 3. Grades, u eine solche 2. Grades ist.[313]) Den 80 eigentlichen Per. Char. des Falles $p = 2$, $r = 3$ entsprechen ebenso viele Lösungen des Problems, die sich aber, da neben der Lösung u, v auch die Lösung $u, -v$ auftritt, (allerdings auf Kosten der Übersichtlichkeit ihrer

312) Gött. Abh. 14 (1869), p. 17; vgl. *Clebsch-Lindemann*, Vorl. ü. Geometrie 1 (1876), p. 920; *Brioschi*, Ann. di Mat. 7_2 (1875/76), p. 89 u. 247; 8_2 (1877), p. 43 u. 147, auch gesondert erschienen 1877, vgl. Op. mat 2 (1902), p. 101.

313) Dazu *Cayley*, Quart. J. 9 (1868), p. 210 = Coll. math. pap. 6 (1893), p. 105.

Gruppierungsverhältnisse) auf vierzig wesentlich verschiedene reduzieren lassen, so daß *Clebsch* auf eine Gleichung 40. Grades geführt wird. Die Monodromiegruppe des Problems[314]) ist schon in Nr. **97** als Gruppe der $Z_{\alpha\beta}$ besprochen worden und es ist dort bereits auf dessen Zusammenhang mit dem der 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung hingewiesen worden. Daß mit dem Dreiteilungsproblem des Falles $p = 2$ das Zweiteilungsproblem für das durch die Gleichung $s^3 = f_6(z)$ definierte binomische algebraische Gebilde vom Geschlecht 4 (vgl. Nr. **92**) gruppen- und invariantentheoretisch identisch ist, hat *Osgood*[315]) gezeigt.

Die arithmetische Gruppe der (speziellen und allgemeinen) Teilungsgleichung ist $(m-1)$-mal so groß wie die Monodromiegruppe; an Stelle der Gruppe der mod. m inkongruenten linearen ganzzahligen Transformationen tritt bei ihrer Betrachtung die der ganzzahligen Transformationen von den Graden $1, 2, \ldots m-1$.

111. Zweiteilung. Auf ein Zweiteilungsproblem führt die Aufgabe (Nr. **57**), eine adjungierte Kurve $n - 2^{\text{ten}}$ Grades ψ zu bestimmen, welche durch die Schnittpunkte der Grundkurve mit ihrer Tangente in α hindurchgeht und deren $2p$ weitere Schnittpunkte mit der Grundkurve paarweise zusammenfallen, so daß sie also die Grundkurve in p zu bestimmenden Punkten berührt. Es gibt 2^{2p} verschiedene solche Kurven; berührt eine von ihnen, ψ_0, die Grundkurve in $\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(2)}, \ldots \alpha_0^{(p)}$, so sind die Berührungspunkte $\alpha^{(i)}$ einer andern durch die Kongruenzen

$$\sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_0^{(i)}}^{\alpha^{(i)}} du_h = \frac{1}{2} P_h \qquad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{621}$$

bestimmt, wo P_h ein System zusammengehöriger Ganzen der Periodizitätsmodulen bezeichnet. Läßt man an seine Stelle der Reihe nach alle 2^{2p} mod. 2 verschiedenen solchen Systeme treten, so erhält man 2^{2p} Systeme von Berührungspunkten $\alpha^{(i)}$ und ihnen zugehörig ebensoviele Berührungskurven; aber nur $2^{p-1}(2^p + 1)$ von diesen sind eigentliche Berührungskurven $n - 2^{\text{ten}}$ Grades, die übrigen $2^{p-1}(2^p - 1)$ zerfallen in die Tangente in α und je eine adjungierte Kurve $n - 3^{\text{ten}}$ Grades, welche die Grundkurve in $p - 1$ Punkten berührt.

Diese $p - 1$ Berührungspunkte und damit auch das System der genannten $2^{p-1}(2^p - 1)$ Berührungskurven $n - 3^{\text{ten}}$ Grades sind von α ganz unabhängig. Wenn man unmittelbar auf algebraischem Wege

314) Vgl. *Jordan*, Paris C. R. 68 (1869), p. 865; „Traité", p. 316 u. 365.
315) Diss. Erlangen 1890.

eine adjungierte Kurve $n-3^{\text{ten}}$ Grades zu bestimmen sucht, welche die Grundkurve in $p-1$ Punkten berührt, so wird man auf eine Gleichung $R=0$ vom Grade $2^{p-1}(2^p-1)$ geführt. Als Beispiel dafür kann die Bestimmung der 28 Doppeltangenten der zum Geschlecht 3 gehörigen, allgemeinen Kurve 4. Ordnung dienen.[316])

Ebenso führt die Bestimmung der zu einem gegebenen Punkte α gehörigen adjungierten Kurven $n-2^{\text{ten}}$ Grades auf eine Gleichung vom Grade $2^{p-1}(2^p+1)$. *Clebsch* und *Gordan* zeigen, daß die Wurzeln dieser Gleichung durch die Wurzeln der Gleichung $R=0$ rational ausdrückbar sind.

Zweiteilungsprobleme sind auch die Bestimmungen jener homogenen Formen $X^{(m)}$ m^{ter} Dimension in den φ, welche die Grundkurve überall, wo sie ihr begegnen, berühren und so zu den in $m(p-1)$ Punkten 0^1 werdenden Wurzelfunktionen $\sqrt{X^{(m)}}$ Anlaß geben (Nr. **60**); diese scheiden sich in zwei getrennte Klassen, je nachdem sie ungerader oder gerader Dimension sind. Den ersteren wurden die Th. Char. zugeordnet und entsprechend ist die Monodromiegruppe der ihrer Definition zugrunde liegenden Teilungsgleichung die Gruppe H' der ganzzahligen linearen Transformationen der Th. Char. (Nr. **31**). Den Wurzelformen gerader Dimension sind die Per. Char. zugeordnet und entsprechend ist die Monodromiegruppe ihrer Teilungsgleichung die Gruppe H der Transformationen der Per. Char.

Für die hyperelliptischen Funktionen fällt das Zweiteilungsproblem mit dem Problem der Verzweigungspunkte zusammen (vgl. Nr. **75** u. **76**).

So führt im Falle $p=2$ die Bestimmung der einer ungeraden Th. Char. zugeordneten Wurzelform 1^{ter} Dimension zu einem der 6 Linearfaktoren der das hyperelliptische Gebilde definierenden Binärform f_6 6^{ten} Grades, leistet also deren Zerlegung in eine Form 1^{ten} und eine solche 5^{ten} Grades $f_6=\varphi_1\cdot\psi_5$. Jeder einer geraden Th. Char. zugeordneten Wurzelform 3^{ter} Dimension entspricht in der gleichen Weise eine der 10 Zerlegungen von f_6 in zwei Faktoren 3^{ten} Grades $f_6=\varphi_3\cdot\psi_3$ (vgl. Nr. **96**), während endlich die 15 den eigentlichen Per. Char. zugehörigen Wurzelformen 2^{ter} Dimension die 15 Zerlegungen von f_6 in je einen Faktor 2^{ten} und 4^{ten} Grades $f_6=\varphi_2\cdot\psi_4$ vermitteln.

Bezeichnen M_i, N_i und Ω homogene Funktionen von x_1, x_2, x_3, so wird durch die Gleichungen

$$z_i=M_i+N_i\sqrt{\Omega} \qquad (i=1,2,3) \tag{622}$$

316) Über die *Galois*sche Gruppe des Doppeltangentenproblems bei *Weber*, Math. Ann. 23 (1884), p. 489 u. Lehrb. d. Algebra 2 (1899), p. 447, vgl. auch Anm. 218.

die zweiblättrige x-Ebene auf die einblättrige z-Ebene abgebildet, mit der Übergangskurve $\Omega = 0$ in der x-Ebene. *Clebsch*[317]) hat den Zusammenhang dieser Art von Flächenabbildungen mit der Zweiteilung der *Abel*schen Funktionen gezeigt.

XIV. Periodische Funktionen mehrerer Veränderlichen.

112. Die allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktionen von p Veränderlichen. Erfüllt eine Funktion $f(u_1, \ldots u_p)$ der p komplexen Veränderlichen $u_1, \ldots u_p$ für bestimmte Systeme konstanter Größen $P_1, \ldots P_p$ bei allen Werten der Variablen u die Gleichung

$$f(u_1 + P_1, \ldots u_p + P_p) = f(u_1, \ldots u_p), \tag{623}$$

so nennt man sie periodisch und jedes Größensystem $P_1, \ldots P_p$ ein System zusammengehöriger oder simultaner Perioden von ihr. Sind dann $P_{1\alpha}, \ldots P_{p\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots k)$ irgend k solcher Periodensysteme und m_α ganze Zahlen, so ist stets auch $\sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha P_{1\alpha}, \ldots \sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha P_{p\alpha}$ ein Periodensystem von f. Zu $\varrho + 1$ Periodensystemen $P_{1\alpha}, \ldots P_{p\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots \varrho + 1)$ kann man, wenn $\varrho \geqq 2p$ ist, immer reelle Zahlen μ_α finden, so daß gleichzeitig die p Gleichungen

$$\sum_{\alpha=1}^{\varrho+1} \mu_\alpha P_{1\alpha} = 0, \ldots \sum_{\alpha=1}^{\varrho+1} \mu_\alpha P_{p\alpha} = 0 \tag{624}$$

bestehen. Möglicherweise ist dies auch schon für $\varrho < 2p$ der Fall; der kleinste Wert von ϱ, für welchen es stattfindet, soll r heißen. Dann gibt es r Periodensysteme, für welche die Gleichungen (624), wenn man darin $\varrho + 1 = r$ setzt, nur durch die Werte $\mu_1 = 0, \ldots \mu_r = 0$ befriedigt werden können; solche r Periodensysteme heißen voneinander unabhängig und aus ihnen läßt sich jedes Periodensystem von f in der Form

$$P_1 = \sum_{\alpha=1}^{r} \mu_\alpha P_{1\alpha}, \ldots P_p = \sum_{\alpha=1}^{r} \mu_\alpha P_{p\alpha} \tag{625}$$

zusammensetzen.

Hat nun die Funktion f solche Periodensysteme, in denen jede einzelne Periode ihrem absoluten Betrage nach eine vorgegebene Grenze nicht überschreitet, nur in endlicher Anzahl oder, was dasselbe, besitzt die Funktion f kein System unendlich kleiner Perioden, so sind die μ_α rationale Zahlen und es können die r Periodensysteme $P_{1\alpha}, \ldots P_{p\alpha}$

317) Math. Ann. 3 (1871) p. 45; vgl. *de Paolis,* Acc. Linc. Mem. 1_3 (1877), p. 511; 2_3 (1878), p. 31 u. 851; *Noether,* Erl. Ber. 10 (1878), p. 81 u. Math. Ann. 33 (1889), p. 525.

($\alpha = 1, 2, \ldots r$) so gewählt werden, daß die μ_α ganze Zahlen sind; solche Periodensysteme heißen primitive. Ist f eine einwertige oder endlich vielwertige analytische Funktion, welche sich nicht als Funktion von weniger denn p linearen Verbindungen der u darstellen läßt, so trifft für sie die ebengenannte Voraussetzung zu[318]) und es sind daher alle ihre Periodensysteme linear und ganzzahlig aus $r \geqq 2p$ unter ihnen zusammensetzbar; dies gilt nicht mehr unter allen Umständen für nicht analytische oder unendlich vielwertige analytische Funktionen.[319])

Jacobi und *Hermite* bezeichnen die Perioden als Indizes, *Riemann* als Modulen, ferner nennt *Riemann* für eine $2p$-fach periodische Funktion von p Variablen mit den $2p$ primitiven Periodensystemen $P_{1\alpha}, \ldots P_{p\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots 2p$) das Gebiet der p Größen $\sum_{\alpha=1}^{2p} \xi_\alpha P_{1\alpha}, \ldots \sum_{\alpha=1}^{2p} \xi_\alpha P_{p\alpha}$, bei dem die ξ die Werte $0 \leqq \xi_\alpha < 1$ durchlaufen, das bei diesen $2p$ Modulensystemen periodisch sich wiederholende Größengebiet. Interpretiert man die reellen und imaginären Teile der Variablen u als rechtwinklige Punktkoordinaten in einem Raume von $2p$ Dimensionen, so ist dieses Gebiet ein Parallelotop P dieses Raumes, durch dessen periodische Wiederholung der ganze Raum einfach und lückenlos ausgefüllt wird. Solche Punkte des Raumes, welche dabei dem nämlichen Punkte in P entsprechen, heißen äquivalent oder kongruent nach den Periodensystemen, ihre Gesamtheit ein System von Gitterpunkten. Es ist eine unmittelbare Folge der Unabhängigkeit der Periodensysteme $P_{1\alpha}, \ldots P_{p\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots 2p$), daß die aus ihren reellen und imaginären Teilen gebildete Determinante nicht verschwindet; ihr Wert ist gleich dem Inhalte des Parallelotops P.

318) Daß eine Funktion von p Veränderlichen nicht mehr als $2p$ unabhängige Perioden haben kann, ohne unendlich kleine zu besitzen, hat für $p = 1$ *Jacobi* (Nr. 3) und für beliebiges p *Hermite* [J. f. Math. 40 (1850), p. 310 = Œuv. 1 (1905), p. 158] gezeigt; daß weiter eine einwertige oder endlich vielwertige analytische Funktion von p Veränderlichen ein System unendlich kleiner Perioden nur in dem Falle besitzen kann, in welchen sie sich als Funktion von weniger denn p linearen Verbindungen ihrer Argumente darstellen läßt, haben *Riemann* [J. f Math. 71 (1870), p. 197 = Ges. math. W. 1876, p. 276, 2. Aufl. 1892, p. 294] und *Weierstraß* [Berl. Ber. 1876, p. 680 = Abh. a. d. Functionenlehre 1886, p. 165 = Math. W. 2 (1895), p. 55] bewiesen. Daß bei einer unendlich vielwertigen Funktion einer Variable Casorati die Möglichkeit von mehr als 2 unabhängigen Perioden nachgewiesen hat, ist schon in Nr. 4 erwähnt worden.

319) Für reelle Funktionen reeller Veränderlichen gelten die nämlichen Sätze mit der Abänderung, daß hier $r \leqq p$ ist, vgl. *Kronecker*, Berl. Ber. 1884, p. 1071 = Werke 3 (1899), p. 31.

113. Die Riemann-Weierstraßschen Sätze. Im folgenden soll die Untersuchung auf einwertige $2p$-fach periodische[320]) Funktionen von p Veränderlichen $u_1, \ldots u_p$ beschränkt werden, welche sich nicht als Funktionen von weniger denn p linearen Verbindungen der u darstellen lassen und welche im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzen. Die wichtigsten Sätze für diese Funktionen waren, wie wir aus einer Mitteilung *Hermites*[321]) wissen, bereits 1860 *Riemann* bekannt. Auch *Weierstraß*[322]) hat sich wiederholt mit ihnen beschäftigt und ist nach einem Briefe an *Kowalewski* 1878 im Besitze eines Beweises des abschließenden Satzes, daß jede solche Funktion sich durch Thetafunktionen von p Veränderlichen ausdrücken läßt, gewesen.[323])

Man kann zu den *Riemann-Weierstraß*schen Sätzen auf folgendem Wege gelangen.[324])

Aus der Existenz einer Funktion des ebengenannten Charakters folgt zunächst die Existenz von $p-1$ solcher Funktionen f_i $(i = 1, 2, \ldots p-1)$ und $p-1$ Konstanten c_i von der Beschaffenheit, daß für sie das Gleichungensystem $f_1 = c_1, \ldots f_{p-1} = c_{p-1}$ neben Gebilden von mehreren Dimensionen mindestens ein eindimensionales analytisches Ge-

320) Von den einem Werte $r < 2p$ entsprechenden Funktionen, welche übrigens in den zu $r = 2p$ gehörigen als Grenzfälle enthalten sind, sind nur die beim erweiterten Umkehrproblem auftretenden, so von *Rosenhain* die dreifach periodischen Funktionen von zwei Veränderlichen untersucht worden (Nr. **105**), später bei *Cousin,* Acta math. 33 (1910), p. 105.

321) Note sur la théorie des fonctions elliptiques im 2. Bande von *Lacroix,* Traité élém. de calcul différentiel etc., auch übersetzt von *Natani* u. d. T. Übersicht der Theorie der elliptischen Funktionen, 1863, p. 24.

322) Berl. Ber. 1869, p. 853 = Math. W. 2 (1895), p. 45 u. J. f. Math. 89 (1880), p. 1 = Math. W. 2 (1895), p. 125, vgl. auch *Hurwitz,* J. f. Math. 94 (1883), p. 1 und *Blumenthal,* Math. Ann. 56 (1903), p. 509 u. 58 (1904), p. 497.

323) Vgl. *Mittag-Leffler*, 2me Congr. intern. Math. 1900, Paris 1902, p. 143. Veröffentlicht wurde der *Weierstraß*sche Beweis erst aus seinem Nachlaß im 3. Bande der Math. W. (1903), p. 53.

324) *Wirtinger,* Monatsh. f. Math. 6 (1895) p. 69 und 7 (1896), p. 1; auch Acta math. 26 (1902), p. 133. Einen Beweis des obengenannten abschließenden Satzes haben erstmals *Poincaré* u. *Picard* [Paris C. R. 97 (1883), p. 1284, vgl. dazu eine Bemerkung von *Poincaré,* Paris C. R. 92 (1881), p. 958] veröffentlicht; ein anderer ergibt sich aus den zwar nur für $p = 2$ angestellten, aber auf beliebig viele Variablen übertragbaren Arbeiten von *Appell* in Verbindung mit Untersuchungen von *Frobenius* (vgl. Anm. 341). Spätere Beweise bei *Poincaré,* Paris C. R. 124 (1897), p. 1407; Acta math. 22 (1899), p. 89 u. 26 (1902), p. 43; *Picard,* Paris C. R. 124 (1897), p. 1490 und *Painlevé,* Paris C. R. 122 (1896), p. 769; 134 (1902), p. 808. Man siehe auch bei *Castelnuovo,* Acc. Linc. Rend. 14_5 (1905), I, p. 545, 593 u. 655 und bei *Severi*, Pal. Rend. 21 (1906), p. 257. Eine zusammenfassende Darstellung der folgenden Sätze hat *Laurent* [Traité d'Analyse 4 (1889), p. 434] gegeben.

bilde definiert. Betrachtet man nun die Gesamtheit Γ derjenigen Punkte im Parallelotop P, welche entweder diesem Gebilde angehören oder Stellen desselben äquivalent sind, und faßt das Parallelotop P als eine geschlossene Mannigfaltigkeit auf, indem man je zwei äquivalente Punkte seiner Begrenzung als identisch annimmt, so bildet Γ eine geschlossene Fläche, für welche die *Riemann*schen Existenzsätze durch die Methoden von *Schwarz* und *Neumann* (II B 1, Nr. 22, II A 7 b, Nr. 28) zu erweisen sind und welche daher ein algebraisches Gebilde G definiert. Auf diesem sind die u_μ Integrale 1. Gattung, deren Perioden Ω sich linear und ganzzahlig aus den Größen $P_{\mu\alpha}\binom{\mu=1,2,\dots p}{\alpha=1,2,\dots 2p}$ zusammensetzen. Das Geschlecht q von G ist dabei im allgemeinen größer als p und das Gebilde G ein spezielles (Nr. 119). Indem man nun in den zwischen den $\Omega_{\mu\varepsilon}\binom{\mu=1,2,\dots p}{\varepsilon=1,2,\dots 2q}$ bestehenden Bilinearrelationen (vgl. II B 2, Nr. 17) diese durch ihre linearen Ausdrücke in den $P_{\mu\alpha}$

$$\Omega_{\mu\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^{2p} m_{\varepsilon\alpha} P_{\mu\alpha} \qquad \binom{\mu=1,2,\dots p}{\varepsilon=1,2,\dots 2q} \tag{626}$$

ersetzt, erhält man solche Relationen zwischen den $P_{\mu\alpha}$ selbst, welche man noch durch den größten gemeinsamen Teiler t[324]) ihrer Koeffizienten dividieren kann; und indem man weiter die Summen von p Integralen 1. Gattung gebildet für p Stellen $x_1, x_2, \dots x_p$ auf G für die Variablen u in die Funktionen f einsetzt, erweisen sich diese als algebraisch und symmetrisch von den x abhängig. Man gelangt so zu dem grundlegenden Satze:

I. Gibt es zu den Perioden $P_{\mu\alpha}\binom{\mu=1,2,\dots p}{\alpha=1,2,\dots 2p}$ eine einwertige $2p$-fach periodische analytische Funktion, welche im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzt und welche nicht als Funktion von weniger denn p linearen Verbindungen der Variablen darstellbar ist, so gibt es auch mindestens ein eindimensionales algebraisches Gebilde von einem Geschlecht $q \geqq p$, auf welchem p linear unabhängige Integrale erster Gattung existieren, deren Perioden lineare Funktionen der $P_{\mu\alpha}$ mit ganzzahligen Koeffizienten sind. Die sämtlichen Funktionen des genannten Charakters lassen sich als von p Stellen dieses Gebildes ohne wesentliche Singularität eindeutig abhängig darstellen und sind daher algebraische Funktionen von p unabhängigen Variablen.

Damit ist die Basis für den Beweis der *Riemann-Weierstraß*schen Sätze gewonnen; diese Sätze selbst lassen sich folgendermaßen formulieren:

---

324) Über die Rolle, welche dieser gemeinsame Faktor t spielt, siehe Nr. 117.

II. Sind $P_{1\alpha}, \ldots P_{p\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots 2p)$ die $2p$ Periodensysteme einer $2p$-fach periodischen Funktion von der in I bezeichneten Art, so genügen diese $2p^2$ Größen $P_{\mu\alpha}$ stets $\frac{1}{2}(p-1)\,p$ Bedingungen

$$\sum_{\alpha=1}^{2p}\sum_{\beta=1}^{2p} k_{\alpha\beta} P_{\mu\alpha} P_{\nu\beta} = 0, \tag{627}$$

in denen die $k_{\alpha\beta}$ $4p^2$ ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Teiler bezeichnen, so beschaffen, daß $k_{\alpha\alpha} = 0$, $k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha} = 0$ und die Determinante $|k_{\alpha\beta}| \neq 0$ ist.

Sind ferner $P_\alpha = p_\alpha + i p_\alpha'$ $(\alpha = 1, 2, \ldots 2p)$ die korrespondierenden Änderungen irgendeiner linearen Verbindung der u, so ist die Bilinearform $\sum_\alpha \sum_\beta k_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta'$ stets von dem gleichen Vorzeichen und man kann daher, wenn man gegebenenfalls alle $k_{\alpha\beta}$ durch $-k_{\alpha\beta}$ ersetzt, immer voraussetzen, daß die Ungleichung[326])

$$\sum_{\alpha=1}^{2p}\sum_{\beta=1}^{2p} k_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta' > 0 \tag{628}$$

erfüllt ist.

Aus dem Bestehen der Gleichungen (627) sollte man schließen, daß im Gebiete der Funktionen mehrerer Veränderlichen (anders als im Falle $p = 1$, wo jedes Parallelogramm der Ebene als Periodenparallelogramm einer doppelt periodischen Funktion auftreten kann) ein Parallelotop des Raumes von $2p$ Dimensionen gewissen Bedingungen genügen müsse, um Periodenparallelotop eines Systems $2p$-fach periodischer Funktionen sein zu können; aber *Wirtinger*[327]) hat bewiesen, daß dies nicht der Fall ist, daß man vielmehr ein beliebig gegebenes Parallelotop als Periodenparallelotop $2p$-fach periodischer Funktionen auffassen kann, wenn man nur die komplexen Variablen darin entsprechend orientiert, und zwar ohne an der Maßbestimmung des Gebietes etwas zu ändern.

III. Sind $f_1(\!(u)\!)$, $f_2(\!(u)\!)$, $\ldots f_p(\!(u)\!)$ p $2p$-fach periodische Funktionen der in I bezeichneten Art, mit den nämlichen Perioden und von der Beschaffenheit, daß ihre Funktionaldeterminante nicht identisch verschwindet, so hat das Gleichungensystem

$$f_1(\!(u)\!) = c_1,\ f_2(\!(u)\!) = c_2, \ldots f_p(\!(u)\!) = c_p, \tag{629}$$

wenn man von singulären Werten der c absieht, nur eine endliche Anzahl m nach den Periodensystemen inkongruenter Lösungen $u_1, \ldots u_p$

326) In welcher Weise man diese Bedingung, ähnlich wie es *Krazer* und *Prym* („N. G.", p. 4) für die Konvergenzbedingung der Thetareihe getan haben, durch eine Reihe von Ungleichungen für die reellen und lateralen Teile der $P_{\mu\alpha}$ ersetzen kann, zeigt *Scorza*, Pal. Rend. 36 (1913), p. 386.

327) Acta math. 26 (1902), p. 135.

Für diese ist die Funktionaldeterminante der p Funktionen im allgemeinen von Null verschieden und es ist die Anzahl m die gleiche für alle nichtsingulären Wertesysteme $c_1, \ldots c_p$.

IV. Ist $f_{p+1}(\!(u)\!)$ eine $p+1^{\text{te}}$ $2p$-fach periodische Funktion der in I bezeichneten Art, unter deren Periodensystemen sich alle Periodensysteme der Funktionen $f_1(\!(u)\!), \ldots f_p(\!(u)\!)$ finden, so besteht zwischen $f_{p+1}(\!(u)\!)$ und $f_1(\!(u)\!), \ldots f_p(\!(u)\!)$ eine irreduzible algebraische Gleichung, deren Grad in bezug auf $f_{p+1}(\!(u)\!)$ m oder ein Teiler von m ist.

V. Hat die Funktion $f_{p+1}(\!(u)\!)$ speziell die Eigenschaft, daß sie mit $f_1(\!(u)\!), \ldots f_p(\!(u)\!)$ durch eine irreduzible Gleichung m^{ten} (und nicht niedrigeren) Grades zusammenhängt oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß sie für die nichtäquivalenten Lösungen wenigstens eines mit nichtsingulären Werten $c_1, \ldots c_p$ gebildeten Gleichungensystems (629) lauter verschiedene Werte annimmt, so läßt sich jede mit den Perioden $P_{\mu\alpha}$ $2p$-fach periodische Funktion $f(\!(u)\!)$ der in I bezeichneten Art rational durch die Funktionen $f_1(\!(u)\!), \ldots f_p(\!(u)\!)$, $f_{p+1}(\!(u)\!)$ ausdrücken.

Besitzt insbesondere $f_{p+1}(\!(u)\!)$ die Perioden $P_{\mu\alpha}$ als primitive Perioden, so kann die Darstellung einer beliebigen Funktion $f(\!(u)\!)$ auch durch $f_{p+1}(\!(u)\!)$ und ihre p ersten partiellen Derivierten geschehen.

VI. Das System der Funktionen $f_1(\!(u)\!), \ldots f_p(\!(u)\!)$ besitzt ein algebraisches Additionstheorem.[328])

Da die in Nr. 2 definierten *Abel*schen Funktionen $2p$-fach periodische Funktionen der in I bezeichneten Art sind, so gelten für sie die vorstehenden Sätze.

114. Riemannsche Matrizen[329]). Sind $P_{1\alpha}, P_{2\alpha}, \ldots P_{p\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots 2p)$ die $2p$ Periodensysteme einer $2p$-fach periodischen Funktion von der im vorigen Paragraphen betrachteten Art, so wird das System der $2p^2$ Größen

$$\| P_{\mu\alpha} \| \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots p \\ \alpha = 1, 2, \ldots 2p \end{pmatrix}$$

eine *Riemann*sche Matrix der p^{ten} Ordnung genannt.

Zwei *Riemann*sche Matrizen

$$\| P_{\mu\alpha} \| \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots p \\ \alpha = 1, 2, \ldots 2p \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \| P'_{\nu\beta} \| \quad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots p' \\ \beta = 1, 2, \ldots 2p' \end{pmatrix}$$

heißen miteinander verbunden, wenn zwischen ihren Elementen ein System von pp' bilinearen Relationen

$$\sum_{\alpha=1}^{2p} \sum_{\beta=1}^{2p'} a_{\alpha\beta} P_{\mu\alpha} P'_{\nu\beta} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots p \\ \nu = 1, 2, \ldots p' \end{pmatrix} \tag{630}$$

328) *Weierstraß* hat den Satz VI zum Ausgangspunkt gewählt, siehe Anm. 130.

329) *Scorza*, Acc. Linc. Rend. 25_5 (1916), I, p. 289; Pal. Rend. 41 (1916), p. 262; schon vorher Acc. Linc. Rend. 24_5 (1915), II, p. 445 u. 603.

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ besteht. Bestehen λ verschiedene, linear unabhängige solche Systeme von Bilinearrelationen, so heißt λ der Simultancharakter der beiden Matrizen.

Dieser Begriff wird auch für den Fall beibehalten, daß die beiden Matrizen miteinander identisch sind. Infolge der zwischen den Perioden einer $2p$-fach periodischen Funktion stets existierenden bilinearen Relationen (627) ist dann $\lambda \geqq 1$[330]; man nennt $h = \lambda - 1$ den Index der Multiplikabilität (s. Nr. **125**).

Bei den Relationen (627) ist $a_{\alpha\alpha} = 0$ und $a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 0$ für $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p$, die zugehörige bilineare Form also eine alternierende. Trifft dies bei $k + 1$ von den λ verschiedenen Systemen bilinearer Relationen zu, so heißt k der Index der Singularität (s. Nr. **126**); es ist jedenfalls $k \gtrless h$.

Für die Zahlen λ, h und k gelten die oberen Grenzen

$$\lambda \gtrless 2pp', \quad h \gtrless 2p^2 - 1, \quad k \gtrless p^2 - 1. \tag{631}$$

Man kann aus einer *Riemann*schen Matrix durch zwei verschiedene Prozesse neue ableiten, einmal, indem man an Stelle der Variablen u andere einführt durch eine beliebige lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante, sodann aber auch, indem man an Stelle der $2p$ Periodensysteme andere einführt durch eine unimodulare, ganzzahlige lineare Substitution. Die auf diese Weise aus einer *Riemann*schen Matrix abgeleiteten heißen zu ihr äquivalent. Läßt man bei der Einführung neuer Periodensysteme rationale lineare Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante zu, so entsteht gleichfalls aus einer *Riemann*schen Matrix wieder eine solche; diese soll zu ihr isomorph genannt werden. Beim Übergange von einer *Riemann*schen Matrix zu einer isomorphen ändern die Zahlen h, k und λ ihre Werte nicht.

Sind in einer *Riemann*schen Matrix P, indem q eine positive ganze Zahl $< p$ bezeichnet, diejenigen $q(p-q)$ Elemente $P_{\mu\alpha}$, für welche $\mu \lessgtr q$ und $\alpha > 2q$ ist, sämtlich Null, so bilden die $2q^2$ Größen $P_{\mu\alpha}\binom{\mu = 1, 2, \ldots q}{\alpha = 1, 2, \ldots 2q}$ für sich eine *Riemann*sche Matrix $P^{(1)}$ von der Ordnung q und es gibt unter den zu P isomorphen Matrizen stets eine solche, in der auch die $q(p-q)$ Elemente $P_{\mu\alpha}$, für welche $\mu > q$ und $\alpha \lessgtr 2q$ ist, alle Null sind. Dann bilden auch die $2(p-q)^2$ Größen $P_{\mu\alpha}\binom{\mu = q+1, \ldots p}{\alpha = 2q+1, \ldots 2p}$ eine *Riemann*sche Matrix $P^{(2)}$ von der

330) Um den Fall $p = 1$ einzuschließen, gibt man λ auch in diesem Falle bei allgemeinen Perioden P_1, P_2 den Wert 1, ohne daß diese Annahme irgendwelche Relation zwischen P_1 und P_2 bedeutet.

Ordnung $p - q$ und man nennt P aus $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ zusammengesetzt, $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ in P enthalten und zueinander komplementär.

Ist der Simultancharakter von $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ oder, was dasselbe, der von $P^{(1)}$ und P, den man auch den Immersionskoeffizienten von $P^{(1)}$ in P heißt, Null, so nennt man $P^{(1)}$ in P isoliert und es ist $P^{(2)}$ durch $P^{(1)}$ eindeutig bestimmt. Ist dagegen der Immersionskoeffizient $\lambda > 0$, so gibt es zu $P^{(2)}$ unendlich viele komplementäre Matrizen, die aber in P alle zueinander isomorph sind.

Auf die gleiche Weise kann eine *Riemann*sche Matrix P von der Ordnung p aus einer größeren Anzahl von Matrizen $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(n)}$ zusammengesetzt sein; man sagt dann von diesen, daß sie ein Fundamentalsystem von P bilden. Ist p_μ die Ordnung von $P^{(\mu)}$, h_μ der Index ihrer Multiplikabilität, k_μ der ihrer Singularität und $\lambda_{\mu\nu}$ der Simultancharakter von $P^{(\mu)}$ und $P^{(\nu)}$, so ist für P

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + \cdots + p_n, \\ h &= h_1 + h_2 + \cdots + h_n + n - 1 + 2\sum \lambda_{\mu\nu}, \\ k &= k_1 + k_2 + \cdots + k_n + n - 1 + \sum \lambda_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{632}$$

wo über alle verschiedenen Wertepaare μ, ν zu summieren ist.

Jede Matrix, welche zu einer zusammengesetzten isomorph ist, heißt eine unreine. Für jede unreine Matrix sind h und $k > 0$, aber nicht umgekehrt; erst wenn $h \geqq 2p$ oder $k \geqq 2p - 1$ ist, ist die Matrix sicher eine unreine, da für eine reine Matrix stets

$$h \lesseqgtr 2p - 1, \quad k \lesseqgtr 2p - 2 \quad \text{ist.} \tag{633}$$

Sind $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(n)}$ alle in P isoliert, so ist das Fundamentalsystem eindeutig bestimmt, und wenn alle seine Matrizen reine sind, so enthält P keine Matrizen niedrigeren Grades in sich als $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(n)}$ und ihre Kombinationen, also im ganzen $2^n - 2$. Es ist in diesem Falle, da $h_\mu \lesseqgtr 2p_\mu - 1$ und $k_\mu \lesseqgtr 2p_\mu - 2$ ist,

$$h \lesseqgtr 2p - 1, \quad k \lesseqgtr 2p - n - 1, \tag{634}$$

also in jedem Falle, da n mindestens 2 ist, $k \lesseqgtr 2p - 3$.

Ist umgekehrt keine der Matrizen $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(n)}$ isoliert, so sind sie alle von derselben Ordnung und zueinander isomorph. Es ist dann n ein Teiler von p und

$$\begin{aligned} &p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{p}{n} = q, \\ &h = n^2(h_1 + 1) - 1, \quad k = nk_1 + \frac{n(n-1)}{2} h_1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2}, \end{aligned} \tag{635}$$

wo h_1 und k_1 die allen Matrizen $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(n)}$ gemeinsamen Indizes der Multiplikabilität und Singularität sind. Ist daher $q = 1$

(was bei einem Primzahlgrad p immer eintreten muß), so ist $k_1 = 0$ und, wenn auch $h_1 = 0$ ist,

$$h = p^2 - 1, \quad k = \frac{(p-1)(p+2)}{2}; \tag{636}$$

wenn dagegen $h_1 = 1$ ist, die zu den Matrizen $P^{(\mu)}$ gehörigen elliptischen Funktionen also komplexe Multiplikation zulassen, erreichen h und k ihre Höchstwerte[331])

$$h = 2p^2 - 1, \quad k = p^2 - 1. \tag{637}$$

Hat die Gleichung $2p^{\text{ten}}$ Grades[332])

$$a_0 x^{2p} + a_1 x^{2p-1} + \cdots + a_{2p-1} x + a_{2p} = 0 \tag{638}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten lauter einfache und keine reellen Wurzeln und besitzen ihre imaginären Wurzeln alle als Modul die Quadratwurzel aus der nämlichen rationalen Zahl, so ist, wenn man mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ p ihrer Wurzeln bezeichnet, von denen keine zwei zueinander konjugiert komplex sind,

$$\| \alpha_\mu^\gamma \| \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots p \\ \gamma = 0, 1, \ldots 2p-1 \end{pmatrix} \tag{639}$$

eine *Riemann*sche Matrix, für welche stets $h \geqq 2p - 1$, $k \geqq p - 1$ ist. Ist die Gleichung (638) reduzibel, so ist die Matrix (639) eine unreine und enthält isolierte Matrizen; es ist dann $h > 2p - 1$ und $k > p - 1$. Ist dagegen die Gleichung (638) irreduktibel, so ist die Matrix (639) entweder eine reine und dann haben h und k ihre Minimalwerte $h = 2p - 1$ und $k = p - 1$; oder die Matrix ist eine unreine, welche keine isolierten Matrizen enthält. Welcher von den beiden Fällen eintritt, hängt von der Auswahl der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ ab; so ist z. B., wenn für (638) die Kreisteilungsgleichung 6. Grades genommen und mit α eine primitive 7. Einheitswurzel bezeichnet wird, die Matrix (639) für $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha^2$, $\alpha_3 = \alpha^3$ eine reine Matrix[333]), für welche die Indizes h und k die Werte $h = 5$ und $k = 2$ haben, während für $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha^2$, $\alpha_3 = \alpha^4$ jene unreine Matrix mit den Maximalwerten $h = 17$ und $k = 8$ entsteht, auf welche die von *Haskell*[334]) untersuchte *Klein*sche Kurve 4. Ordnung $x^3 y + y^3 + x = 0$ führt.

331) *Scorza,* Acc. Linc. Rend. 24_5 (1915), II, p. 279 u. 333.

332) *Scorza,* Torino Atti 53 (1918), p. 1008.

333) Nach der Angabe *Scorzas* [Torino Atti 58 (1918), p. 1017] von *Raciti* in einer Dissertation der Universität Catania untersucht.

334) *Haskell,* Diss. Göttingen 1890; vgl. dazu *Klein-Fricke,* Ellipt. Modulfunktionen 1 (1890), p. 702, auch *Baker,* Mult period. funct. 1907, § 75. Auf eine Matrix derselben Art führt die von *Dyck* [Math Ann. 17 (1880), p. 510; dazu *Baker,* a. a. O. § 74] untersuchte Kurve $x^4 + y^4 + 1 = 0$, während für die

Eine *Riemann*sche Matrix mit den Maximalwerten von h und k ist auch jede Matrix

$$\|\varkappa_{\mu\alpha} + i\lambda_{\mu\alpha}\|, \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \dots p \\ \alpha = 1, 2, \dots 2p\end{pmatrix} \tag{640}$$

in der die $\varkappa$, λ beliebige rationale Zahlen sind, für welche nur die aus ihnen gebildete Determinante $2p^{\text{ten}}$ Grades einen von Null verschiedenen Wert besitzen muß.[335])

Während also, wie die vorstehenden Beispiele zeigen, h und k ihre Höchstwerte (und zwar immer gleichzeitig) wirklich erreichen können, nehmen sie nicht auch alle kleineren Werte an.[336]) Nur die Werte $0, 1, 2, \dots 2p-1$ treten sowohl für h wie für k alle auf; dagegen nimmt z. B. im Falle $p = 2$ h außer den Werten 0, 1, 2, 3 nur noch den Wert $h = 7$ an und für $p = 3$ werden außer den Werten 0, 1, 2, 3, 4, 5 von h nur noch die Werte $h = 8$, 9 und 17, von k nur noch der Wert $k = 8$ angenommen. Auch λ nimmt nicht alle Werte von 0 bis $2pp'$ an, z. B. für $p = 1$ und $p' = 2$ niemals den Wert 3. Für eine reine Matrix von der Primzahlordnung p sind nur die vier Fälle

$$\begin{array}{llll} h = 0, & k = 0; & h = 1, & k = 0; \\ h = p-1, & k = p-1; & h = 2p-1, & k = p-1 \end{array} \tag{641}$$

möglich.[337])

115. Darstellung der allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktionen durch Thetafunktionen. Der Satz II (Nr. **113**) führt notwendige Bedingungen für die Existenz einer $2p$-fach periodischen Funktion der in I bezeichneten Art mit gegebenen Perioden $P_{\mu\alpha}$ an; daß diese Bedingungen auch hinreichende sind, wird gezeigt, indem man aus dem Satze II die analytische Darstellung der $2p$-fach periodischen Funktionen ableitet.

Um zu dieser Darstellung zu gelangen, führe man an Stelle der $2p$ Periodensysteme $P_{\mu\alpha}$ durch eine unimodulare ganzzahlige lineare Substitution $2p$ neue Periodensysteme $\omega_{\mu\alpha}$ ein, für welche die in (627)

---

*Snyder*sche Kurve 5. Ordnung vom Geschlecht 6 $x^4y + y^4 + x + 0$ [vgl. *Snyder*, Amer. J. 30 (1908), p. 1; *Ciani*, Pal. Rend. 36 (1913), p. 58] $h = 17$ und $k = 8$ ist; dazu *Scorza*, Catania Acc. Gioen. 1^0_5 (1917), Mem. XVI.

335) *Scorza*, Acc. Linc. Rend. 24_5 (1915), II, p. 337. Es ergibt sich daraus der schon von *Poincaré* [Paris C. R. 99 (1884), p. 855, Amer. J. 8 (1886), p. 308 und Acta math. 26 (1902), p. 92] bemerkte Satz, daß jede Matrix einer solchen, deren Integrale auf elliptische reduzierbar sind, unendlich benachbart ist.

336) Näheres bei *Scorza*, Acc. Linc. Rend. 25 (1916), p. 295 und Pal. Rend. 41 (1916), p. 313 f.

337) *Scorza*, Paris C. R. 167 (1918), p. 454; man vgl. damit *Humbert* u. *Levy*, Paris C. R. 158 (1914), p. 1609.

und (628) auftretende bilineare Form in die Normalform übergeht, welche also den $\frac{1}{2}(p-1)p$ Bedingungen

$$\sum_{\lambda=1}^{p} e_\lambda(\omega_{\mu\lambda}\omega_{\nu,p+\lambda} - \omega_{\mu,p+\lambda}\omega_{\nu\lambda}) = 0, \quad (\mu,\nu=1,2,\ldots p;\mu<\nu) \tag{642}$$

wobei die e positive ganze Zahlen bezeichnen, von denen für jedes λ $e_{\lambda+1}$ durch e_λ teilbar und $e_1 = 1$ ist, genügen, während für die korrespondierenden Änderungen $\omega_\alpha = o_\alpha + o_\alpha' i$, irgendeiner linearen Verbindung der u

$$\sum_{\lambda=1}^{p} e_\lambda(o_\lambda o'_{p+\lambda} - o_{p+\lambda}o'_\lambda) > 0 \tag{643}$$

ist. Führt man hierauf unter Beachtung, daß die Determinante $|\omega_{\mu\nu}|$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots p)$, wie aus den letzten Ungleichungen folgt, einen von Null verschiedenen Wert hat, an Stelle der bisherigen Variablen u neue v ein durch die Gleichungen

$$\pi i u_\mu = \sum_{\varrho=1}^{p} e_\varrho \omega_{\mu\varrho} v_\varrho \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{644}$$

und definiert gleichzeitig ein Größensystem $a_{\mu\nu}$ durch die Gleichungen

$$\pi i \omega_{\mu,p+\lambda} = \sum_{\varrho=1}^{p} e_\varrho \omega_{\mu\varrho} a_{\varrho\lambda}, \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots p) \tag{645}$$

so sind die Perioden in bezug auf die Variablen v

$$P_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\frac{\pi i}{e_\mu}, \quad P_{\mu,p+\nu} = a_{\mu\nu}, \quad (\mu,\nu = 1, 2, \ldots p) \tag{646}$$

wo $\delta_{\mu\nu} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu \end{matrix}$ ist, und die Bilinearrelationen (642) liefern für die Größen a die $\frac{1}{2}(p-1)p$ Bedingungen

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p; \mu < \nu) \tag{647}$$

während die Ungleichheiten (643) die Eigenschaft nach sich ziehen, daß die aus den reellen Teilen $a'_{\mu\nu}$ der Größen $a_{\mu\nu} = a'_{\mu\nu} + a''_{\mu\nu} i$ gebildete quadratische Form

$$\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} a'_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

eine negative ist. Funktionen mit solchen Perioden können aber mit Hilfe von Thetafunktionen auf folgende Weise gebildet werden.

Auf Grund der Formeln (83), (84) sind die Quotienten zweier zu der nämlichen Charakeristik $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ gehörigen Thetafunktionen n^{ter} Ordnung (und ebenso die zweiten logarithmischen Derivierten dieser Funktionen) $2p$-fach periodische Funktionen mit den Perioden

$$P_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\pi i, \quad P_{\mu,p+\nu} = a_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p) \tag{648}$$

und es finden sich unter ihnen stets solche, welche diese Perioden als primitive besitzen.[338])

Nun wurde aber soeben gezeigt, daß jede $2p$-fach periodische Funktion der in I bezeichneten Art durch Einführung passend gewählter Variablen in eine mit den Perioden (646) periodische Funktion verwandelt werden kann, und sie läßt sich also, da sie gleichfalls die Perioden (647) besitzt, unter Benutzung des Satzes V rational durch $p+1$ passend gewählte Quotienten von Thetafunktionen n^{ter} Ordnung darstellen. Man hat so den Satz:

VII. Alle einwertigen $2p$-fach periodischen analytischen Funktionen, welche im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzen und welche nicht als Funktionen von weniger denn p linearen Verbindungen der Variablen darstellbar sind, lassen sich rational durch passend gewählte Thetafunktionen ausdrücken.

Man kann aber auch Funktionen mit den Perioden (646) direkt mit Hilfe von Thetafunktionen herstellen; dazu wird man, was am einfachsten mit Hilfe der Formel (86) geschieht, solche Thetafunktionen n^{ter} Ordnung $\Phi(\!(v)\!)$ bilden, welche den Gleichungen

$$(649)\qquad \Phi(v_1 \mid \cdots \mid v_\nu + \frac{\pi i}{e_\nu} \mid \cdots \mid v_p) = \Phi(v_1 \mid \cdots \mid v_\nu \mid \cdots \mid v_p) e^{2g_\nu \pi i},$$

$$\Phi(v_1 + a_{1\nu} \mid \cdots \mid v_p + a_{p\nu}) = \Phi(v_1 \mid \cdots \mid v_p) e^{-2nv_\nu - n a_{\nu\nu} - 2h_\nu \pi i}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots p)$$

oder, was dasselbe, bei beliebigen ganzzahligen Werten der $\varkappa$, λ der Gleichung

$$(650)\quad \Phi\left(\left(v + \left|\begin{matrix}\varkappa\\ \lambda\end{matrix}\right|\right)\right) = \Phi(\!(v)\!)\, e^{-n\sum_\mu\sum_\nu a_{\mu\nu}\varkappa_\mu\varkappa_\nu - 2n\sum_\mu \varkappa_\mu v_\mu - 2\sum_\mu(\varkappa_\mu h_\mu - \lambda_\mu g_\mu)\pi}$$

genügen. Man erkennt dabei, daß man n durch jede der Zahlen $e_1, \ldots e_p$ (oder was dasselbe durch e_p) teilbar annehmen muß, gelangt aber unter dieser Annahme sofort zur Darstellung der allgemeinsten derartigen Funktion durch Thetafunktionen, sowie zu der Erkenntnis, daß alle diese Funktionen durch $\dfrac{n^p}{e_1 e_2 \ldots e_p}$ unter ihnen linear und homogen darstellbar sind.[339]) Damit ist zugleich bewiesen, daß die in Satz II

338) Diesen Satz hat für allgemeinere Funktionen *Frobenius* [J. f. Math 97 (1896), p. 42] bewiesen.

339) *Wirtinger,* Monatsh. f. Math. 7 (1896), p. 1; *Krazer,* „Thetaf.", p. 126. Die Existenz einer algebraischen Gleichung zwischen $p+1$ $2p$-fach periodischen Funktionen ergibt sich aus dieser Darstellung unmittelbar auf Grund des in Nr. 34 angegebenen Satzes, nach welchem eine solche stets zwischen $p+2$ Thetafunktionen gleicher Ordnung und gleicher Charakteristik besteht.

für die Perioden einer $2p$-fach periodischen Funktion der dort bezeichneten Art angegebenen notwendigen Bedingungen auch hinreichende sind, indem die Bildung solcher Funktionen mit vorgeschriebenen, diesen Bedingungen genügenden Perioden nunmehr mit Hilfe von Thetafunktionen durchgeführt ist.

Nachdem durch die letzten Ausführungen die Existenz $2p$-fach periodischer Funktionen der in I bezeichneten Art erwiesen ist, deren Perioden $P_{\mu\alpha}$ die Werte (648) haben, in denen die $a_{\mu'\nu}$ allgemeine, nur der Konvergenzbedingung unterworfene Thetamodulen sind, folgt aus dem Satze I wiederum das in Nr. **34** erhaltene Resultat, daß es zu der allgemeinen Thetafunktion von p Veränderlichen mindestens ein algebraisches Gebilde von einem Geschlecht $q \geqq p$ gibt, auf welchem p linearunabhängige Integrale 1. Gattung existieren, deren Perioden sich aus den $2p$ Thetaperioden ganzzahlig zusammensetzen.

116. Jacobische Funktionen. Man kann den Begriff der Thetafunktionen erweitern, indem man nach solchen einwertigen und für alle endlichen Werte der Argumente stetigen Funktionen der p Variablen $u_1, \ldots u_p$ frägt, welche bei Änderung dieser um ein Periodensystem einen Faktor annehmen, dessen Logarithmus irgendeine lineare Funktion der Argumente ist.[340]) Verzichtet man dabei gleichzeitig auf die im vorigen Paragraphen durchgeführte Normierung der Perioden, so erhält man jene Funktionen, welche *Frobenius Jacobi*sche genannt hat.[341])

340) Solche Funktionen werden nach *Poincaré* [Amer. J. 8 (1886), p. 316] Zwischenfunktionen (fonctions intermédiaires) genannt, ein Name, der auf *Briot* und *Bouquet* [Th. d. fonct. elliptiques. 2me éd (1875), p. 236] zurückgeht, und *Poincaré* zeigt bereits, daß sich diese Zwischenfunktionen durch Thetafunktionen ausdrücken lassen. Genauer ist dieses Verhältnis für den Fall $p = 2$ untersucht worden. Hier ergibt sich [*Humbert*, J. de Math. 5_5 (1899), p. 233, auch *Bagnera* und *de Franchis*, Pal. Rend. 30 (1910), p. 185], daß sich jede solche Zwischenfunktion, solange die Modulen a allgemeine sind, nur um einen Faktor $e^{\varphi(u)}$, wo $\varphi(u)$ eine ganze rationale Funktion zweiten Grades der u ist, von einer Thetafunktion höherer Ordnung $\Theta_n(u - e)$ unterscheidet, daß es dagegen, wenn die Modulen singuläre (Nr. **126**) sind, noch andere Zwischenfunktionen gibt; diese lassen sich aber auch durch Thetafunktionen ausdrücken, allerdings mit Argumenten und Modulen, welche sich aus den ursprünglichen Argumenten bzw. Modulen linear zusammensetzen.

341) J. f. Math. 97 (1884), p. 16 u. 188. In Anlehnung daran sollen im folgenden auch die obigen Funktionen Φ *Jacobi*sche Funktionen genannt werden (vgl. übrigens auch Anm. 272). Für den Fall $p = 2$ hat *Appell* [J. de Math. 7_4 (1891), p. 157, vorher Paris C. R. 108 (1889), p. 607, 110 (1890), p. 32 u. 181, 111 (1890), p. 636; vgl. dazu *Poincaré*, Acta math. 2 (1883), p. 97] gezeigt, daß die vierfach periodischen Funktionen zweier Veränderlichen zunächst als Quo-

Eine *Jacobi*sche Funktion vom Range p ist also eine einwertige, im Endlichen überall stetige Funktion $\varphi(u_1, \ldots u_p)$ der p Veränderlichen $u_1, \ldots u_p$, welche $2p$ Gleichungen von der Form

$$\varphi(u_1 + a_{1\alpha}, \ldots u_p + a_{p\alpha}) = \varphi(u_1, \ldots u_p)\, e^{2\pi i \left[c_\alpha + \sum_\lambda b_{\lambda\alpha}\left(u_\lambda + \frac{1}{2}a_{\lambda\alpha}\right)\right]} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots 2p) \tag{651}$$

genügt. Jedes der $2p$ Systeme $a_{1\alpha}, \ldots a_{p\alpha}$ heißt eine Periode 1. Gattung, jedes System $b_{1\alpha}, \ldots b_{p\alpha}$ eine Periode 2. Gattung, die $2p$ Größen c_α die Parameter der Funktion. Die Größen a, b genügen stets $p(2p-1)$ Bedingungen

$$\sum_\lambda (a_{\lambda\alpha} b_{\lambda\beta} - a_{\lambda\beta} b_{\lambda\alpha}) = k_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots 2p;\ \alpha < \beta) \tag{652}$$

bei denen die $k_{\alpha\beta}$ ganze Zahlen bezeichnen. Erfüllen weiter $2p$ Größen x_α die p linearen Gleichungen $\sum_\alpha a_{\lambda\alpha} x_\alpha = 0$, so ist der Ausdruck

$$i \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}\, x_\alpha^0\, x_\beta,$$

in welchem x_α^0 die zu x_α konjugierte komplexe Zahl bezeichnet, beständig positiv. Es besitzt ferner die Determinante der $4p^2$ Größen $a_{\lambda\alpha}, b_{\lambda\alpha}$ stets einen von Null verschiedenen Wert l, der gleich der Quadratwurzel aus der Determinante der $4p^2$ Zahlen $k_{\alpha\beta}$ ist und die Ordnung der *Jacobi*schen Funktion genannt wird.

Bezüglich dieser *Jacobi*schen Funktionen gelten analog den Thetafunktionen die folgenden Sätze:

Es gibt, abgesehen von einem konstanten Faktor, nur eine *Jacobi*sche Funktion 1. Ordnung, welche die Größen $a_{\lambda\alpha}$, $b_{\lambda\alpha}$ als Perioden hat und beliebig vorgeschriebene Parameter besitzt.

Aus solchen *Jacobi*schen Funktionen 1. Ordnung lassen sich diejenigen höherer Ordnung zusammensetzen.

Nennt man zwei *Jacobi*sche Funktionen, welche die nämlichen Perioden und Parameter haben, gleichändrig, so ist die Anzahl der linearunabhängigen gleichändrigen *Jacobi*schen Funktionen l^{ter} Ordnung ihrer Ordnung gleich. Zwischen $l+1$ gleichändrigen *Jacobi*schen Funktionen l^{ter} Ordnung besteht eine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten. Zwischen je $p+2$ gleichändrigen *Jacobi*schen Funktionen vom Range p besteht eine homogene algebraische Gleichung.

tienten zweiter Potenzreihen dargestellt und hierauf diese letzteren durch Multiplikation mit einem passend gewählten gemeinsamen Faktor in *Jacobi*sche Funktionen im *Frobenius*schen Sinne verwandelt werden können.

In die Darstellung einer *Jacobi*schen Funktion vom Range p durch eine p-fach unendliche Reihe gehen die $2p$ Perioden in unsymmetrischer Weise ein, indem die Vermehrung der Variablen um p der Perioden 1. Gattung jedes Glied der Reihe ungeändert läßt, während die Vermehrung um eine der p anderen verschiedene Glieder der Reihe ineinander überführt. *Frobenius* gibt in seiner zweiten Abhandlung eine Darstellung durch eine $2p$-fach unendliche Reihe, welche in bezug auf alle $2p$ Perioden symmetrisch ist.

117. Die Weierstraßschen mehrdeutigen Umkehrprobleme. *Weierstraß*[392]) hat bemerkt, daß mit Hilfe der allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktionen gewisse mehrdeutige Umkehrprobleme lösbar sind. Bezeichnet nämlich G eines der in Nr. **113** eingeführten algebraischen Gebilde, so kann man nach den Stellen $x_1, \ldots x_p$ auf ihm fragen, welche die nach den Perioden als Modul verstandenen Kongruenzen

$$\sum_{\nu=1}^{p} \int^{x_\nu} du_\mu \equiv w_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots p) \tag{653}$$

erfüllen, wenn die u_μ die dort erwähnten Integrale 1. Gattung, die w_μ gegebene Größen bedeuten.[343]) Da die mit den gegebenen Perioden $2p$-fach periodischen Funktionen auf dem algebraischen Gebilde G einwertige symmetrische Funktionen der Stellen $x_1, \ldots x_p$ sind, so ist klar, daß mit ihrer Hilfe ein System von Gleichungen gebildet werden kann, welches die x algebraisch und mehrdeutig bestimmt. Die Anzahl der Lösungen der Kongruenzen (653) hat *Wirtinger*[344]) dadurch ermittelt, daß er berechnete, wie oft das Parallelotop P von den w überdeckt wird, wenn die x unabhängig voneinander das Gebilde G einmal durchlaufen; er fand so für diese Anzahl

$$l = t^p e_1 e_2 \ldots e_p = t^p \,|\, k_{\alpha\beta} \,|^{1/2}, \tag{654}$$

wo t den in Nr. **113** erwähnten, von der Auswahl des Gebildes G abhängigen größten gemeinsamen Teiler bedeutet.

Soll das Umkehrproblem eindeutig sein, so ist es notwendig ein *Jacobi*sches oder einer seiner Grenzfälle.

118. Die Wirtingerschen Lösungssätze. Andere Sätze beziehen sich auf die Lösungen eines Gleichungensystems, welches entsteht, wenn

342) Berl. Ber. 1869, p. 853 = Math. W. 2 (1895), p. 45.

343) Hier wird im allgemeinen nur ein Teil der Integrale 1. Gattung singulärer Gebilde zur Bildung des Umkehrproblems verwendet; werden alle Integrale 1. Gattung verwendet, so kann auch ein allgemeines Gebilde zugrunde gelegt werden und es entsteht das *Jacobi*sche Umkehrproblem.

344) Monatsh. f. Math. 7 (1896), p. 11; Acta math. 26 (1902), p. 140.

man eine Reihe *Jacobi*scher Funktionen der Null gleich setzt. Der allgemeinste Satz ist der folgende.[345])

Werden bei einem System von s *Jacobi*schen Funktionen $\Phi_k(w_1, \dots w_p)$ $(k = 1, 2, \dots s)$ in die ersten r derselben für die w_μ die Ausdrücke

$$w_\mu = \sum_{\varrho=1}^{s-1} \int^{x_\varrho} du_\mu - e_{\mu k}, \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \dots p \\ k = 1, 2, \dots r \end{pmatrix} \tag{655}$$

in die letzten $s - r$ dagegen die Ausdrücke

$$w_\mu = \sum_{\varrho=1}^{s-1} \int^{x_\varrho} du_\mu + \int^{x_s} du_\mu - e_{\mu k} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \dots p \\ k = r+1, \dots s \end{pmatrix} \tag{656}$$

substituiert, so hat das Gleichungensystem

$$\Phi_k(w_1, w_2, \dots w_p) = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots s) \tag{657}$$

am algebraischen Gebilde G der u_μ nach x_s im allgemeinen

$$l = t^s n_1 n_2 \dots n_s \frac{p!}{(p-s+1)!} (s-r)(p-s+r+1) \tag{658}$$

Lösungen, wenn $n_1, n_2, \dots n_s$ die Ordnungen der *Jacobi*schen Funktionen, t aber den in Nr. **113** erwähnten größten gemeinsamen Teiler bezeichnet. Ferner ist, wenn $x_s^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \dots l)$ die verschiedenen Lösungen bedeuten, bis auf einen von allen $e_{\mu k}$ unabhängigen Summanden

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \int^{x_s^{(\lambda)}} du_\mu = -t^s n_1 n_2 \dots n_s \frac{s(p-1)!}{(p-s+1)!} \cdot \left[(s-r) \sum_{k=1}^{r} e_{\mu k} - (p-s+r+1) \sum_{k=r+1}^{s} e_{\mu k} \right] \quad (\mu = 1, 2, \dots p) \tag{659}$$

Für $r = 0$ ergibt sich hieraus im Zusammenhang mit der durch (654) bestimmten Anzahl für die Lösungen des oben besprochenen mehrdeutigen Umkehrproblems der weitere Satz:

Betrachtet man in den Gleichungen

$$\Phi_k(u_1 - e_{1k}, \dots u_p - e_{pk}) = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots p) \tag{660}$$

wo $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_p$ p *Jacobi*sche Funktionen von beliebigen Ordnungen $n_1, n_2, \dots n_p$ bezeichnen und die e gegebene Konstanten sind, die p Größen $u_1, u_2, \dots u_p$ als Unbekannte, so erhält man für die Anzahl

345) *Wirtinger*, Wien. Anz. 32 (1895), p. 58; Monatsh. f. Math. 7 (1896), p. 20 und Acta math. 26 (1902), p. 142; vgl. auch *Poincaré*, Paris C. R. 120 (1895), p. 239; J. de Math. 1_5 (1895), p. 219 und *Baker*, Lond. M. S. Proc. 10_2 (1912), p. 353.

der in einem Periodenparallelotop gelegenen Lösungen[346])

$$l = \frac{n_1 n_2 \dots n_p}{e_1 e_2 \dots e_p} p!, \tag{661}$$

und wenn man diese Lösungen mit $u_1^{(\lambda)}, \dots u_p^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \dots l)$ bezeichnet, für deren Summe[347])

$$\sum_{\lambda=1}^{l} u_\mu^{(\lambda)} = \frac{n_1 n_2 \dots n_p}{e_1 e_2 \dots e_p} (p-1)! \sum_{k=1}^{p} e_{\mu k} + T_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \dots p) \tag{662}$$

wo T_μ von den $e_{\mu k}$ nicht abhängt.

XV. Reduzierbare Abelsche Integrale.

119. Allgemeine Sätze über reduzierbare Integrale. In Nr. **113** wurden wir, wie schon früher in Nr **34**, auf spezielle algebraische Gebilde geführt, welche durch die Eigenschaft charakterisiert sind, daß, wenn q das Geschlecht eines solchen Gebildes ist, sich unter seinen Integralen 1. Gattung $p < q$ linearunabhängige $u_1, u_2, \dots u_p$ finden, deren $2pq$ Periodizitätsmodulen $\Omega_{\mu\varepsilon}\binom{\mu = 1, 2, \dots p}{\varepsilon = 1, 2, \dots 2q}$ linear und ganzzahlig in der Form (626) aus $2p^2$ Größen $P_{\mu\alpha}\binom{\mu = 1, 2, \dots p}{\alpha = 1, 2, \dots 2p}$ zusammengesetzt werden können. Diese letzteren erfüllen dann stets Bedingungen von der Form (627) und bilden daher eine *Riemann*sche Matrix p^{ter} Ordnung; jene Matrix von der Ordnung q aber, welche aus den $2q^2$ Periodizitätsmodulen eines vollen Systems von q linearunabhängigen Integralen des Gebildes besteht, ist eine unreine und es finden auf sie die in Nr. **114** über solche Matrizen angegebenen Resultate Anwendung.

Sagt man von den aus $u_1, u_2, \dots u_p$ sich linear zusammensetzenden Integralen, daß sie ein reguläres System A von ∞^{p-1} reduzierbaren Integralen bilden, so gelten die folgenden Sätze[348]):

346) Für $e_1 = e_2 = \dots = e_p = 1$ bei *Poincaré,* Paris C. R. 92 (1881), p. 958 und S. M. F. Bull. 11 (1883), p. 129.

347) Für $e_1 = e_2 = \dots = e_p = 1$ und $n_1 = n_2 = \dots = n_p = 1$ bei *Poincaré,* Amer. J. 8 (1886), p. 342.

348) Die Reduktion *Abel*scher Integrale auf solche niedrigeren Geschlechts haben zuerst *Picard* [S. M. F. Bull. 11 (1883), p. 25] und *Poincaré* [S. M. F. Bull 12 (1884), p. 124; Paris C. R. 102 (1886), p. 915; Amer. J. 8 (1886), p. 289; s. auch Pal. Rend. 27 (1909), p. 281) und später *Severi* [Acc. Linc. Rend. 23_5 (1914), I, p. 581 u. 641] und *Scorza* [Acc. Linc. Rend. 23_5 (1914), II, p. 556; 24_5 (1915), I, p. 412, 645 u. II, p. 393] behandelt. Von den hier folgenden Sätzen wurde zuerst der Satz III und zwar von *Poincaré* [Amer. J. 8 (1886), p. 289; siehe auch *Rosati*, Torino Atti 50 (1914/5), p. 457] aufgestellt und bewiesen. Genaueres über diesen Satz sagen die in Nr. **114** über zusammengesetze Matrizen

I. Existieren unter den Integralen 1. Gattung einer Klasse zwei (oder mehr) voneinander verschiedene reguläre Systeme A, B von ∞^{m-1} bzw. ∞^{n-1} reduzierbaren Integralen, so bildet ihr größter gemeinsamer Teiler (sistema intersezione) ein gleichfalls reguläres System H von ∞^{r-1} und ihr kleinstes gemeinsame Vielfache (sist. congiungente) ein reguläres System K von ∞^{s-1} reduzierbaren Integralen und es ist stets $r+s=m+n$, außer wenn $r=0$, in welchem Falle $s=m+n-1$ ist; die Systeme A und B heißen in letzterem Falle voneinander unabhängig.

II. Existieren unter den Integralen 1. Gattung einer Klasse zwei (oder mehr) voneinander unabhängige reguläre Systeme A bzw. B von ∞^{m-1} bzw. ∞^{n-1} reduzierbaren Integralen und ein weiteres C von ∞^{r-1} Integralen, das von jedem von ihnen unabhängig, aber in ihrem gemeinsamen Vielfachen K enthalten ist, so existieren unter den Integralen dieser Klasse unendlich viele reguläre Systeme von ∞^{r-1} reduzierbaren Integralen.

III. Enthält eine Klasse *Abel*scher Integrale 1. Gattung vom Geschlecht $q>p$ ein reguläres System A von ∞^{p-1} reduzierbaren Integralen, so enthält sie immer auch ein dazu komplementäres reguläres System B von ∞^{q-p-1} reduzierbaren Integralen, so daß die Systeme A und B voneinander unabhängig sind ($r=0$) und ihr kleinstes gemeinsame Vielfache alle Integrale der Klasse überhaupt enthält ($s=q$) oder, was dasselbe, p Basisintegrale von A mit $q-p$ Basisintegralen von B zusammen q linearunabhängige Integrale bilden.

IV. Enthält eine Klasse *Abel*scher Integrale vom Geschlecht q ein reguläres System A von ∞^{p-1} reduzierbaren Integralen und damit nach dem vorigen Satze auch ein dazu komplementäres B von ∞^{q-p-1}, so zerfällt die zur Klasse gehörige *Riemann*sche Thetafunktion nach einer Transformation höheren Grades in der Weise, daß die transformierten Thetafunktionen sich linear durch Produkte je einer Theta-

aufgestellten Sätze. Von Satz II findet sich der spezielle Fall: „Ist unter den Integralen 1. Gattung einer Klasse außer den Integralen $J_1, J_2, \dots J_k$ auch ein davon abhängiges Integral $J'=\alpha J_1+\beta J_2+\dots+\varkappa J_k$, wo die $\alpha, \beta, \dots \varkappa$ Konstanten bezeichnen, auf ein elliptisches Integral reduzierbar, so enthält die Klasse unendlich viele solche“ gleichfalls schon bei *Poincaré* [Amer. J. 8 (1886), p. 305], s. auch Anm. 355; der allgemeine Satz II rührt von *Severi* [Acc. Linc. Rend. 23_5 (1914), I, p. 641] her; man vgl. auch dazu Nr. **114**, wo dem Satze II der Fall entspricht, daß die zum Systeme C gehörige *Riemann*sche Matrix nicht isoliert, also ihr Immersionskoeffizient $\lambda>0$ ist [s. *Scorza*, Acc. Linc. Rend. 24_5 (1915), II, p. 449 u. Pal. Rend. 41 (1916), p. 304]. Satz I ist zuerst von *Severi* [Lez. di Geom. algebr. 1908, p. 335, auch Acc. Linc. Rend. 23_5 (1914), I, p. 584] ausgesprochen worden.

funktion von p und einer solchen von $q - p$ Veränderlichen darstellen lassen.

Hält man dieses Resultat mit dem in Nr. **34** erhaltenen und am Ende von Nr. **115** wiederholten zusammen, so ergibt sich der *Wirtinger*sche Satz:

V. Es gibt spezielle Klassen algebraischer Funktionen von einem Geschlecht $q > p$, deren *Riemann*sche Thetafunktionen nach einer Transformation höheren Grades in dem in Satz IV genannten Sinne in Produkte von Thetafunktionen von p und solchen von $q - p$ Variablen zerfallen, derart daß die ersteren allgemeine Thetafunktionen sind.

Ist das hierbei zugrunde gelegte algebraische Gebilde von der Ordnung $2mp$ (vgl. Nr. **34**), so ist diese Transformation vom Grade m. Benutzt man z. B. als Gebilde G einen im allgemeinen zusammenhängend doppelt überdeckten Linearschnitt von M_p, so ist $m = (p-1)!\, 2^{p-1}$; dies ist daher als obere Grenze für den Transformationsgrad anzusehen, mit welchem man immer ausreicht; im einzelnen Falle wird man sich auf Transformationen weit niedrigeren Grades beschränken können.

Bevor auf die Verwertung des Satzes V für die Theorie der Thetafunktionen eingegangen wird, soll zuerst der Fall $p = 1$ näher besprochen werden; dabei kann das Geschlecht des gegebenen algebraischen Gebildes, da jetzt für p der spezielle Wert 1 gesetzt ist, statt wie bisher mit q in gewohnter Weise mit p bezeichnet werden.

120. Reduktion Abelscher Integrale auf elliptische.[349]) Setzen sich die $2p$ Periodizitätsmodulen Ω_α ($\alpha = 1, 2, \ldots 2p$) eines *Abel*schen Integrals vom Geschlecht p aus zwei Größen ω_1, ω_2 zusammen in der Form

$$\Omega_\alpha = m_{\alpha 1}\,\omega_1 + m_{\alpha 2}\,\omega_2, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 2p) \tag{663}$$

so ist es stets durch eine rationale Substitution auf ein elliptisches Integral reduzierbar und umgekehrt.

Ist dann

$$\sum_{\mu=1}^{p} (m_{\mu 1}\, m_{p+\mu,2} - m_{p+\mu,1}\, m_{\mu 2}) = \pm k, \tag{664}$$

so kann man, unter Hinzunahme eines passend gewählten konstanten Faktors, stets erreichen, daß die Periodizitätsmodulen Ω_α

1. im Falle $k = 1$ nach einer linearen, im Falle $k > 1$ nach einer Transformation k^{ten} Grades die Werte

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = \pi i, \quad \Omega_2 = 0, \quad \ldots \quad \Omega_p = 0, \\ &\Omega_{p+1} = a, \quad \Omega_{p+2} = 0, \quad \ldots \quad \Omega_{2p} = 0, \end{aligned} \tag{665}$$

349) Vgl. dazu *Krazer*, „Thetaf.“, p. 469 u. f., auch Straßburg Festschr. 1901.

2. im Falle $k > 1$ nach einer linearen Transformation die Werte

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = \pi i, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0, \quad \ldots \quad \Omega_p = 0, \\ &\Omega_{p+1} = a, \quad \Omega_{p+2} = \frac{\pi i}{k}, \quad \Omega_{p+3} = 0, \quad \ldots \quad \Omega_{2p} = 0 \end{aligned} \tag{666}$$

besitzen, wo a eine komplexe Zahl mit negativem reellen Teile bezeichnet. Nach einer Transformation k^{ten} Grades zerfallen also die zur Klasse gehörigen Thetafunktionen in Produkte einer Thetafunktion von einer und einer solchen von $p - 1$ Veränderlichen, während es unter den unendlich vielen durch lineare Transformation ineinander überführbaren Systemen von Thetamodulen stets eines von der Form

$$\begin{array}{ccccc} a & \frac{\pi i}{k} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\pi i}{k} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2p} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{p2} & a_{p3} & \ldots & a_{pp} \end{array}$$

gibt.[350])

121. Der spezielle Fall $p = 2$.[351]) Damit eine Klasse *Abel*scher Integrale vom Geschlecht 2 ein reduzierbares Integral enthalte, ist notwendig und hinreichend, daß zwischen den Modulen a_{11}, a_{12}, a_{22} der zugehörigen Thetafunktionen eine Gleichung von der Form

$$q_1 \pi i^2 + q_2 a_{11} \pi i + q_3 a_{12} \pi i + q_4 a_{22} \pi i + q_5 (a_{11} a_{12} - a_{12}^2) = 0 \tag{667}$$

bestehe, wo die q ganze Zahlen bezeichnen, für welche der Ausdruck

$$q_3^2 + 4 (q_1 q_5 - q_2 q_4) \tag{668}$$

das Quadrat einer ganzen Zahl ist.[352])

Sind die Modulen a_{11}, a_{12}, a_{22} einer Thetafunktion zweier Veränderlichen durch eine Relation von der Form (667) miteinander verknüpft, für welche der Ausdruck (668) den Wert k^2 besitzt, so können

---

350) Diese Sätze rühren von *Weierstraß* her; die erste kurze Mitteilung darüber findet sich bei *Königsberger* [J. f. Math. 67 (1867), p. 72], eine ausführlichere bei *Kowalewski* [Acta math. 4 (1884), p. 394]; vgl. noch *Biermann*, Wiener Sitzb. 105 (1896), IIa, p. 924; *Picard*, Paris C. R. 92 (1881), p 398 u. 506; 93 (1881), p. 696 u. 1126; 94 (1882), p. 1704; S. M. F. Bull. 12 (1884), p. 153; *Poincaré*, Paris C. R. 99 (1884), p. 853.

351) Vgl. dazu *Krazer*, „Thetaf.", p. 483 u. f.

352) Dazu *Biermann*, Wiener Sitzb. 87 (1883), II, p. 982 u. *Humbert*, Paris C. R. 126 (1898), p. 394 u. 508; J. de Math. 5_5 (1899), p 247. Über jene allgemeineren Thetafunktionen zweier Veränderlichen, deren Modulen einer Relation (667) mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten genügen, siehe Nr. **126**.

dieselben stets durch eine lineare Transformation in a'_{11}, $\frac{\pi i}{k}$, a'_{22}, durch eine Transformation k^{ten} Grades in a'_{11}, 0, a'_{22} übergeführt werden.[353])

Hieraus erkennt man, daß eine Klasse *Abel*scher Integrale vom Geschlecht 2, welche ein reduzierbares Integral enthält, immer auch noch ein zweites besitzt[354]), und weiter, daß in ihr, wenn sie mehr als zwei reduzierbare Integrale enthält, deren unendlich viele vorkommen.[355]) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in einer Klasse, die zwei reduzierbare Integrale enthält, noch ein drittes und damit unendlich viele vorkommen, ist die, daß die beiden elliptischen Integrale, auf welche J_1 und J_2 reduzierbar sind, selbst ineinander transformiert werden können.[356])

Aus der zwischen den Modulen der Thetafunktion gefundenen Bedingung für das Auftreten eines reduzierbaren Integrals kann man auch die in diesem Falle zwischen den *Rosenhain*schen Modulen $\varkappa$, λ, μ oder auch den 6 Verzweigungspunkten der zugehörigen *Riemann*schen Fläche bestehenden Beziehungen ableiten.[357])

---

353) Daß es im ersten Falle nicht nur eine solche lineare Transformation gibt, sondern unendlich viele, zeigt *Bolza* (Diss. Göttingen 1886), während einen Beweis für die Existenz der zuletzt genannten Transformation k^{ten} Grades *Hanel* (Diss Breslau 1882) gibt. Von der vorliegenden Art sind auch die von *Appell* [Paris C. R. 94 (1882), p. 421] untersuchten Thetafunktionen zweier Veränderlichen, bei welchen die Modulen durch eine Gleichung von der Form $r_1 a_{12} = r_2 a_{22} + q \pi i$ miteinander verknüpft sind; andere Beispiele bei *Königsberger* (Allg Unters. a. d. Th. d. Differentialgl. 1882) und *Doerr* (Diss. Straßburg 1883). *Appell* [S. M. F. Bull. 10 (1882), p. 59] hat später seine Untersuchungen auf Thetafunktionen beliebig vieler Variablen ausgedehnt, bei denen zwischen den Modulen p — 1 Relationen von der Form $\sum_{\mu=1}^{p} r_\mu a_{\mu\lambda} = q_\lambda \pi i$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p-1)$ bestehen.

354) *Picard* [S. M. F. Bull. 11 (1882), p. 47]; dazu *Appell* et *Goursat,* Fonct. algébr. 1895, p. 370 u. *Humbert,* J. d. Math. 5_5 (1899), p. 249.

355) Dieses ist der besondere Fall des in Anm. 348 genannten Satzes von *Poincaré,* aus dem sich ergibt, daß eine Klasse *Abel*scher Integrale vom Geschlecht p stets unendlich viele reduzierbare Integrale enthält, sobald es deren $p+1$ besitzt [*Poincaré,* Paris C. R. 99 (1884), p. 853].

356) Daß in speziellen Fällen nicht nur 2, sondern unendlich viele reduzierbare Integrale in einer Klasse vorhanden sind, gibt schon *Picard* [S. M. F. Bull. 11 (1882), p. 47] an; der hier angegebene Satz rührt von *Bolza* (Diss. Göttingen 1886) her, auch *de Franchis,* Pal. Rend. 38 (1914), p. 192.

357) Für $k = 2$ bei *Königsberger* [J. f. Math. 67 (1867), p. 77] und *Pringsheim* [Math. Ann. 9 (1876), p. 466] Den vorliegenden Fall behandelt auch *Roch* [Z. f. Math. 11 (1866), p. 463]; ferner hat *Schering* [J. f. Math. 85 (1878), p. 135; dazu auch *Doerr,* Diss. Straßburg 1883] die diesem besonderen Falle entsprechende *Riemann*sche Fläche durch Aufeinanderlegen zweier elliptischen *Rie-*

122. Reguläre Riemannsche Flächen. Aus der Eigenschaft eines algebraischen Gebildes vom Geschlecht q, daß sich die $2pq$ Periodizitätsmodulen $\Omega_{\mu\varepsilon}$ von p linearunabhängigen seiner Integrale 1. Gattung aus $2p^2$ Größen $P_{\mu\alpha}$ linear zusammensetzen lassen, darf man, wie *Wirtinger*[358]) bemerkt hat, sobald $p > 1$ ist, nicht schließen, daß diese p Integrale simultan durch eine Substitution in einzelne Integrale vom Geschlecht p übergeführt werden können. Nicht nur, daß im Falle $p > 3$ die Größen $P_{\mu\alpha}$ im allgemeinen überhaupt nicht zu einer Klasse algebraischer Funktionen vom Geschlecht p gehören werden, sondern auch im Falle $p \lesseqgtr 3$ kann man nur schließen, daß jedes der p Integrale durch eine Substitution in eine Summe von p Integralen vom Geschlecht p übergeführt werden kann.

Wohl aber gilt der Satz (II B 2, Nr. 48), daß, wenn sich unter den Integralen 1. Gattung einer Klasse algebraischer Funktionen vom Geschlecht q eines befindet, welches durch eine rationale Substitution auf ein einzelnes Integral vom Geschlecht $p < q$ reduziert wird, diese Klasse stets p linearunabhängige Integrale enthält, welche alle durch die nämliche Substitution auf einzelne Integrale der nämlichen Klasse reduziert werden, und es haben ihre Periodizitätsmodulen dann stets die eingangs angegebene Eigenschaft.

Diese Klassen algebraischer Funktionen werden durch die „regulären" *Riemann*schen Flächen definiert.[359])

Eine reguläre *Riemann*sche Fläche wird erhalten, wenn man eine beliebig gewählte *Riemann*sche Fläche in n Exemplaren nimmt, diese aufeinander legt und durch Verzweigungspunkte und Verschmelzung längs Querschnitten zu einer einzigen Fläche verbindet. Beträgt dabei die Anzahl der eingeführten Verzweigungspunkte $2k$ und ist p das

---

*mann*schen Flächen erhalten (vgl. Nr. **122**); *Hutchinson,* (Diss. Chicago 1897) hat die 16 zugehörigen σ-Funktionen zweier Veränderlichen durch elliptische σ-Funktionen ausgedrückt und die eintretende Entartung der *Kummer*schen Fläche untersucht; endlich hat *Cayley* [Paris C. R. 85 (1878), p. 265 u. f. = Coll. math. pap. 10 (1896), p 214] für den vorliegenden Fall alle Wurzelfunktionen durch elliptische Funktionen ausgedrückt. Für $k = 4$ bei *Bolza* [Freib. Ber. 8 (1885), p. 330, Diss. Göttingen 1886 u. Math. Ann. 28 (1887), p. 447] und *Igel* [Monatsh. f. Math. 2 (1891), p. 157]; ferner *Mc Donald,* Amer. M. S. Trans. 2 (1901), p. 437 und *Kluyver,* Versl. Afd. Natuurk. 26 (1917), III, p. 463.

358) Acta math. 26 (1902), p. 155, auch *Severi,* Acc. Linc. Rend. 23_5 (1914), I, p. 581.

359) *Klein,* Math. Ann. 14 (1879), p. 459; auch „Riem. Fl." I, p. 208. *Dyck,* Diss. München 1879; Math. Ann. 17 (1880), p. 473, dazu Math. Ann. 20 (1882), p. 30; ferner *Hurwitz,* Gött. N. 1887, p. 85 = Math. Ann. 32 (1888), p. 290 und Math. Ann. 41 (1893), p. 403.

Geschlecht der einzelnen Fläche, so ist das Geschlecht q der neuen Fläche durch die Gleichung

$$2q - 2 = 2k + n(2p - 2) \quad \text{bestimmt.}^{360}) \tag{669}$$

Analytisch können die regulären *Riemann*schen Flächen mit Hilfe zweier Parameter x, y durch algebraische Gleichungen von der Form

$$F(z; x, y) = 0 \tag{670}$$

dargestellt werden, wobei zwischen x und y selbst eine algebraische Gleichung

$$G(x, y) = 0 \tag{671}$$

vom Geschlecht p besteht, welche die einzelne *Riemann*sche Fläche definiert.

Da man in ein System von q linearunabhängigen Integralen 1. Gattung von (670) stets p linearunabhängige Integrale 1. Gattung

$$\int R_\alpha(x, y)\, dx, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots p) \tag{672}$$

die zu (671) gehören, aufnehmen kann, so ist dadurch das algebraische Gebilde (670) bereits als ein reduzierbares im speziellen Sinne dieses Paragraphen charakterisiert. Damit ferner ein Integral

$$\int S(z; x, y)\, dx \tag{673}$$

dem in Nr. **119** genannten komplementären Systeme von $p - q$ linearunabhängigen Integralen angehöre, ist notwendig und hinreichend[361]), daß die Relativspur des Integranden S, d. h. die über alle n auf Grund der Gleichung (670) zu einem Wertepaare x, y gehörigen Werte $z_1, z_2, \ldots z_n$ erstreckte Summe

$$\sum_{\nu=1}^{n} S(z_\nu; x, y) = 0 \quad \text{sei.} \tag{674}$$

Die einer regulären *Riemann*schen Fläche vom Geschlecht q zugehörigen Thetafunktionen von q Veränderlichen zerfallen nach einer Transformation n^{ter} Ordnung in solche von p und solche von $p - q$ Veränderlichen und die zuerst genannten entstammen dabei der einzelnen Fläche vom Geschlecht p (671), in dem Sinne, daß ihre Modulen das n-fache der Modulen der dieser Fläche zugehörigen *Riemann*schen Thetafunktionen sind. Die als zweite Faktoren auftretenden Thetafunktionen von $q - p$ Veränderlichen sind im allgemeinen keine *Riemann*schen Thetafunktionen und dieser Umstand ist es, welcher *Schottky* und *Wirtinger* in den Stand gesetzt hat, durch die Heran-

360) *Wirtinger,* Thetaf., p. 73.

361) *Schottky,* Berl. Ber. 1904, p. 522; *Jung,* ebd. p. 1381.

ziehung solcher spezieller algebraischer Gebilde, wie sie durch reguläre *Riemann*sche Flächen definiert werden, die Theorie der Thetafunktionen über den Kreis der *Riemann*schen hinaus weiter zu entwickeln.[362])

123. Schottkys Symmetralfunktionen. Tritt an Stelle von (670) die spezielle Gleichung

$$z^2 = H(x, y), \tag{675}$$

so nennt *Schottky*[393]) die Gleichungen (675) und (671) die charakteristischen Gleichungen eines Symmetrals, indem er unter diesem Namen ein ebenes von mehreren Randlinien begrenztes Gebiet versteht, das in bezug auf eine Gerade symmetrisch ist; p stimmt dabei mit der Anzahl der Paare wechselseitig symmetrischer Randlinien überein und soll in der Folge wie bei *Schottky* mit τ bezeichnet werden. Ersetzt man dann noch q durch ϱ und setzt $q - p = \sigma$, so kommen zu den τ Paaren von Randlinien $n = \sigma + 1 - \tau$ unpaarige hinzu. Man kann den hier vorliegenden Fall auch als den der verzweigten Doppelüberdeckung einer algebraischen Kurve vom Geschlecht τ bezeichnen. Bei jeder der beiden Auffassungen erscheint er als eine Verallgemeinerung des hyperelliptischen, der in ihm, dem Werte $\tau = 0$ entsprechend, enthalten ist, und es ist von diesem Standpunkte aus als der nächst einfache Fall der Fall $\tau = 1$ anzusehen, den man als den elliptisch-hyperelliptischen bezeichnet.

Noch bemerkt man, daß die Integrale (673) in unserem Falle die Form

$$\int \frac{R(x, y)}{z}\, dx \tag{676}$$

haben, wo $R(x, y)$ eine rationale Funktion von x und y ist.

Ein Symmetral hängt von $3\sigma - n = 2\sigma + \tau - 1$ wesentlichen Konstanten ab.[364]) Ist daher $3\sigma - n < \frac{1}{2}\sigma(\sigma + 1)$, so können die am Schlusse des letzten Artikels erwähnten nicht *Riemann*schen Thetafunktionen von σ Veränderlichen, welche Symmetralfunktionen genannt werden, niemals allgemeine Thetafunktionen sein; ist andererseits $3\sigma - n > \frac{1}{2}\sigma(\sigma + 1)$, so ist die Parameteranzahl des Symmetrals zu groß und es werden sich aus diesem Grunde die auftretenden Sym-

362) Daß *Riemann* selbst schon ähnliche Untersuchungen angestellt hat, zeigen einige in seinem Nachlaß befindliche Papiere aus dem Jahre 1862; vgl. Ges. math. W. Nachtr. (1902), p. 105.

363) J. f. Math. 106 (1890), p. 199; Berl. Ber. 1908, p. 838 u. 1084 und gemeinsam mit *Jung*, Berl. Ber. 1909, p. 282 u. 732; 1912, p. 1002; schon früher Diss. Berlin 1875 u. Z. f. Math. 83 (1877), p. 300.

364) *Schottky*, Berl. Ber. 1908, p. 840.

metralfunktionen wenig zur Durchführung einer Theorie der allgemeinen Thetafunktionen von σ Veränderlichen eignen. Für die Behandlung einer solchen Theorie würde also vornehmlich der Fall

$$3\sigma - n = 2\sigma + \tau - 1 = \tfrac{1}{2}\sigma(\sigma+1) \tag{677}$$

in Betracht kommen, der außer für $\sigma = 1$, $n = 2$, $\tau = 0$ und $\sigma = 2$, $n = 3$, $\tau = 0$, d. i. für den gewöhnlichen elliptischen und ultraelliptischen Fall, nur für

$$\begin{aligned} &\sigma = 3, \quad n = 3, \quad \tau = 1, \\ &\sigma = 4, \quad n = 2, \quad \tau = 3, \\ &\sigma = 5, \quad n = 0, \quad \tau = 6 \end{aligned}$$

eintritt, welche drei Fälle von *Schottky*[363]), *Jung*[365]) und *Wirtinger*[366]) behandelt worden sind.

Wir betrachten jetzt zuerst den Fall, daß unpaarige Randkurven vorhanden sind, d. h. daß $n \geq 1$ ist; dann ist $\sigma = \tau + n - 1 \geq \tau$.

Zu dem algebraischen Gebilde (675) gehören $2^{2\varrho}$ Thetafunktionen, die mit $\vartheta[\varepsilon](u)_\alpha$ bezeichnet seien, und es bestehen für deren $\frac{1}{2}\varrho(\varrho+1)$ Modulen außer den stets gültigen noch besondere Symmetrieverhältnisse, so daß

$$\begin{aligned} &a_{\alpha\alpha'} = a_{\alpha'\alpha} = a_{\sigma+\alpha,\,\sigma+\alpha'} = a_{\sigma+\alpha',\,\sigma+\alpha}, \\ &a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = a_{\sigma+\alpha,\,\beta} = a_{\beta,\,\sigma+\alpha}, \\ &a_{\alpha,\,\sigma+\alpha'} = a_{\alpha',\,\sigma+\alpha} = a_{\sigma+\alpha,\,\alpha'} = a_{\sigma+\alpha',\,\alpha} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \alpha,\,\alpha' = 1, 2, \ldots \tau \\ \beta = \tau+1,\, \tau+2, \ldots \sigma \end{pmatrix} \tag{678}$$

ist. Auf Grund dieser Gleichungen läßt sich eine Thetafunktion $\vartheta[\varepsilon](u)_a$ homogen und linear durch 2^τ Produkte je einer Thetafunktion von σ Veränderlichen $\vartheta[\varepsilon](v)_b$ und einer von τ Veränderlichen $\vartheta[\varepsilon](w)_c$ darstellen. Die ersteren sind die in Rede stehenden, von *Schottky* mit φ bezeichneten Symmetralfunktionen; ihre Modulen b haben die Werte:

$$\begin{aligned} &b_{\alpha\alpha'} = 2(a_{\alpha\alpha'} + a_{\alpha,\,\sigma+\alpha'}), \quad b_{\alpha\beta} = 2a_{\alpha\beta}, \quad b_{\beta\beta'} = a_{\beta\beta'} \\ &(\alpha, \alpha' = 1, 2, \ldots \tau;\ \beta, \beta' = \tau+1,\ \tau+2,\ \ldots \sigma). \end{aligned} \tag{679}$$

Die Thetafunktionen $\vartheta[\varepsilon](w)_c$ haben die Modulen

$$c_{\alpha\alpha'} = 2(a_{\alpha\alpha'} - a_{\alpha,\,\sigma+\alpha'}) \qquad (\alpha, \alpha' = 1, 2, \ldots \tau) \tag{680}$$

und entstammen dem algebraischen Gebilde (671), dessen *Riemann*sche Thetafunktionen die Hälften dieser Größen als Modulen besitzen.

Durch Umkehrung dieser Darstellungen erhält man ein einzelnes Produkt einer Symmetralfunktion $\varphi(v)$ mit einer Funktion $\vartheta[\varepsilon](w)_c$ homogen und linear durch Funktionen $\vartheta[\varepsilon](u)_a$ ausgedrückt.

---

365) Berl. Ber. 1905, p. 484.

366) „Thetaf.“, II. Teil.

Will man statt der Funktionen $\vartheta[\varepsilon]\langle\!\langle w\rangle\!\rangle_c$ die *Riemann*schen Thetafunktionen des Gebildes (671) selbst, also die Funktionen $\vartheta[\varepsilon]\langle\!\langle w\rangle\!\rangle_{\frac{c}{2}}$ einführen, so wird man in den soeben benutzten Gleichungen alle Modulen durch ihre Hälften ersetzen und die auftretenden Funktionen $[\varepsilon]\langle\!\langle u\rangle\!\rangle_{\frac{a}{2}}$ linear durch die Quadrate der Funktionen $\vartheta[\varepsilon]\langle\!\langle u\rangle\!\rangle_a$ ausdrücken; die dann auftretenden Symmetralfunktionen $\eta\langle\!\langle v\rangle\!\rangle$[367]) haben dann auch die Hälften der Größen b als Modulen.

Richtet man es nun so ein, daß die Charakteristiken in allen auftretenden Thetafunktionen aus halben Zahlen bestehen, so werden die *Riemann*schen Thetafunktionen $\vartheta[\varepsilon]\langle\!\langle w\rangle\!\rangle$ bzw. $\vartheta[\varepsilon]\langle\!\langle u\rangle\!\rangle$ Wurzelfunktionen der Gebilde (671) bzw. (675) proportional und man erhält, nachdem man diese bestimmt hat, auf Grund der obigen Formeln die Werte der Symmetralfunktionen $\varphi\langle\!\langle v\rangle\!\rangle$ bzw. $\eta\langle\!\langle v\rangle\!\rangle$ durch sie bis auf einen gemeinsamen transzendenten Faktor ausgedrückt. Dabei sind die Argumente aus Integralen 1. Gattung gebildet; soweit damit eine Beschränkung ihrer Werte verbunden ist, kann man sich von dieser mit Hilfe des Additionstheorems frei machen.

Der Fall $\tau = 1$ der elliptisch-hyperelliptischen Funktionen ist durch das Vorhandensein von einem Paare wechselseitig zueinander symmetrischer und σ unpaarigen Randkurven charakterisiert; er wird auch erhalten durch die in 2σ Punkten verzweigte Doppelüberdeckung einer zum Geschlecht 1 gehörigen *Riemann*schen Fläche. Zu der dadurch entstehenden *Riemann*schen Fläche vom Geschlecht $\sigma + 1$ gehören Thetafunktionen, die nach einer quadratischen Transformation in elliptische Thetafunktionen und Symmetralfunktionen von σ Veränderlichen zerfallen, welche von 2σ Parametern abhängen, also nur im Falle $\sigma = 3$ allgemeine Thetafunktionen sind, für $\sigma = 4$ aber bereits spezieller sind als die von 9 Parametern abhängigen *Riemann*schen Thetafunktionen von 4 Veränderlichen (allerdings allgemeiner als die von 7 abhängigen hyperelliptischen Thetafunktionen des Geschlechts 4).

Roth[368]) hat die zum Falle $\tau = 1$ gehörigen Symmetralfunktionen von σ Veränderlichen dadurch der in Nr. **124** geschilderten *Wirtinger*schen Untersuchungsmethode zugänglich gemacht, daß er durch nochmalige, aber unverzweigte Doppelüberdeckung der vorher erhaltenen *Riemann*schen Fläche vom Geschlecht $\sigma + 1$ eine solche vom Geschlecht $2\sigma + 1$ geschaffen hat, deren *Riemann*sche Thetafunktionen

367) *Schottky* und *Jung*, Berl. Ber. 1909, p. 283.
368) Monatsh. f. Math. 23 (1912), p. 106.

neben solchen von $\sigma + 1$ Veränderlichen neue Symmetralfunktionen $\psi(\!(v')\!)$ von σ Veränderlichen liefern. Er kann nun zur Untersuchung dieser und ebenso der früheren Symmetralfunktionen $\varphi(\!(v)\!)$, da wir uns jetzt im Falle $\tau = 0$ befinden, in der Weise *Wirtingers* die *Riemann*schen Methoden anwenden, um insbesondere die Lage der Nullstellen der genannten Funktionen und ihr identisches Verschwinden zu untersuchen.

Die vorher genannten, von 8 Parametern abhängigen Symmetralfunktionen von 4 Veränderlichen hat *Schottky*[369]), dem sie den ersten Anlaß zu seinen Untersuchungen über Symmetralfunktionen gegeben haben, auf Grund der Eigenschaft, daß zwei gerade unter ihnen gleichzeitig mit den Argumenten verschwinden, untersucht und unter Beschränkung auf solche Argumente, für welche diese beiden Funktionen Null sind, durch elliptische Funktionen zweier Parameter ausgedrückt.

In der Einleitung dieser Arbeit erwähnt *Schottky* den Satz, daß im Falle $p = 3$, wenn man die Argumente der Thetafunktionen auf solche Werte beschränkt, für welche zwei der 64 Funktionen verschwinden, die 62 übrigen ebensovielen gleichändrigen elliptischen Thetafunktionen 6. Ordnung proportional werden; den Zusammenhang dieses Satzes mit der verzweigten Doppelüberdeckung eines elliptischen Gebildes hat *Jung* a. a. O. nachgewiesen.

Den Fall $\tau = 2$ hat *Jung*[370]) zunächst bei beliebigem σ behandelt. Er ist durch das Vorhandensein von 2 Paaren einander wechselseitig symmetrischer und $\sigma - 1$ unpaarigen Randlinien des Symmetrals charakterisiert und wird erhalten, wenn man zu den Funktionen einer Klasse vom Geschlecht 2 die Quadratwurzel aus einer ihrer Funktionen adjungiert, die in $2\sigma - 2$ Punkten 0^1 wird; mit anderen Worten durch die an $2\sigma - 2$ Stellen verzweigte Doppelüberdeckung eines algebraischen Gebildes vom Geschlecht 2. Die *Riemann*schen Thetafunktionen des entstehenden algebraischen Gebildes vom Geschlecht $\varrho = \sigma + 2$ zerfallen nach einer Transformation zweiten Grades in solche von 2 Veränderlichen, welche der zugrunde gelegten Klasse vom Geschlecht 2 entstammen und Symmetralfunktionen von σ Veränderlichen, die von $2\sigma + 1$ Parametern abhängen und deren Darstellung durch Wurzelfunktionen von *Jung* a. a. O. durchgeführt wird.

Später hat *Jung*[371]) den Fall $\sigma = 4$ genauer untersucht und insbesondere die bei der Darstellung der Symmetralfunktionen auftreten-

369) J. f. Math. 108 (1891), p. 147 u 193.

370) J. f. Math. 126 (1903), p. 1, schon vorher Hab.-Schr. Marburg 1902.

371) J. f. Math. 130 (1905), p. 1.

den Konstanten bestimmt. Die Symmetralfunktionen hängen hier von 9 Parametern ab, sind also von der gleichen Allgemeinheit wie die *Riemann*schen Thetafunktionen des Geschlechts 4, aber anders spezialisiert; die zwischen ihren Modulen bestehende Beziehung wird von *Jung* gleichfalls in der Form einer Gleichung zwischen den Nullwerten der geraden Funktionen angegeben. Schon im Falle $\sigma = 5$ sind die nur von 11 Parametern abhängigen Symmetralfunktionen spezieller als die von 12 abhängigen *Riemann*schen Thetafunktionen von 5 Veränderlichen. Die 4 Bedingungen, welche im Falle der Symmetralfunktionen zwischen den 15 Thetamodulen bestehen, sind nach *Jung* die, daß 4 gerade Thetafunktionen mit den Argumenten verschwinden.

Jung hat endlich[372]) noch den Fall $\tau = 3$, $\sigma = 4$, $n = 2$, $3\sigma - n = \frac{1}{2}\sigma(\sigma + 1) = 10$ untersucht. Zugrunde gelegt ist eine Klasse K algebraischer Funktionen vom Geschlecht 3, welcher die Quadratwurzel z aus einer zur Klasse gehörigen, in 4 willkürlichen Punkten 0^1 werdenden Funktion adjungiert wird; dadurch entsteht ein zum Geschlecht 7 gehöriger Körper $K(z)$. Gewisse Summen von je 8 zu ihm gehörigen *Riemann*schen Thetafunktionen zerfallen in Produkte je einer der Klasse K zugehörigen *Riemann*schen Thetafunktion von 3 Veränderlichen und einer Symmetralfunktion von 4 Variablen, welche, da die Anzahl der darin auftretenden Parameter $6 + 4 = 10$ beträgt, eine allgemeine Thetafunktion von 4 Veränderlichen ist. So gelangt *Jung* zu einer algebraischen Darstellung dieser letzteren.

124. Wirtingers Thetafunktionen von p Veränderlichen mit $3p$ Parametern. Besitzt ein Symmetral keine unpaarigen Randkurven, ist also $n = 0$, so ist $\sigma = \tau - 1$ und man erhält als Symmetralfunktionen jene Thetafunktionen, welche *Wirtinger*[373]) eingehend untersucht hat.

Wirtinger geht von einer $2p$-blättrigen *Riemann*schen Fläche mit $6p$ Verzweigungspunkten, also mit dem Geschlecht $p + 1$ aus, die durch $2p + 2$ Querschnitte in bekannter Weise in eine einfach zusammenhängende verwandelt ist. Denkt man sich zwei Exemplare F' und F'' dieser Fläche längs eines Querschnittes miteinander verschmolzen, etwa so, daß man das linke Ufer von b_1' mit dem rechten Ufer von b_1'' verbindet, so sind von den $2.\ 2p + 2$ ursprünglichen Querschnitten nur noch $4p + 2$ vorhanden; die entstehende neue Fläche F hat also das Geschlecht $2p + 1$ (vgl. Nr. **123**).

372) Berl. Ber. 1905, p. 484.
373) „Thetaf.", II. Teil.

Für die Fläche F können als Integrale 1. Gattung zunächst $p+1$ Integrale 1. Gattung des einzelnen Exemplars F' genommen werden. Weitere p sind in der Form $\int \sqrt{\Phi_i}\, d\omega_x$ enthalten, wo $d\omega_x$ die fundamentale Differentialform von F' und $\sqrt{\Phi_i}$ eine Wurzelform zweiter Dimension von F' bezeichnet, welche beim Überschreiten von b_1 das Zeichen wechselt; solcher gibt es gerade p linearunabhängige.

Ersetzt man das System dieser letzteren p Integrale durch ein System von Normalintegralen $v_\mu (\mu = 1, 2, \ldots p)$, welche an den Querschnitten $a'_\nu (\nu = 2, 3, \ldots p+1)$ die Periodizitätsmodulen $\delta_{\mu\nu}\pi i$ besitzen, so kann man beweisen, daß ihre Periodizitätsmodulen an den Querschnitten b'_ν die Eigenschaften von Thetamodulen haben und daher Anlaß zur Bildung von Thetafunktionen mit p Veränderlichen geben, welche die gewünschten Symmetralfunktionen sind.

Die *Riemann*schen Thetafunktionen der Fläche F mit $2p+1$ Veränderlichen zerfallen nach einer Transformation zweiten Grades in diese Thetafunktionen von p Veränderlichen und in solche von $p+1$ Variablen, welche die doppelten Modulen der *Riemann*schen Thetafunktionen von F' besitzen.

Ohne von dieser Zerfällung Gebrauch zu machen, hat *Wirtinger* die auftretenden Symmetralfunktionen ganz in der Weise und mit den Hilfsmitteln *Riemanns* untersucht und insbesondere ihr Verschwinden, ihre algebraische Darstellung und die ihnen zugehörigen Umkehrprobleme behandelt.

Die erhaltenen Symmetralfunktionen hängen von $3p$ Parametern ab; sie sind also in den Fällen $p = 4$ und $p = 5$ die allgemeinen Thetafunktionen (im ersteren Falle allerdings mit einer Überzahl von Parametern); für $p > 5$ sind auch sie spezialisiert, aber weniger als die von $3p-3$ abhängigen *Riemann*schen Thetafunktionen vom Geschlecht p, die als Grenzfall von ihnen betrachtet werden können.

Schottky und *Jung*[374]) haben den Zusammenhang, welcher auf diese Weise zwischen *Riemann*schen Thetafunktionen von $p+1$ Veränderlichen und gewissen nicht *Riemann*schen Thetafunktionen von p Veränderlichen hergestellt wird, dahin ausgesprochen, daß den 2^{2p} Produkten zweier gleichartiger Funktionen eines Systems *Riemann*scher Thetafunktionen von $p+1$ Veränderlichen stets die 2^{2p} Funktionen eines im allgemeinen nicht *Riemann*schen Systems von Thetafunktionen von p Veränderlichen zugeordnet werden können, derart daß die Werte, welche die geraden Thetafunktionen dieses zweiten Systems für die Nullwerte ihrer Argumente annehmen, bis auf einen

374) Berl. Ber. 1909, p. 285.

allen gemeinsamen Faktor gleich sind den Quadratwurzeln aus den Nullwerten der zugeordneten Produkte des ersten.[375])

Für die ungeraden Thetafunktionen aber gilt der Satz, daß zwischen den Anfangsgliedern, welche die ungeraden Thetafunktionen des zweiten Systems bei ihrer Entwicklung nach Potenzen der Variablen liefern, die gleichen Relationen bestehen wie zwischen den Quadratwurzeln aus den Produkten jener beiden φ-Funktionen, welche den ungeraden Thetafunktionen des ersten Systems als einem *Riemann*schen nach Nr. 57 entsprechen, wenn man gleichzeitig die in den ersteren Relationen auftretenden Thetanullwerte in der vorher angegebenen Weise durch Quadratwurzeln aus Produkten von Thetanullwerten gerader Thetafunktionen von p Veränderlichen ersetzt. Es treten so den für die Anfangsglieder u_α der ungeraden Thetafunktionen von 2 Veränderlichen geltenden Relationen[376])

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \pm c_{\alpha 45}\, c_{\alpha 46}\, c_{\alpha 56}\, u_\alpha = 0 \tag{681}$$

die für $p = 3$ bestehenden Relationen[377])

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \pm \sqrt{p_{\alpha 45} p_{\alpha 46} p_{\alpha 56}}\, w_\alpha = 0 \tag{682}$$

an die Seite, in denen w_α ein Produkt von zwei φ-Funktionen ist und von denen eine jede nichts anderes ist als die Gleichung der den *Abel*schen Funktionen zugrunde liegenden Kurve 4. Ordnung.

So lange $p \gtreqless 3$ ist, sind auch die auftretenden Symmetralfunktionen von p Veränderlichen *Riemann*sche Thetafunktionen einer bestimmten Klasse algebraischer Funktionen. Den Zusammenhang, welcher dann zwischen *Abel*schen Funktionen der Geschlechter 3 und 4 mit solchen des nächst niedrigeren Geschlechts hergestellt wird, hat *Wirtinger*[378]) näher beleuchtet.

375) Damit ist die in Nr. 92 vermißte Quelle für die Formel (538) gefunden.

376) *Schottky,* Acta math. 27 (1903), p. 250.

377) *Schottky,* Acta math. 27 (1903), p. 257.

378) „Thetaf." p. 113; Acta math. 26 (1902), p. 140; s. auch *Roth,* Monatsh. f. Math. 18 (1907), p. 161 u. 22 (1911), p. 64. Es mag an dieser Stelle noch an die Bemerkung *Riemanns* (Ges. math. W. Nachtr. p. 97) erinnert werden, daß sich die 6-fach periodischen Thetareihen auf 4-fach periodische reduzieren lassen, wenn für die Kurve 4. Ordnung drei Doppeltangenten, deren Th. Char. einer Hauptreihe entnommen sind, sich in einem Punkte schneiden; vgl. dazu Anm. 218.

Von Thetafunktionen, welche im Sinne des IV. Satzes von Nr. 119 in Produkte von solchen mit weniger Variablen zerfallen, sind Beispiele mit einem oder auch mehreren elliptischen Faktoren im Vorstehenden verschiedentlich erwähnt worden und auch sonst bekannt (vgl. z. B. *Schulz-Bannehr,* Diss. Straßburg 1904), während Fälle, in denen beide Faktoren Thetafunktionen von

Man erhält diejenigen algebraischen Gebilde vom Geschlecht 3, welche in obiger Weise vorgegebene Thetafunktionen von 2 Variablen liefern, wenn man die durch diese bestimmte *Kummer*sche Fläche mit einer Ebene schneidet. Der Schnitt ist eine C_4 und die 16 singulären Ebenen der *Kummer*schen Fläche schneiden die Ebene in 16 der 28 Doppeltangenten; die 12 übrigen gehören einer *Steiner*schen Gruppe an, welche durch die ihr zugeordnete Charakteristik diejenige Schar von Wurzelformen bestimmt, mittels welcher die vorgegebenen Thetafunktionen erhalten werden.

In ähnlicher Weise können Gebilde vom Geschlecht 4 erhalten werden, welche vorgegebene Thetafunktionen von 3 Veränderlichen liefern.

XVI. Multiplikabilität und Singularität.

125. Die prinzipale Transformation (komplexe Multiplikation) der Thetafunktionen mehrerer Variablen. Die regulären *Riemann*schen Flächen besitzen (II B 2, Nr. 53) eindeutige Transformationen in sich und ihre Thetafunktionen lassen daher Transformationen zu, bei welchen die transformierten Modulen den ursprünglichen gleich sind, bei denen also

$$a'_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots p) \tag{683}$$

ist; solche Transformationen werden prinzipale, auch in Übertragung der im Falle $p = 1$ üblichen Ausdrucksweise komplexe Multiplikationen genannt.

Die regulären *Riemann*schen Flächen sind nicht die einzigen, welche Transformationen in sich zulassen. Es gibt nämlich für eine algebraische Mannigfaltigkeit, welche nach Satz IV von Nr. 113 durch die zu einer *Riemann*schen Matrix gehörigen $2p$-fach periodischen Funktionen von p Veränderlichen bestimmt wird, stets $h + 1$ algebraische Transformationen in sich, wenn h der zu der Matrix gehörige Index der Multiplikabilität ist[379]); alle zu *Riemann*schen Matrizen, bei denen $h > 0$ ist, gehörigen Thetafunktionen besitzen also komplexe Multiplikationen.

---

mehreren Veränderlichen sind, nur wenig behandelt wurden; es mag daher auf *Schumacher* [Diss. Straßburg 1907 = Acta math. 32 (1909), p. 1] hingewiesen werden, wo eine Thetafunktion vom Geschlecht $p = 6$ in Produkte von Thetafunktionen von den Geschlechtern $p = 2$ und $p = 4$ zerfällt wird.

379) *Scorza*, Pal. Rend. 41 (1916), p. 279; Catania Acc. Gioen. Atti 11_5 (1917), Mem. XX. Man vgl. dazu *Hurwitz*, [Leipz. Ber. 38 (1886), p. 34 = Math. Ann. 28 (1887), p. 581], wo die Anzahl der linearunabhängigen Transformationen in sich mit μ bezeichnet ist.

Daraus ergibt sich insbesondere, daß nicht nur jede zu einer unreinen Matrix gehörige Thetafunktion komplexe Multiplikation zuläßt[380]), sondern auch alle singulären Thetafunktionen, d. h. jene, für welche bei der zugehörigen *Riemann*schen Matrix der Index der Singularität $k > 0$ ist. Auch der letzte Satz gilt im allgemeinen nicht umgekehrt. Nur im Falle $p = 2$ sind alle Thetafunktionen mit komplexer Multiplikation auch singulär, da hier $h = 1$ stets auch $k = 1$ nach sich zieht (s. Nr. **126**), während z. B., wie die Formeln (641) zeigen, wenn p eine ungerade Primzahl ist, recht wohl $h = 1$ sein kann, auch wenn $k = 0$, die Matrix also keine singuläre und eine reine ist.

Für $p > 1$ finden sich die prinzipalen Transformationen erstmals erwähnt von *Königsberger*[381]) und sodann eingehend bearbeitet von *Kronecker*[382]) und *Weber*[383]). Die von beiden angestellten Untersuchungen haben aber erst durch *Frobenius*[384]) einen befriedigenden Abschluß gefunden in dem Satze:

Wenn eine Transformation T für irgendeine Thetafunktion eine prinzipale ist, so zerfällt ihre charakteristische Determinante $|T - zJ|$ in lauter lineare Elementarteiler und verschwindet nur für solche Werte von z, deren Modul gleich der Quadratwurzel aus dem Transformationsgrade ist.

Hat also die Gleichung

$$|T - zJ| = 0 \tag{684}$$

reelle Wurzeln, so können diese nur $\pm\sqrt{n}$ sein, und da die Gleichung (684) in zwei Gleichungen p^{ten} Grades zerfällt, deren Koeffizienten zueinander konjugiert komplex sind[385]), so tritt jede reelle Wurzel bei

380) Dies ist zuerst von *Wiltheiß* [Math. Ann. 26 (1886), p. 127] ausgesprochen worden, der den Satz bewiesen hat: Sobald eine Thetafunktion durch eine Transformation in eine andere Thetafunktion übergeführt wird, die in das Produkt von Thetafunktionen von weniger Variablen zerfällt, so existiert für sie mindestens eine prinzipale Transformation, und ebenso stellte *De Brun* [Stockh. Öfv. 54 (1897), p. 413] den Satz auf: Damit ein *Abel*sches Integral 1. Gattung weniger als $2p$ unabhängige Perioden haben soll, ist durchaus erforderlich, daß das algebraische Gebilde in sich übergeht, wenn man eine angemessene bialgebraische (oder birationale) Substitution macht.

381) J. f. Math. 65 (1866), p. 355.

382) Berl. Ber. 1866, p. 597 = J. f. Math. 68 (1868), p. 273.

383) Ann. di Mat. 9_2 (1878/9), p. 140.

384) J. f. Math. 95 (1883), p. 264.

385) Im Fall, daß die Matrix keine singuläre ist ($k = 0$), hat *Sorza* [Paris C. R. 165 (1917), p. 497] gefunden, daß die Wurzeln einer jeden dieser beiden Gleichungen zwei und nur zwei, zueinander konjugierten komplexen Zahlen gleich

(684) in gerader Anzahl auf. Hat also die Gleichung (684) lauter einfache Wurzeln, so ist sicher keine reell[386]).

Im Falle $n = 1$ haben die Wurzeln alle den Modul 1 und, da die Gleichung (684) lauter ganzzahlige Koeffizienten besitzt, so ist in diesem Falle jede Wurzel von (684) eine Einheitswurzel[387]). Eine solche prinzipale Transformation ist stets periodisch und umgekehrt ist auch jede periodische Transformation linear und prinzipal[388]).

Frobenius hat ferner gezeigt, daß die hier angegebene notwendige Bedingung für eine prinzipale Transformation auch hinreichend ist, d. h. daß zu einer Transformation T, sobald sie die im vorstehenden Satze angegebene Bedingung erfüllt, immer auch Thetafunktionen existieren, für welche sie eine prinzipale ist, und er hat zugleich gezeigt, wie die Modulen dieser Thetafunktionen berechnet werden können.

Über den Zusammenhang des Grades der prinzipalen Transformation der Thetafunktionen mit den Transformationen des zugehörigen algebraischen Gebildes in sich sagt der *Hurwitz*sche[389]) Satz:

Existiert auf einer *Riemann*schen Fläche eine $(\alpha, 1)$-deutige Korrespondenz, so entspricht dieser stets eine prinzipale Transformation von der α^{ten} Ordnung der zur Fläche gehörigen Thetafunktion. Einer ein-eindeutigen Transformation eines algebraischen Gebildes in sich entspricht also stets eine lineare prinzipale Transformation der zum Gebilde gehörigen Thetafunktion.

Von diesem Gesichtspunkte aus haben *Wiltheiß*[390]) und *Bolza*[391]) die komplexe Multiplikation der Thetafunktionen zweier Veränderlichen untersucht. Besitzt nämlich eine hyperelliptische *Riemann*sche Fläche $s^2 = R(z)$ außer der stets vorhandenen eindeutigen Transformation in sich $s' = -s$, $z' = z$ noch eine weitere, so läßt sie sich stets durch eine Gleichung von einer der beiden Formen

$$s^2 = R(z^n) \quad \text{oder} \quad s^2 = zR(z^n) \tag{685}$$

darstellen. Daraus ergeben sich für $p = 2$ unmittelbar die sechs von

---

sind, von denen die eine t-mal, die andere $(p - t)$-mal als Wurzel auftritt, wobei die Zahl t für alle zu derselben Matrix gehörigen prinzipalen Transformationen den nämlichen Wert hat.

386) Über die diesem Falle entsprechenden *Riemann*schen Matrizen siehe das in Nr. 114 zu der Gleichung (638) Bemerkte.

387) *Kronecker,* J. f. Math. 53 (1857), p. 173 = Werke 1 (1895), p. 103.

388) *Scorza,* Pal. Rend. 41 (1916), p. 288.

389) Gött. N. 1887, p. 97 = Math. Ann. 32 (1888), p. 301, vgl. auch Math. Ann. 41 (1893), p. 403.

390) Hab.-Schr. Halle 1881; Math. Ann. 21 (1883), p. 385.

391) Am. J. 10 (1888), p. 47; Math. Ann. 30 (1887), p. 546.

Bolza angegebenen Fälle von Binärformen 6. Ordnung mit linearen Substitutionen in sich.

Diejenigen Thetafunktionen zweier Veränderlichen, welche eine prinzipale Transformation besitzen, sind identisch mit den singulären Funktionen *Humberts*.

126. Humberts singuläre Funktionen. Singulär nannten wir in Nr **114** eine *Riemann*sche Matrix dann, wenn zwischen ihren Elementen außer dem einen stets geltenden Systeme bilinearer Relationen (627) noch weitere von derselben speziellen, alternierenden Form existieren. Sind $k+1$ voneinander linearunabhängige solche Systeme vorhanden, so nennen wir die Matrix und die zu ihr gehörigen Funktionen k-fach singulär.

Bis jetzt sind diese Funktionen nur in dem Falle $p=2$ näher untersucht worden, wo *Humbert*[392]) zum erstenmal auf sie aufmerksam wurde. Er knüpfte an den in Nr. 9 (s. insbes. Anm. 35) ausgesprochenen Gedanken an, daß die für die Transformationszahlen $c_{\alpha\beta}$ angegebenen Bedingungen (40) nur dann notwendige Bedingungen für eine Transformation d. h. für das Auftreten algebraischer Beziehungen zwischen *Abel*schen Funktionen mit den Perioden ω und solchen mit den Perioden ω' sind, wenn zwischen diesen Perioden keine anderen bilinearen Relationen bestehen als die $\frac{1}{2}(p-1)p$ Gleichungen (36); daß dagegen, wenn außer diesen noch andere gelten, auch noch andere Transformationen möglich sein werden, deren Transformationszahlen $c_{\alpha\beta}$ den Gleichungen (40) nicht genügen.

Indem *Humbert* die Perioden in der Normalform

$$\begin{matrix} \pi i & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & \pi i & a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{686}$$

voraussetzt, ergibt sich ihm als notwendig und hinreichend für die Existenz weiterer in ihren Koeffizienten c nicht an die Gleichungen (40) gebundenen „singulären" Transformationen die Bedingung, daß die Modulen a außer der den Gleichungen (36) entsprechenden Gleichung $a_{12}=a_{21}$ noch einer Relation von der Form

$$q_1\pi i^2 + q_2 a_{11}\pi i + q_3 a_{12}\pi i + q_4 a_{22}\pi i + q_5(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \tag{687}$$

genügen, bei der die q ganze Zahlen sind. Solche Modulen wurden

392) *Humbert*, J. de Math. 5_5 (1899), p. 233; 6_5 (1900), p. 279; 7_5 (1901), p. 97; 9_5 (1903), p. 43; 10_5 (1904), p. 209; schon vorher Paris C. R. 126 (1898), p. 508, 814 u. 882; 127 (1898), p. 857; 129 (1899), p. 640 u. 955; 130 (1900), p. 483; 132 (1901), p. 72. Die von *Humbert* und *Levy* [Paris C. R. 158 (1914), p. 1609] begonnenen Untersuchungen über singuläre Funktionen im Falle $p=3$ sind schon in Anm. 337 erwähnt worden.

von ihm singuläre Modulen und die mit ihnen gebildeten Funktionen singuläre Funktionen genannt.[393])

Der Wert des Ausdruckes

$$\Delta = q_3^2 + 4(q_1 q_5 - q_2 q_4) \tag{688}$$

bleibt bei jeder linearen Transformation ungeändert und es läßt sich durch eine solche die Relation (687) stets auf die Form

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{4} a_{11} + a_{22} &= 0, \quad \text{wenn } q_3 \text{ gerade ist,} \\ -\frac{\Delta-1}{4} a_{11} + a_{12} + a_{22} &= 0, \quad \text{wenn } q_3 \text{ ungerade ist,} \end{aligned} \tag{689}$$

bringen, womit gleichzeitig bewiesen ist, daß alle Relationen (687) mit gleicher Invariante Δ durch lineare Transformation ineinander übergeführt werden können.

Ist für die Relation (687) Δ ein Quadrat, so sind die zugehörigen Thetafunktionen auf elliptische reduzierbar, siehe Nr. **121**.

Das Bestehen einer Relation von der Form (687) erweist sich bei *Humbert* aber zugleich als die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zu einer Thetafunktion mit den Modulen a_{11}, a_{12}, a_{22} eine prinzipale Transformation existiert. Bringt man (687) durch lineare Transformation auf die Form

$$b a_{11} - 2 a a_{12} - c a_{22} = 0, \tag{690}$$

so ist für alle Thetafunktionen, deren Modulen dieser Bedingung genügen, die Transformation, bei welcher

$$\begin{aligned} c_{11} = c_{33} = a, \quad c_{22} = c_{44} = -a, \\ c_{12} = c_{43} = b, \quad c_{21} = c_{34} = c, \end{aligned} \tag{691}$$

ist, während alle übrigen Transformationszahlen c den Wert Null haben, eine prinzipale und es gibt, solange zwischen den Modulen a keine weiteren Bedingungen bestehen, so daß dieselben noch zwei willkürliche Parameter enthalten, für die zugehörigen Thetafunktionen keine andere komplexe Multiplikation als (691), bei welcher sich die 3 Bedingungen (683) auf die einzige (690) reduzieren.

Sollen noch andere komplexe Multiplikationen bestehen, so müssen für die Modulen a noch weitere Beschränkungen eintreten. *Rosati*[394]) und nach ihm *Scorza*[395]) haben die folgenden Fälle als möglich

393) Über die im Falle singulärer Modulen zwischen den Verzweigungspunkten der zugehörigen *Riemann*schen Fläche und die zwischen den Nullwerten der Thetafunktionen bestehenden Relationen siehe für die niedrigsten Werte von Δ bei *Humbert*, Paris C. R. 126 (1898), p. 508 und J. de Math. 2_6 (1906), p 329.

394) Acc. Linc. Rend. 24_5 (1915), II, p. 182.

395) Pal. Rend. 41 (1916), p. 339.

angegeben. Für die einfach singulären Funktionen ($k = 1$) kann, wenn die Matrix eine reine ist, sie also nicht auf elliptische Funktionen reduzierbar sind, $h = 1$ oder $h = 3$ sein; letzteres findet bei der durch die Gleichung $s = \sqrt{z^5 + 1}$ definierten Klasse hyperelliptischer Funktionen statt, deren eindeutige Transformationen in sich schon *Bolza* angegeben hat. Ist die Matrix eine unreine, so ist $h = 1$, 2 oder 3, je nachdem von den elliptischen Thetafunktionen, in welche die vorliegende Thetafunktion zweier Veränderlichen zerfällt, keine, eine oder beide komplexe Multiplikation zulassen. Bei den zweifach singulären Funktionen ($k = 2$) ist stets $h = 3$; dabei kann die Matrix eine reine oder unreine sein. In letzterem Falle enthält die Klasse unendlich viele elliptische Integrale, von denen aber keines eine komplexe Multiplikation besitzt. Endlich bleibt noch als letzter Fall, daß h und k ihre Höchstwerte $h = 3$ und $k = 7$ haben; die Klasse der hyperelliptischen Funktionen ist dann durch die gleichfalls schon von *Bolza* behandelte Gleichung $s = \sqrt{z(z^4 + 1)}$ charakterisiert; sie enthält unendlich viele elliptische Integrale und es besitzt ein jedes von diesen komplexe Multiplikation.

127. Heckes Untersuchungen über vierfach periodische Funktionen. Einen tieferen Einblick in die Natur der singulären vierfach periodischen Funktionen haben die Untersuchungen *Heckes*[396]) eröffnet. Diese erfordern, daß man die Perioden nicht von vornherein in der Normalform (686) voraussetzt. Es seien daher mit

$$\begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4; \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \end{matrix} \tag{692}$$

die Perioden einer vierfach periodischen Funktion der beiden Veränderlichen u, v bezeichnet; zwischen ihnen besteht nach Nr. **113** stets eine ganzzahlige bilineare Relation von der Form

$$\sum_{i,k} a_{ik}(u_i v_k - u_k v_i) = 0, \tag{693}$$

weil für jedes i und k von 1 bis 4 $a_{ii} = 0$ und $a_{ik} + a_{ki} = 0$ ist. Faßt man daher sowohl die u_i wie die v_i als homogene Punktkoordinaten des Raumes, die 6 Größen

$$p_{ik} = (uv)_{ik} = u_i v_k - u_k v_i \tag{694}$$

also als die *Plücker*schen Linienkoordinaten der Verbindungslinie dieser beiden Punkte, Periodengerade genannt, auf, so sagt die Gleichung (693) aus, daß alle Periodengeraden einem und demselben ganzzahligen linearen Komplexe A angehören, in welchem sie, weil für jede

396) Gött. N. 1914, p. 81.

lineare Verbindung

(695) $$x_1 u_i + x_2 v_i = \xi_i + i\eta_i$$

die Ungleichung

(696) $$\sum_{ik} a_{ik}(\xi\eta)_{ik} > 0$$

besteht, dadurch ausgezeichnet sind, daß sie von keiner reellen Geraden des Komplexes getroffen werden; sie sind selbst nie reell.

Gegenüber unimodularen Transformationen besitzt der Komplex A die Invariante

(697) $$a = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23}$$

(die Determinante der 16 Größen a_{ik} ist a^2), wozu noch bei ganzzahliger unimodularer Transformation als Invariante der größte gemeinsame Teiler der a_{ik} tritt. Nennt man zwei Komplexe äquivalent, wenn sie durch eine ganzzahlige Transformation von der Determinante $+1$ ineinander übergeführt werden können, so ist die Übereinstimmung in den beiden genannten Invarianten auch die hinreichende Bedingung ihrer Äquivalenz.

„Singuläre" Perioden im *Humbert*schen Sinne sind solche, welche außer der Relation (693) noch einer zweiten ebensolchen bilinearen Relation

(698) $$\sum_{ik} b_{ik}(uv)_{ik} = 0$$

genügen. Die Periodengeraden gehören also gleichzeitig noch einem zweiten Komplexe B und damit einer ganzen Schar $Ax_1 + Bx_2$ von Komplexen an und sind folglich Linien einer Linienkongruenz. Als Invarianten der Schar treten hier auf: 1. die binäre quadratische Form

(699) $$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + Jx_1x_2 + bx_2^2,$$

bei der a, b die Invarianten von A, B und J die Simultaninvariante

(700) $$J = a_{12}b_{34} + a_{34}b_{12} + a_{13}b_{42} + a_{42}b_{13} + a_{14}b_{23} + a_{23}b_{14}$$

bezeichnet, 2. der „Modul" linearer Funktionen von x_1, x_2 bestehend aus

(701) $$\sum_{i,k} n_{ik}(a_{ik}x_1 + b_{ik}x_2),$$

wo die n_{ik} alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen.

Falls Periodengerade in der Kongruenz überhaupt vorkommen, ist die quadratische Form $Q(x_1, x_2)$ indefinit, also[397])

(702) $$D = J^2 - 4ab > 0.$$

Die Invarianten (699) und (701) sind die einzigen der Schar, d. h. zwei Paare ganzzahliger Komplexe A, B und C, D sind dann

397) Im *Humbert*schen Falle geht D in die durch (688) definierte Zahl Δ über.

und nur dann simultan äquivalent, wenn für sie diese beiden Invarianten übereinstimmen.

Für das folgende wird vorausgesetzt, daß D keine Quadratzahl ist, die Funktionen also nicht auf elliptische reduzierbar sind.

Der entscheidende Fortschritt *Heckes* bestand nun in der Erkenntnis, daß sich alle Periodenpaare einer singulären vierfach periodischen Funktion aus zwei passend gewählten Größenpaaren x, y und x', y' in einfacher Weise zusammensetzen lassen. Da nämlich D von Null verschieden ist, so besteht die Kongruenz $A = 0$, $B = 0$ aus allen Geraden, die zwei feste Geraden, ihre Direktrizen, schneiden. Jede Gerade der Kongruenz bestimmt auf diesen eindeutig ein Punktepaar und umgekehrt, kann mithin durch zwei Paare homogener Parameter festgelegt werden. Betrachtet man nun alle vierfach periodischen Funktionen, unter deren primitiven Periodenpaaren solche vorkommen, die einer gegebenen ganzzahligen Kongruenz $A = 0$, $B = 0$ angehören, und setzt voraus (was durch eine lineare Substitution der Argumente immer erreicht werden kann), daß die Punktepaare (692) auf den Direktrizen der Kongruenz liegen, so ergeben sich zu jeder solchen Funktion zwei Größenpaare x, y und x', y' derart, daß alle ihre Periodenpaare und nur diese in der Form

$$\begin{matrix} \mu x + \nu y, \\ \mu' x' + \nu' y' \end{matrix} \tag{703}$$

enthalten sind, worin μ, ν ganze Zahlen des quadratischen Zahlkörkörpers $k(\sqrt{D})$ sind, welche noch gewissen arithmetischen, von A, B abhängigen Bedingungen genügen, und μ', ν' die zu ihnen konjugierten Zahlen bedeuten.

Die zwei Paare x, y und x', y' sind das Analogon des einen Periodenpaares der elliptischen Funktionen und ihre Quotienten

$$\tau = \frac{x}{y}, \quad \tau' = \frac{x'}{y'} \tag{704}$$

erweisen sich als die für die Untersuchung der singulären vierfach periodischen Funktionen zweckmäßigsten Modulen. Indem man zu ihnen noch passende Argumente u, u' auswählt, erhält man (unter der Annahme $a = -1$) die zugehörige Thetafunktion in der Gestalt

$$\vartheta(u, u'; \tau, \tau') = \sum_{\mu} e^{\frac{\pi i}{\sqrt{D}}(\mu^2\tau - \mu'^2\tau') + \frac{2\pi i}{\sqrt{D}}(\mu u - \mu' u')}, \tag{705}$$

bei der μ alle ganzen Zahlen des Körpers $k(\sqrt{D})$ durchläuft.

Als Funktionen der Argumente u, u' und der Modulen τ, τ' oder der Perioden $x, y; x' y'$ betrachtet, genügt jede zu ihnen gehörige

vierfach periodische Funktion $\varphi(u, u'; x, y; x', y')$ auf Grund ihrer Periodizität der Gleichung

$$\varphi(u + \mu x + \nu y, u' + \mu' x' + \nu' y'; x, y; x', y') = \varphi(u, u'; x, y; x', y') \tag{706}$$

für beliebige ganze Körperzahlen μ, ν und ihre konjugierten μ', ν'.

Wenn φ nur von der Gesamtheit der Perioden abhängt, nicht aber von der Auswahl der sie erzeugenden Paare x, y und x', y', so ist, da die gleiche Gesamtheit erhalten wird, wenn man $x, y; x', y'$ durch

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x + \beta y, \quad x_1' = \alpha' x' + \beta' y', \\ y_1 &= \gamma x + \delta y, \quad y_1' = \gamma' x' + \delta' y' \end{aligned} \tag{707}$$

ersetzt, worin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige ganze Körperzahlen mit der Determinante $+1$, $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ die dazu konjugierten bezeichnen,

$$\varphi(u, u'; x_1, y_1; x_1', y_1') = \varphi(u, u'; x, y; x', y'). \tag{708}$$

Die Transformationen (707) bilden die homogene Modulgruppe des Körpers $k(\sqrt{D})$. Nachdem bereits *Humbert* in dem von ihm betrachteten Falle, in welchem die Relation $A = 0$ in der Normalform vorliegt und a den Wert -1 hat, zu dieser Gruppe gelangt war, wurde die allgemeinste Bestimmung derselben von *Hecke* und *Cotty*[398]) gegeben, indem diese jene linearen ganzzahligen Transformationen suchten, welche die Kongruenz $A = 0$, $B = 0$ invariant lassen. Die dabei von *Hecke* benutzten Begriffe der Idealtheorie des Körpers bieten für diese Untersuchungen die geeignetsten Hilfsmittel.

Um das Verhalten der Thetafunktionen bei den Transformationen der Gruppe zu untersuchen, geht man zweckmäßig, wie es auch *Humbert* getan, von allgemeineren *Jacobi*schen Funktionen (s. Nr. **116**, insbes. Anm. 340) aus, bei deren Klassifikation neben der Ordnung und der Charakteristik hier noch ein drittes Element, der Index, auftritt[399]). Mit ihrer Hilfe gewinnt man insbesondere einen Überblick über die Anzahl der in jedem Falle vorhandenen linearunabhängigen Funktionen. Für die Thetafunktion (705) erhält man, falls $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ der Identität mod. 2 kongruent ist, die Gleichung

$$\vartheta\left(\frac{u}{\gamma\tau+\delta}, \frac{u'}{\gamma'\tau'+\delta'}; \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \frac{\alpha'\tau'+\beta'}{\gamma'\tau'+\delta'}\right) = \xi\sqrt{(\gamma\tau+\delta)(\gamma'\tau'+\delta')}\, e^{\psi}\vartheta(u, u'; \tau, \tau'), \tag{709}$$

wo

$$\psi = \frac{\pi i}{\sqrt{D}}\left(\frac{\gamma u^2}{\gamma\tau+\delta} - \frac{\gamma' u'^2}{\gamma'\tau'+\delta'}\right) \tag{710}$$

398) Toulouse Ann. 8_8 (1911), p. 209.

399) Inhaltlich findet sich der größte Teil dieser Theorie schon bei *Humbert*. Die Heranziehung der Idealtheorie hat sie formal vereinfacht und auch zu weiteren bei *Humbert* nicht auftretenden Problemen geführt. Einen systematischen Aufbau von dieser Seite hat *Buchner* (Diss. Basel 1919) begonnen.

gesetzt ist, ξ aber eine achte Einheitswurzel bezeichnet, welche ebenso wie im Falle gewöhnlicher Thetafunktionen durch *Gauß*sche Summen ausgedrückt werden kann. Dabei definiert *Hecke*[400]) die zu einem Körper $k(\sqrt{D})$ gehörige *Gauß*sche Summe durch die Gleichung

$$G(\varkappa) = \sum_{\varrho} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho^2 \varkappa}{\sqrt{D}}\right)}, \tag{711}$$

in der $\varkappa$ eine Körperzahl mit dem Idealnenner $\mathfrak{a}$ ist, $S(\omega)$ die Spur $\omega + \omega'$ einer Zahl ω bezeichnet und ϱ ein vollständiges Restsystem ganzer Zahlen mod. $\mathfrak{a}$ in $k(\sqrt{D})$ durchläuft.

Die *Gauß*schen Summen (711) haben ähnliche Eigenschaften wie die aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannten. Zunächst ist für jede ganze Körperzahl λ, welche zu $2\mathfrak{a}$ teilerfremd ist,

$$G(\lambda\varkappa) = \left\{\frac{\lambda}{\mathfrak{a}}\right\} G(\varkappa), \tag{712}$$

wo $\left\{\frac{\lambda}{\mathfrak{a}}\right\}$ das quadratische Restsymbol in $k(\sqrt{D})$ ist, und ferner besteht für jedes $\varkappa = \frac{\alpha}{\beta}$, bei dem die ganzen Zahlen α und β teilerfremd sind, die Beziehung

$$G(\varkappa) \cdot |\sqrt{\varkappa\varkappa'}| = \frac{1}{8} e^{\frac{\pi i}{4}(\operatorname{sgn}.\varkappa - \operatorname{sgn}.\varkappa')} G\left(-\frac{1}{4\varkappa}\right), \tag{713}$$

woraus sich unter Benutzung von (712) das quadratische Reziprozitätsgesetz für den Körper $k(\sqrt{D})$ in der Gestalt

$$\left\{\frac{\alpha}{\beta}\right\} \cdot \left\{\frac{\beta}{\alpha}\right\} = (-1)^{\frac{\operatorname{sgn}.\alpha - 1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sgn}.\beta - 1}{2} + \frac{\operatorname{sgn}.\alpha' - 1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sgn}.\beta' - 1}{2}} \tag{714}$$

ergibt, wenn α, β, γ, δ zueinander und zu 2 teilerfremde ganze Zahlen sind, von denen mindestens eine dem Quadrat einer Zahl mod. 4 kongruent ist.

Wenn man die *Gauß*schen Summen auf Grund der Gleichungen (712), (713) auswertet, erhält man auch ξ als zahlentheoretische Funktion von α, β, γ, δ dargestellt.

Für die Multiplikation und die Transformation höherer Ordnung liegen bis jetzt nur die prinzipiellen Ansätze vor. Neben das „ordinäre" Problem der Multiplikation, d. h. die Frage, wie sich $\vartheta(nu, nu'; \tau, \tau')$ durch die Funktionen $\vartheta(u, u'; \tau, \tau')$ ausdrückt, wenn n eine ganze rationale Zahl ist, tritt noch das „singuläre" Problem $\vartheta(\nu u, \nu' u'; \tau, \tau')$ dar-

400) Gött. N. 1919, p. 265, vgl. dazu *Krazer*, „Thetaf." p. 190; ebenso wie dort kann man auch hier zu den *Gauß*schen Summen von den Thetanullwerten durch einen Grenzübergang gelangen, wenn man die Modulen τ, τ' gegen einen reellen Randpunkt $\varkappa$, $\varkappa'$ konvergieren läßt.

zustellen, wenn ν eine ganze Zahl des Körpers $k(\sqrt{D})$ ist. Endlich scheint für das eingehende Studium dieser Theorie eine dritte Klasse von Problemen eine Rolle zu spielen, die man algebraisch als Partialresolvente jener beiden Probleme bezeichnen kann, nämlich die Frage, wie sich durch $\vartheta(u,u';\tau,\tau')$ diejenigen Thetafunktionen ausdrücken, deren Periodenpaare von der Form $\mu+\nu\tau$, $\mu'+\nu'\tau'$ sind, wo μ,ν alle Körperzahlen mit einem bestimmten Idealnenner durchlaufen. Das zweite und das dritte Problem sind bei allgemeinen Thetafunktionen nicht formulierbar; sie hängen mit den singulären Transformationen *Humberts* (vgl. Anm. 35) zusammen.

Der komplexen Multiplikation (Nr. **125**) der Funktion (705) entspricht in den Modulen τ,τ' die Transformation mit rationaler Determinante

$$\begin{pmatrix}\sqrt{D} & 0\\ 0 & \sqrt{D}\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix}-\sqrt{D} & 0\\ 0 & -\sqrt{D}\end{pmatrix}, \tag{715}$$

die offenbar τ,τ' ungeändert läßt. Im Falle des Bestehens weiterer komplexen Multiplikationen ergeben sich Bedingungen für die Modulen τ,τ', die zunächst in der Form einer Gleichung

$$\tau=\frac{\alpha\tau'+\beta}{\gamma\tau'+\delta} \tag{716}$$

auftreten können, die mit der Gleichung

$$\tau'=\frac{\alpha'\tau+\beta'}{\gamma'\tau+\delta'} \tag{717}$$

gleichbedeutend ist und bei der $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ Körperzahlen bezeichnen, für welche $\alpha\delta-\beta\gamma$ total negativ ist. Die Funktionen sind in diesem Falle zweifach singulär ($k=2$). Aus ihren Thetanullwerten entstehen Funktionen der einen Variable τ, welche bei allen jenen Transformationen der Modulgruppe invariant bleiben, welche die Gleichung (716) in sich transformieren. Diese Gruppe, deren Substitutionskoeffizienten sich durch zahlentheoretische Eigenschaften definieren lassen, ist unabhängig von der obigen Entstehung zuerst von *Fricke*[401]) aufgestellt worden; für die zugehörigen automorphen Funktionen einer Variable ergibt sich aus dem obigen eine Darstellung durch die Nullwerte von zweifach singulären Thetafunktionen zweier Veränderlichen.

Zwischen den Modulen τ,τ' können aber auch zwei Gleichungen

$$\tau=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \quad \tau'=\frac{\alpha'\tau'+\beta'}{\gamma'\tau'+\delta'} \tag{718}$$

bestehen, wie es im Falle einfach singulärer Funktionen der Fall ist, sobald ihr Index der Multiplikabilität $h=3$ ist. Die Modulen τ,τ'

401) Math. Ann. 38 (1891), p. 50 u. 461; 39 (1891), p. 62; 41 (1893), p. 443; 42 (1893), p. 564.

sind dann Wurzeln konjugierter quadratischer Gleichungen im Körper $k(\sqrt{D})$ und bestimmen je einen zu k relativ-quadratischen imaginären Zahlkörper. Die Werte der Modulfunktionen (s. Nr. 128) sind ebenfalls algebraische Zahlen und definieren ihrerseits einen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$. Die so entstehenden Körper $\mathfrak{K}$ sind das Analogon der Klassenkörper der komplexen Multiplikation der elliptischen Modulfunktionen. Unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen über die Beschaffenheit von $k(\sqrt{D})$ sind diese Körper $\mathfrak{K}$ von *Hecke*[402]) genauer untersucht worden. Dabei stellte sich heraus, daß $\mathfrak{K}$ ein *Abel*scher Körper ist bezüglich des Körpers der symmetrischen Funktionen der beiden Zahlen τ, τ' und eine enge Beziehung zu den Idealklassen dieses Körpers aufweist, wodurch es gelingt, ihn durch rein arithmetische Eigenschaften eindeutig zu charakterisieren.

128. Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. Wir sind im Vorigen bereits darauf geführt worden, die Funktionen lediglich in ihrer Abhängigkeit von den Modulen τ, τ' zu betrachten. Indem man dabei die Argumente u, u' festhält (gewöhnlich werden sie gleich Null gesetzt), entstehen die zum Körper $k(\sqrt{D})$ gehörigen Modulfunktionen, d. h. diejenigen Funktionen $F(\tau, \tau')$ der beiden, an die Konvergenzbedingung geknüpften Veränderlichen τ, τ', welche bei allen Substitutionen der Modulgruppe oder einer ihrer Untergruppe invariant bleiben.

Die allgemeine Theorie dieser Funktionen und zwar sogleich für beliebiges p ist von *Blumenthal*[403]) entwickelt worden, der insbesondere die Gestalt des Fundamentalbereiches der Funktionen untersuchte, ihre Existenzsätze aufstellte und bewies, daß die Gesamtheit aller Funktionen einer Gruppe (bei geeigneter Festsetzung der Singularitäten) ein algebraisches Gebilde von p Variablen darstellt.

In einer zweiten Arbeit[404]) hat *Blumenthal* dann einen sehr all-

402) Math. Ann. 71 (1912), p. 1 u. 74 (1915), p. 465.

403) Math. Ann. 56 (1903), p. 509 u. 58 (1904), p. 497. Für $p = 2$ hatte bereits *Picard* diese Modulgruppen als die einfachsten Fälle seiner groupes hyperabéliens untersucht, den Zusammenhang dieser Gruppe mit der Gruppe der Transformationen einer gewissen quaternären quadratischen Form in sich auseinandergesetzt und zugehörige Funktionen durch Thetanullwerte dargestellt [Acta math. 1 (1882), p. 297; 2 (1883), p. 114; 5 (1884), p. 121; J. de Math. 1_4 (1885), p. 87; Ann. Éc. Norm. 2_3 (1885), p. 357; Bull. sc. math. 9 (1885), I, p. 202; S. M. F. Bull. 15 (1887), p. 148; dazu Paris C. R. 94 (1882), p. 579 u. 837; 98 (1884), p. 289, 563, 665 u. 904; 99 (1884), p. 882; 101 (1885), p. 1127; 108 (1889), p. 557 u. 659]; *Bourget* hat eine genaue Untersuchung dieser Funktionen und ihrer Gruppe unternommen [Paris C. R. 124 (1897), p. 1428; Toulouse Ann. 12 (1898), D].

404) D. M. V. Jahresb. 13 (1904), p. 120.

gemeinen Ansatz von *Hilbert* durchgeführt und gezeigt, daß es, wenn man für die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Modulen einer Thetafunktion gewisse lineare Funktionen von p Variablen nimmt, rationale Funktionen der Thetanullwerte gibt, welche Funktionen der Modulgruppe in jenen p Variablen sind. Für $p = 2$ trifft dies für die Nullwerte der in Nr. **127** betrachteten Thetafunktionen zu und *Hecke*[402]) zeigte mit Hilfe der Theorie der Invarianten der Binärform 6. Grades, daß auch die allgemeinste Modulfunktion von zwei Variablen durch jene singulären Thetanullwerte rational darstellbar ist.

Mit Hilfe der allgemeinen Sätze von *Blumenthal* gelingt *Hecke* dann der Beweis für die Existenz von Transformationsgleichungen, d. h. algebraischen Gleichungen zwischen den Grundfunktionen $F(\tau, \tau')$ einerseits und einer Funktion $F\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\delta+\delta'}, \frac{\alpha'\tau'+\beta'}{\gamma'\tau'+\delta'}\right)$ andererseits, wo $\alpha\delta - \beta\gamma$ eine beliebige (total positive) Körperzahl sein darf. Eigentümliche Schwierigkeiten entstehen hier bei dem Nachweis, daß die transformierten Funktionen ebenfalls Reihenentwicklungen nach $e^{\pi i \tau}$ und $e^{\pi i \tau'}$ zulassen; er läßt sich erst durch Benutzung des Umstandes führen, daß die Modulfunktionen von zwei Variablen durch Spezialiesierung aus Funktionen von drei Variablen, nämlich den Thetanullwerten des Falles $p = 2$ in ihrer Abhängigkeit von den drei Thetamodulen entstehen.

Auch die Multiplikatorgleichungen haben bei diesen Modulfunktionen ihr Analogon als Gleichungen für transformierte Modulformen.

Für beide Klassen von Gleichungen ist die Theorie soweit gefördert, daß sich tiefliegende arithmetische Eigenschaften der Koeffizienten ergeben, insbesondere Beziehungen zwischen Koeffizienten von Transformationsgleichungen, die zu verschiedenen Transformationsdeterminaten gehören.

129. Anwendung der Thetafunktionen auf die Zetafunktionen. Nachdem schon *Riemann*[405]) die einfach unendliche Thetareihe zur Darstellung der ζ-Funktion verwendet hatte, um insbesondere mit ihrer Hilfe deren Fortsetzbarkeit zu zeigen und ihre Funktionaigleichung abzuleiten, und *Kinkelin*[406]) und *Lipschitz*[407]) das gleiche Verfahren auf allgemeinere Reihen im Körper der rationalen Zahlen ausgedehnt hatten, wurde von

405) Berl. Ber. 1859, p. 671 = Ges. math. W. 1876, p. 136; 2. Aufl. 1892, p. 145.

406) Progr. Basel 1862.

407) J. f. Math. 105 (1889), p. 127.

Lerch[408]) die Zetafunktion eines imaginären quadratischen Zahlkörpers

$$Z(s) = \sum_{u,v} \frac{1}{(au^2 + 2buv + cv^2)^s}, \tag{719}$$

wo u, v alle Paare ganzer Zahlen, das Paar 0, 0 ausgenommen, durchläuft, $\Delta = ac - b^2 > 0$ und der reelle Teil von $s > 1$ ist, mit Hilfe der Thetareihe

$$\sum_{u,v}^{-\infty,\cdots+\infty} e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{\Delta}}(au^2+2buv+cv^2)} \tag{720}$$

dargestellt und ebenfalls deren Funktionalgleichung abgeleitet.

Epstein[409]) hat diese Resultate auf beliebige definite quadratische Formen ausgedehnt. Ist

$$\varphi(\!(x)\!) = \sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} c_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \tag{721}$$

eine quadratische Form von p Veränderlichen, deren reeller Teil eine positive definite Form und deren Determinante von Null verschieden ist, so definiert *Epstein* die Zetafunktion p^{ter} Ordnung mit der Charakteristik $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ und den Modulen $c_{\mu\nu}$ durch die Gleichung

$$Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi = \sum_{m_1,\cdots m_p} \frac{e^{2\pi i \sum_\mu m_\mu h_\mu}}{\varphi(\!(m+g)\!)^{\frac{s}{2}}}, \tag{722}$$

wo der reelle Teil von s größer als p ist und nicht alle g oder nicht alle h gleichzeitig ganze Zahlen sind. Indem er sie durch die p-fach unendliche Thetareihe

$$\vartheta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(0,z)_\varphi = \sum_{m_1,\cdots m_p}^{-\infty,\cdots+\infty} e^{-\pi z\,\varphi((g+m))+2\pi i\sum_\mu m_\mu h_\mu} \tag{723}$$

darstellt in der Form

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\!\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi = \int_0^\infty z^{\frac{s}{2}-1}\,\vartheta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(0,z)_\varphi\, dz, \tag{724}$$

erhält er eine Definition der allgemeinen Zetafunktion bei unbeschränkt veränderlichem s und zugleich für sie die Funktionalgleichung

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\!\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\, e^{-2\pi i\sum_\mu g_\mu h_\mu}\,\pi^{-\frac{p-s}{2}}\,\Gamma\!\left(\frac{p-s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} h \\ -g \end{matrix}\right|(p-s)_\Phi, \tag{725}$$

in der Φ die zu φ reziproke Form bezeichnet und welche auch noch

408) Rozpravy Akad. 2 (1893) u. 4 (1895).
409) Math. Ann. 56 (1903), p. 615.

gilt, wenn die obengenannte Beschränkung für die g, h aufgehoben wird. *Epstein* beweist mit Hilfe dieser Relation insbesondere für binäre quadratische Formen die *Kronecker*schen Grenzformeln.[410])

Für die *Dedekind*sche Zetafunktion eines beliebigen Zahlkörpers wurde die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung von *Hecke*[411]) entdeckt, nachdem sie vorher nur für die Kreiskörper und die rein kubischen Zahlkörper bekannt war.[412]) In einer späteren Arbeit behandelt *Hecke*[413]) die *Dirichlet*schen L-Funktionen für Zahlkörper.

Für einen Zahlkörper k vom Grade n, dessen Klassenzahl gleich 1 ist, gestalten sich diese Beziehungen wie folgt.

Es sei $k^{(1)}, \ldots k^{(r_1)}$ das System der reellen unter den zu k konjugierten Körpern, $k^{(r_1+1)}, \ldots k^{(r_1+2r_2)}$, $r_1 + 2r_2 = n$, das der imaginären und dabei die Bezeichnung so gewählt, daß für $\varrho = r_1 + 1, \ldots r_1 + r_2$ $k^{(\varrho)}$ und $k^{(\varrho+r_2)}$ konjugiert imaginär sind. In der gleichen Weise sollen auch die konjugierten Zahlen bezeichnet werden. Ist dann δ die Differente des Körpers, deren Norm der Körperdiskriminante d gleich ist, und sind t_ϱ ($\varrho = 1, 2 \ldots n$) reelle positive Variablen, für welche $t_{\varrho+r_2} = t_\varrho$ für $\varrho = r_1 + 1, \ldots r_1 + r_2$ ist, so betrachte man die n-fach unendliche Reihe

$$\vartheta(t) = \sum_{\mu} e^{-\pi \sum_{\varrho} \frac{t_\varrho |\mu^{(\varrho)}|^2}{|\delta^{(\varrho)}|}}, \tag{726}$$

in welcher μ sämtliche ganzen Zahlen des Körpers k durchläuft. Sie kann als eine Thetareihe, in welcher die Argumente gleich Null gesetzt sind, aufgefaßt werden und es gilt für sie die Transformationsformel

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\sqrt{t_1 t_2 \ldots t_n}} \vartheta\left(\frac{1}{t}\right). \tag{727}$$

Für den reellen quadratischen Körper stimmt diese Thetareihe mit der früher eingeführten singulären Funktion (705) überein.

Eine ähnliche Reihe erhält man, wenn man zuerst die Thetareihe gliedweise nach den Argumenten differenziert und diese nachher gleich Null setzt. Bedeuten $a_1, \ldots a_{r_1}$ 0 oder 1, ferner $a_{r_1+1}, \ldots a_n$ irgendwelche nicht negative ganze rationale Zahlen, bei denen aber von den beiden Zahlen a_ϱ und $a_{\varrho+r_2}$ immer nur eine von Null verschieden ist, so setze man

$$\vartheta(t, a) = \sum_{\mu} \prod_{\varrho} (\mu^{(\varrho)})^{a_\varrho} e^{-\pi \sum_{\varrho} \frac{t_\varrho |\mu^{(\varrho)}|^2}{|\delta^{(\varrho)}|}}, \tag{728}$$

410) Weber-Festschr. 1912, p. 57.

411) Gött. N. 1917, p. 77.

412) *Dedekind,* J. f. Math. 121 (1900), p. 40; *Landau,* Schwarz-Festschr. 1914, p. 244.

413) Gött. N. 1917, p. 299; s. auch *Landau*, Math. Z. 2 (1918), p. 52.

wo ϱ überall die Zahlen $1, 2, \ldots n$ durchläuft; dann ist wieder

$$\vartheta(t,a) = (-i)^{\sum_\varrho{}' a_\varrho} \prod_\varrho \left(\frac{\delta^{(\varrho)}}{|\delta^{(\varrho)}|}\right)^{a_\varrho} \cdot \frac{1}{\prod_\varrho t_\varrho^{a_\varrho+\frac{1}{2}}}\, \vartheta\left(\frac{1}{t}, a'\right), \tag{729}$$

wobei $a'_\varrho = a_\varrho$ für $\varrho = 1, 2, \ldots r_1$, dagegen $a'_{\varrho+r_2} = a_\varrho$ und $a'_\varrho = a_{\varrho+r_2}$ für $\varrho = r_1+1, \ldots r_1+r_2$ ist.

Mit Hilfe der Thetareihe (726) läßt sich die zu k gehörige Zetafunktion folgendermaßen darstellen. Es sei $r = r_1 + r_2 - 1$ und $\eta_1, \ldots \eta_r$ ein System von Grundeinheiten, durch welche also jede Einheit ε in der Form

$$\varepsilon = \xi\, \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} \ldots \eta_r^{m_r} \tag{730}$$

ausgedrückt werden kann, wo ξ eine Einheitswurzel und $m_1, m_2, \ldots m_r$ ganze rationale Zahlen sind. Die Zetafunktion ist durch die Gleichung

$$\xi_k(s) = \sum_\mu \frac{1}{|N(\mu)|^s} \tag{731}$$

definiert, in der μ alle von Null verschiedenen ganzen, nicht assoziierten, d. h. nicht nur um einen Faktor ε verschiedenen Zahlen von k durchläuft. Der Summand der auf der rechten Seite stehenden Summe läßt sich nun zunächst durch ein $(r+1)$-faches Integral darstellen in der Form

$$\frac{1}{|N(\mu)|^s} = \frac{A^{-s}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\pi \sum_\varrho{}' \frac{t_\varrho |\mu^{(\varrho)}|^2}{|\delta^{(\varrho)}|}} \cdot \prod_\varrho t_\varrho^{\frac{s}{2}} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_{r+1}}{t_{r+1}}, \tag{732}$$

wo zur Abkürzung

$$2^{-r_2} \pi^{-\frac{n}{2}} |\sqrt{d}| = A \tag{733}$$

gesetzt ist und wo man nun das Integral statt über alle positiven t auch nur über jenen Teilraum der t erstrecken kann, der keine zwei durch Gleichungen von der Form

$$t_\varrho' = |\varepsilon^{(\varrho)}|^2 t_\varrho \tag{734}$$

miteinander verknüpften Punkte t, t' enthält, wenn man nur gleichzeitig über alle zu μ assoziierten Zahlen $\varepsilon\mu$ summiert. Führt man dann noch an Stelle der t neue Variablen $u, x_1, \ldots x_r$ ein vermöge der Gleichungen

$$t_\varrho = u\, e^{-2\sum_{\varkappa=1}^{r}{}' x_\varkappa \log|\eta_\varkappa^{(\varrho)}|}, \tag{735}$$

so erhält man schließlich

$$A^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \xi_k(s) = C \int_0^\infty du \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dx_1 \ldots \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dx_r\, u^{\frac{ns}{2}-1} (\vartheta(t) - 1), \tag{736}$$

wo C eine Konstante des Körpers ist.

Aus dieser Darstellung der ξ-Funktion ergibt sich nun für jeden Körper k wie bei *Riemann* vermöge der Transformationsformel (727) die Fortsetzbarkeit von $\zeta_k(s)$ und ihre Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s), \tag{737}$$

wenn

$$A^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_k(s) = \xi(s) \tag{738}$$

gesetzt wird.

Man kann aus $\vartheta(t)$ durch eine ähnliche Integralformel noch andere Funktionen von s ableiten, die als verallgemeinerte Zetafunktionen zu bezeichnen und gleichfalls für die Theorie von k von Bedeutung sind.

Zu dem Ende bezeichne man die zu

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \log|\eta_1^{(1)}| & \log|\eta_1^{(2)}| & \dots & \log|\eta_1^{(r+1)}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \log|\eta_r^{(1)}| & \log|\eta_r^{(2)}| & \dots & \log|\eta_r^{(r+1)}| \end{bmatrix} \tag{739}$$

reziproke Matrix mit

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_1^{(1)} & \dots & e_1^{(r)} \\ e_2 & e_2^{(1)} & \dots & e_2^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{r+1} & e_{r+1}^{(1)} & \dots & e_{r+1}^{(r)} \end{bmatrix} \tag{740}$$

und bilde, indem man unter $m_1, \dots m_r$ beliebige ganze rationale Zahlen versteht, für eine Körperzahl μ die Funktion

$$\lambda(\mu) = \prod_{\varkappa=1}^{r} e^{2\pi i m_\varkappa \sum_{\varrho=1}^{r+1} e_\varrho^{(\varkappa)} \log|\mu^{(\varrho)}|}, \tag{741}$$

dann ist für jede Einheit ε

$$\lambda(\varepsilon\mu) = \lambda(\mu) \tag{742}$$

und ferner für jedes Zahlenpaar α, β

$$\lambda(\alpha\beta) = \lambda(\alpha)\lambda(\beta). \tag{743}$$

Für die allgemeinere Zetafunktion

$$\zeta_k(s, \lambda) = \sum_{\mu} \frac{\lambda(\mu)}{|N(\mu)|^s} \tag{744}$$

erhält man dann der Gleichung (736) entsprechend die Darstellung

$$\begin{aligned} \xi(s, \lambda) &= A^s \Gamma(s, \lambda) \zeta_k(s, \lambda) \\ &= C \int_0^\infty du \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dx_1 \dots \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dx_r u^{\frac{ns}{2}-1} e^{-2\pi i \sum_1^r m_\varkappa x_\varkappa} (\vartheta(t) - 1), \end{aligned} \tag{745}$$

worin

$$\Gamma(s,\lambda)=\prod_{\varrho=1}^{r+1}\Gamma\Big(\frac{e_\varrho s}{2}-\pi i\sum_{\varkappa=1}^{r}m_\varkappa e_\varrho^{(\varkappa)}\Big) \tag{746}$$

ist und aus der wieder die Funktionalgleichung

$$\xi(s,\lambda)=\xi(1-s,\lambda^{-1}) \tag{747}$$

folgt.

Führt man die Integration nach u aus, so folgt eine einfache Beziehung zwischen $\xi(s,\lambda)$ und den Funktionen (722) von *Epstein*.

Man lasse endlich in (744) an Stelle von $\lambda(\mu)$ die allgemeinste den Bedingungen (742), (743) genügende Funktion

$$\lambda(\mu)=\prod_{\varkappa=1}^{r}e^{2\pi i m_\varkappa c_\varkappa(\mu)}\prod_{\varrho=r+1}^{n}\Big(\frac{\mu^{(\varrho)}}{|\mu^{(\varrho)}|}e^{-i\sum_{\varkappa=1}^{r}\vartheta_\varkappa^{(\varrho)}c_\varkappa(\mu)}\Big)^{a_\varrho} \tag{748}$$

treten, bei der

$$c_\varkappa(\mu)=\sum_{\varrho=1}^{r+1}e_\varrho^{(\varkappa)}\log|\mu^{(\varrho)}| \tag{749}$$

und

$$\vartheta_\varkappa^{(\varrho)}=\arg.\eta_\varkappa^{(\varrho)}=\begin{cases}0 & ,\ \text{wenn } \varrho=1,2,\dots r_1,\\ -\vartheta_\varkappa^{(\varrho+r_2)}, & \text{wenn } \varrho=r_1+1,\dots r_1+r_2\end{cases} \tag{750}$$

ist, die $m_\varkappa$ beliebige ganze rationale Zahlen, die a_ϱ aber denselben Bedingungen unterworfen sind wie bei der Thetafunktion (728) und gegebenfalls noch einer aus (742) folgenden Kongruenz. Die dann entstehende Zetafunktion (744) ist mit der Funktion $\vartheta(t,a)$ verknüpft durch die Gleichung

$$\xi(s,\lambda)=\gamma(\lambda)A^s\Gamma(s,\lambda)\xi_k(s,\lambda) \tag{751}$$

$$=\lambda\big(|\sqrt{\delta}|\big)\cdot C\cdot\prod_{\varrho=1}^{n}(e_\varrho\pi)^{\frac{1}{2}a_\varrho}\int_0^\infty du\int_{-\frac12}^{+\frac12}dx_1\dots\int_{-\frac12}^{+\frac12}dx_r\,u^{\frac{ns}{2}+\frac12\sum_1^n a_\varrho-1}e^{-\sum_1^r x_\varkappa M_\varkappa}\vartheta(t,a),$$

wo zur Abkürzung

$$2\pi i m_\varkappa-\sum_{\varrho=1}^{n}a_\varrho(\log|\eta_\varkappa^{(\varrho)}|+i\vartheta_\varkappa^{(\varrho)})=M_\varkappa \tag{752}$$

gesetzt ist und weiter

$$\gamma(\lambda)=\prod_{\varrho=1}^{r+1}|\sqrt{e^{(\varrho)}}|^{\sum_{\varkappa=1}^{r}e_\varrho^{(\varkappa)}\left(2\pi i m_\varkappa-i\sum_{\nu=1}^{n}\vartheta_\varkappa^{(\nu)}\right)} \tag{753}$$

und

$$\Gamma(s,\lambda)=\prod_{\varrho-1}^{r+1}\Gamma\Big[\frac{e_\varrho}{2}\Big(s+\frac{a_\varrho+a_\varrho'}{2}\Big)-\sum_{\varkappa=1}^{r}e_\varrho^{(\varkappa)}\Big(\pi i m_\varkappa-\frac{i}{2}\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\vartheta_\varkappa^{(\nu)}\Big)\Big] \tag{754}$$

ist, und es gilt für sie gleichfalls die Funktionalgleichung (747).

Weitere arithmetische Verfeinerungen, welche man erhält, indem man die Zahlen und Ideale des Körpers nach einem beliebigen Modul in Klassen einteilt und die entsprechenden Gruppencharaktere einführt, lassen sich leicht anbringen und führen zu ähnlichen Formeln.[414])

Für reelle quadratische Körper nehmen die Funktionen $\lambda(\mu)$ und $\Gamma(s, \lambda)$ folgende einfache Gestalt an:

$$\lambda(\mu) = e^{\frac{m\pi i}{\log|\eta|}\log\left|\frac{\mu}{\mu'}\right|}, \tag{755}$$

$$\Gamma(s, \lambda) = \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{m\pi i}{2\log|\eta|}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{m\pi i}{2\log|\eta|}\right). \tag{756}$$

Dagegen ist für imaginäre quadratische Körper

$$\lambda(\mu) = \left(\frac{\mu}{|\mu|}\right)^a = \left(\frac{\mu'}{|\mu|}\right)^{-a}, \tag{757}$$

$$\Gamma(s, \lambda) = \Gamma\left(s + \frac{a}{2}\right). \tag{758}$$

Die so für den Körper $k(\sqrt{-1})$ resultierenden Reihen sind in anderem Zusammenhange bereits von *Herglotz*[415]) aufgestellt und daraufhin von *Epstein*[416]) auf die anderen imaginär-quadratischen Körper übertragen worden.

Vermöge der Produktentwicklung

$$\xi_k(s, \lambda) = \prod_{\pi} \frac{1}{1 - \lambda(\pi)\,|\lambda(\pi)|^{-s}}, \tag{759}$$

die über die verschiedenen nicht assoziierten Primzahlen π zu erstrecken ist, stehen diese allgemeinen ξ-Funktionen mit der Verteilung der Primzahlen in Zusammenhang und liefern z. B. Sätze über die Gitterpunkte in beliebigen Winkelräumen, wofür eine quadratische Form $x^2 + y^2$ oder $x^2 - 2y^2$ eine Primzahl ist.

130. Hyperelliptische Flächen.[417]) Die *Kummer*sche (ebenso wie die *Weddle*sche) Fläche ist ein spezieller Fall jener algebraischen Flächen $F(x, y, z) = 0$, welche eine Parameterdarstellung von der Form zulassen, daß x, y, z einwertige, vierfach periodische Funktionen zweier Parameter u, v sind. Diese Flächen hat zuerst *Picard*[418]) betrachtet und sodann *Humbert*[419]) eingehend untersucht, der ihnen auch den obigen Namen gegeben hat.

414) Math. Z. 1 (1918), p. 357 u. 6 (1920), p. 11.

415) Math. Ann. 61 (1905), p. 551.

416) Math. Ann. 63 (1907), p. 205.

417) III C 6b, Nr. 40.

418) J. de Math. 1_4 (1885), p. 312; 5_4 (1889), p. 223; vgl. Pal. Rend. 9 1895), p. 244.

419) J. de Math. 9_4 (1893), p. 29 u. 361.

Bringt man die Perioden auf die Normalform

$$\begin{matrix} \pi i & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & \frac{\pi i}{\delta} & a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{760}$$

so heißt δ der Divisor der Fläche; entsprechen ferner einem Punkte der Fläche r verschiedene Wertepaare u, v (im Periodenparallelotop), so heißt r der Rang der Fläche. Die *Kummer*sche Fläche ist also eine hyperelliptische Fläche von Divisor 1 und dem Range 2, da bei ihr u, v und $-u, -v$ den nämlichen Punkt liefern.

Die homogenen Punktkoordinaten x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ einer hyperelliptischen Fläche lassen sich in der Form

$$x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{761}$$

darstellen, wo Θ_i Thetafunktionen von der nämlichen Ordnung und der nämlichen Charakteristik sind. Verschwinden die 4 Funktionen Θ_i für ein Wertepaar u, v alle 4 gleichzeitig[420]), so entspricht diesem eine ausgezeichnete Kurve auf der Fläche und zwar eine Kurve m^{ter} Ordnung, wenn außer den x_i auch alle ihre partiellen Derivierten nach nach u und v der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots m-1^{\text{ten}}$, aber nicht der m^{ten} Ordnung verschwinden.[421]) Jede algebraische Kurve auf der Fläche wird durch Nullsetzen einer mit denselben Modulen gebildeten Thetafunktion irgendwelcher Ordnung erhalten und umgekehrt.

Eine hyperelliptische Fläche vom Divisor 1 und dem Range 1 nennt man eine *Jacobi*sche Fläche F, eine solche vom Divisor δ und dem Range 1 eine *Picard*sche F_δ[422]) Schon *Picard*[423]) hat angegeben, daß eine *Jacobi*sche Fläche von niedrigerem als dem 6. Grade jedenfalls nicht existieren könne, und *Humbert*[424]) hat eine solche Fläche niedrigsten Grades in der Form

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \vartheta_{123}\vartheta^2{}_1 : \vartheta_{123}\vartheta^2{}_2 : \vartheta_{123}\vartheta_3{}^2 : \vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 \tag{762}$$

gefunden, wo ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 irgend 3 der 6 ungeraden Thetafunktionen sind, ϑ_{123} aber jene gerade Thetafunktion bezeichnet, deren Charakteristik die Summe derer von ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_3 ist. Da ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_{123} ein *Rosenhain*sches System bilden, so erhält man die Gleichung

420) *Picard*, Ann. Éc. Norm. 18_3 (1901), p. 409.

421) Daß diese ausgezeichneten Kurven nicht der Fläche selbst eigentümlich sind, sondern von der gewählten Darstellung abhängen, hat sich bei der *Weddle*schen Fläche (Nr. 69) deutlich gezeigt.

422) *Enriques* und *Severi*, Acc. Linc. Rend. 16_5 (1907) I, p. 443, 17_5 (1908) I, p. 4; Acta math. 32 (1909), p. 283 und 33 (1910), p. 321.

423) J. de Math. 1_4 (1885), p. 336.

424) J. de Math. 9_4 (1893), p. 436,

der Fläche unmittelbar aus der zwischen den Quadraten dieser Funktionen bestehenden Gleichung 4. Grades.[425])

Bezüglich der hyperelliptischen Flächen zweiten Ranges hat *Humbert* gezeigt, daß alle derartigen Flächen vom Divisor 1 Punkt für Punkt auf eine *Kummer*sche Fläche bezogen werden können, die zu einem beliebigen Divisor $\delta > 1$ gehörigen Flächen 2. Ranges aber ihre Analogie mit der *Kummer*schen Fläche zeigen, wenn man sie in einen Raum von $2\delta + 1$ Dimensionen projiziert; in diesem erweisen sie sich als Flächen von der Ordnung 4δ mit 16 konischen Doppelpunkten und 16 längs einer rationalen Normalkurve $2\delta^{\text{ter}}$ Ordnung berührenden Tangentialebenen, welche die gleiche Konfiguration aufweisen wie die 16 Knotenpunkte und 16 singulären Ebenen einer *Kummer*schen Fläche.

Bei den Darstellungen der Koordinaten x_i der zu einem Werte $\delta > 1$ gehörigen Fläche in der Form (761) wird man bemerken, daß die Ordnung der benutzten Thetafunktionen stets ein Vielfaches von δ, also $= n\delta$ sein muß (vgl. p. 833). Die zahlreichen von *Traynard*[426]), *Remy*[427]) und *Chillemi*[428]) durchgeführten Beispiele entsprechen den Werten $n = 1$ und $n = 2$, auch sind die vier Funktionen Θ_i stets entweder alle 4 gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade Funktionen, die Flächen also vom Range 2, d. h. verallgemeinerte *Kummer*sche Flächen.

Bezieht man eine *Picard*sche Fläche F_δ auf das mit den nämlichen Modulen a, aber dem Werte $\delta = 1$ gebildete Periodenschema (760), so ist sie nunmehr vom Range δ. Die so definierten hyperelliptischen Flächen sind für $\delta > 2$ die einzigen bei beliebigen Modulen a existierenden. Außer ihnen gibt es andere nur noch für spezielle Modulwerte; bei ihnen sind die zu einem Punkte gehörigen r Wertepaare u, v durch Gleichungen von der Form[429])

$$\begin{aligned} u_i &= a_i u_1 + b_i v_1, \\ v_i &= c_i u_1 + d_i v_1 \end{aligned} \qquad (i = 2, 3, \cdots r) \tag{763}$$

425) *Krazer,* „$p = 2$", p. 44; *Reichardt,* Nova Acta Leop. 50 (1887), p. 429; *Weber,* J. f. Math. 84 (1878), p. 341; vgl. Anm. 168.

426) Paris C. R. 138 (1904), p 339; 139 (1904), p. 718; 140 (1905), p. 218 u. 931; 143 (1906), p. 637; Thèse, Paris 1907; Ann. Éc. Norm. 24_3 (1907), p. 77; Paris C. R. 146 (1908), p. 521; S. M. F Bull. 38 (1910), p. 280.

427) Paris C. R. 142 (1906), p. 386 u. 768; 143 (1906), p. 767; S. M. F. Bull. 35 (1907), p. 53.

428) Paris C. R. 148 (1909), p. 1091; Pal. Rend. 29 (1910), p. 164.

429) *Enriques* und *Severi,* Acc. Linc. Rend. 16_5 (1907) I, p. 443; *Bagnera* und *de Franchis,* Paris C. R. 145 (1907), p. 747; Acc. Linc. Rend. 16_5 (1907) I, p. 492 u. 596; Soc. Ital. Mem. 15_3 (1908), p. 251; Atti IV Congr. internaz. Rom 1909, p. 249; *Comessati,* Soc. Ital. Mem. 21_3 (1919), p. 45.

verknüpft, die eine Gruppe von der Ordnung r bilden. Es sind demnach Flächen mit birationalen Transformationen in sich. Für die zugehörigen Funktionen ist folglich der Index der Multiplikabilität $h > 1$ und daher auch $k > 1$, d h. die Funktionen sind singuläre von der in Nr. **126** und **127** betrachteten Art.

Nachwort.

Vor mehr als 20 Jahren hatten die beiden Verfasser von der Redaktion den Auftrag übernommen, die Theorie der $2p$-fach periodischen Funktionen von p Veränderlichen und der allgemeinen Thetafunktionen für die Encyklopädie darzustellen. Sie haben damals die übernommene Arbeit in Jahresfrist vollendet und ein Manuskript eingeliefert, das sich inhaltlich mit den jetzigen Nr. **9**–**45** und **112**—**118** (mit Ausnahme der erst neulich eingefügten Nr. **114**) deckt. Der Druck konnte aber damals nicht geschehen, da der Artikel über *Abel*sche Funktionen noch fehlte. Nachdem mehrere Versuche der Redaktion, diesen zu erhalten, keinen Erfolg gehabt hatten, übernahmen die Verfasser vor etwa 12 Jahren auch ihn und einigten sich in den nun folgenden Jahren in schriftlichem und mündlichem Verkehr über den Umfang und die Anordnung des Stoffes. Als der Krieg ausbrach, war das Manuskript bis Nr. **46** hergestellt, aus begreiflichen Gründen erwies sich aber jetzt eine Fortsetzung der gemeinsamen Arbeit als unmöglich und bei der Andauer des Krieges mußte, wenn die Vollendung nicht ins unbestimmte verschoben werden sollte, einer von uns allein die weitere Arbeit übernehmen. So ging ich im Sommer 1916 an die Fortsetzung des Manuskriptes, das ich nach zwei Jahren der Redaktion einreichen konnte. Von Nr. **47** an bin ich also allein für die Darstellung verantwortlich. Bei den Nr. **127**—**129** hatte ich mich der Mitarbeit des Herrn Kollegen *Hecke* zu erfreuen.

Die Theorie der *Abel*schen Funktionen ist das Werk einer größeren Anzahl von Mathematikern, die von recht verschiedenen Gesichtspunkten ausgingen und mit recht verschiedenen Hilfsmitteln arbeiteten. Ich war bestrebt, die einzelnen Teile möglichst in der Form darzustellen, in der sie uns von ihren Urhebern übermittelt worden sind. Damit war natürlich der Verzicht auf die Einheitlichkeit der Darstellung verbunden; hätte ich aber diese erreichen wollen, so hätte ich mich von der Aufgabe der Encyklopädie, den Leser möglichst leicht über einen Gegenstand zu orientieren und auf die Quellen zurückzuführen, weiter entfernt.

Karlsruhe, den 5. Dezember 1920. **Krazer.**

(Abgeschlossen im Dezember 1920.)

Register zu Band II, 2. Teil.

Die Stichworte des Registers sind durch gesperrten Druck hervorgehoben; die Wiederholung des Stichwortes ist durch einen Bindestrich angedeutet. Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten des Bandes, die größeren auf den Text, die kleineren auf die Fußnoten. Unter dem einzelnen Stichworte sind die Nachweise nach steigender Seitenzahl angeordnet, so daß gelegentlich dem einzelnen Gegenstande mehrere getrennt stehende Nachweise zukommen.

A

Abbildung, konforme (winkeltreue) — im Kleinen 19, im Großen 52; konforme — einfach zusammenhängender Bereiche auf die Kreisfläche 55, 56; konforme — der Kreisfläche auf sich selbst 56; konforme — analytisch begrenzter Bereiche auf den Kreis 59; konforme — mehrfach zusammenhängender Bereiche nach Riemann und Schottky 64; — der Oberfläche des Tetraeders auf die Kugelfläche 335; — der zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit vier Verzweigungspunkten auf das Periodenparallelogramm 254 ff.; Umkehrung dieser — 268; — der Oberfläche des Ellipsoids auf die Ebene 334; — einer Vollkugel auf ein Quadrat 334, Benutzung dieser — in der Astronomie 334; — eines Quadrats oder Rechtecks auf den Kreis 334; –en durch einzelne Abelsche Integrale 1. Gattung 616 ff., durch die Integrale 2. u. 3. Gattung 618.

Abelsche Funktionen, allgemeiner Begriff der –n — 611; Riemanns Theorie der –n — 686 ff., spätere Ausführungen in niederen Fällen 692; — — im Sinne Riemanns 691; Theorie der –n — bei Clebsch-Gordan 692 ff.; Theorie der –n — bei Weierstraß 698 ff.; Theorie der –n — bei Klein 733 ff., speziell für $p = 3$ 801.

Abelsche Integrale, Existenz –r — auf gegebener Riemannschen Fläche 62; Allgemeines über — — 127; die drei Gattungen der –n — 132; algebraische Darstellung der Integranden –r — 137, nach Clebsch-Gordan 138, nach arithmet. Methoden 138, nach Weierstraß 151 ff., nach Klein in invarianter Gestalt 154; Umkehrung der –n — 162 (s. auch „Umkehrung“ und „Umkehrproblem“); Transformation der –n — 165; Multiplikation u. Teilung der –n — 165; Reduktion –r — auf solche niederen Geschlechtes, insbesondere auf elliptische 166; — — 2. u. 3. Gattung, Zusammenhang mit $\log \vartheta(v)$ 690, ausführlicher 712; Reduzierbarkeit –r — 838, zugehöriger Satz von Wirtinger 840; Reduzierbarkeit –r — auf elliptische 840; Reduzierbarkeit –r — bei $p = 2$ 841.

Abelsche Reduktionstheoreme 164.

Abelsche Relationen 207, 315.

Abelsches Theorem, ursprüngliche Gestalt 159, für die drei Gattungen der Integrale 160; Differentialgleichungen des –n –s 161; Umkehrung des –n –s 162; Anwendung des –n –s auf die Theorie der Kurven 162, 164, sonstige Anwendungen 163, 164; Erweiterungen des –n –s 164; — — als Grundlage bei Untersuchung der Kurven 3. u. 4. Grades 330.

Abelsche Transzendente 612, im Sinne von Clebsch-Gordan 693; Adjungierte — — 695; — — 2. u. 3. Gattung 707, ihre Darstellung durch Thetafunktionen 709.

Ableitung einer Funktion $f(z)$ 11.

Achte Einheitswurzel bei linearer Transformation der Thetafunktionen

239, bei linearer Transformation von $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ 239, bei linearer Transformation der Heckeschen Thetafunktionen 861.

Additionstheoreme, — der ellipt. Integrale, erster Keim u. spätere Entwicklung bei Fagnano 182; Entdekkung der — von Euler 183; — der ellipt. Integrale als Lösungen von Differentialgleichungen bei Euler 183, bei Lagrange 186, bei Eisenstein 244; — der ellipt. Integrale 2. u. 3. Gattung bei Euler 185; Gestalt der — bei Legendre 190, bei Abel 198; — der elliptischen Thetafunktionen 220; — als Ausgangspunkt bei Weierstraß 294; allgemeine Behandlung der — der ellipt. Funktionen 296; Existenz eines —s für die ellipt. Funktionen charakteristisch 296; — für $\wp(u)$ u. $\zeta(u)$ 297; invariante Gestalt der — nach Klein 297; sonstige algebraische Gestalten der — der ellipt. Funktionen 298, 298, 300; — für mehrgliedrige Argumentsummen 299; — der σ-Funktion u. der Thetafunktionen 300 ff.; die 256 — der Thetafunktionen 301, 301; — der Integrale 2. u. 3. Gattung 301; — der Thetaquotienten bei beliebigem p 671; — der allgemeinen Thetafunktionen bei $p \geqq 3$ 674; — zwischen Thetafunktionen verschiedener Moduln 685; — als Ausgangspunkt bei Weierstraß 699, 827; — der hyperelliptischen Thetafunktionen 771; — der allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktionen 827.

Adjungierte Differentialgleichungen 515; — Kurven zu einer Grundkurve (bei Clebsch u. Gordan) 694; — Transzendente (bei Clebsch u. Gordan) 695.

Ähnlichkeitsverhältnis der konformen Abbildung 20.

Äquianharmonischer Fall der elliptischen Funktionen bei Eisenstein 243; — Fall der elliptischen Gebilde 289.

Äquivalent, —e Punktsysteme auf einer Riemannschen Fläche (einem algebraischen Gebilde, einer Kurve) 142; —e Punkte (Figuren) in der Ebene des elliptischen Integrals 1. Gattung 263; —e Punkte (Figuren) bezüglich der Gruppe aller Substitutionen $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ 263, bezüglich der Modulgruppe 266, bezüglich einer Gruppe von Substitutionen einer Variablen 360; —e (nichtlineare) Periodentransformationen 635.

Akzessorische Parameter in Differentialgleichungen der polymorphen Funktionen 435 ff., 466; — — in einer linearen Differentialgleichung 497; Festlegung der —n — durch den Fundamentalbereich 533, speziell bei Kreisbogenvierecken 534.

Al-Funktionen von Weierstraß 626.

Algebraisch, —e Gebilde 33; —e Funktionen 34; Erklärung und ältere Geschichte der —en Funktionen 117; —es Gebilde nach Weierstraß 119; Riemanns Theorie der —en Funktionen 120 ff.; Funktionen an einem —en Gebilde 124; Weierstraß' Theorie der —en Funktionen 139 ff.; —e Integrale, ihre Darstellung durch die Integrale 3. Gattung nach Weierstraß 151 ff.; durch —e Funktionen und Logarithmen ausführbare —e Integrale 152; —e Funktionen mehrerer Variablen 173; —e Grundlagen der Theorie der ellipt. Funktionen 251 ff., 257; —e Gebilde des Geschlechtes 1 und elliptische Gebilde, Gegenüberstellung 286 ff.; —e multiplikative Formen auf Riemannschen Flächen 400; —e Probleme bei regulär verzweigten Riemannschen Flächen 429; — integrierbare lineare Differentialgleichungen 524, einfachste Fälle 525, bei Differentialgleichungen 3. Ordnung 526, bei solchen des Fuchsschen Typus 527; — integrierbare Differentialgleichungen 2. Ordnung 528 ff.; —e Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichungen 546; —e Gebilde, durch Thetafunktionen dargestellt 670 ff.; —e Funktionen einer Riemannschen Fläche 690, ihre Darstellung durch Thetafunktionen 714.

Algebroider Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen 566 ff.

Allgemeine Teilungsgleichung der elliptischen Funktionen bei Abel 199, 307; — — der elliptischen Funktionen als Abelsche Gleichung 308; Lösungsprozeß der — — der elliptischen Funktionen 309 ff.; — — der Abelschen Funktionen 816.

Analytisch, —er Charakter einer algebraischen Funktion 11; —es Verhalten in einem Punkte 12; —es Verhalten „im Kleinen“ und „im Großen“

12; —e Funktion 12, 35 ff.; —e Fortsetzung 35; Prinzip der —en Fortsetzung nach Klein 38; —e Gebilde 40; notwendige und hinreichende Bedingungen für eine —e Funktion 42; Deutung —er Funktionen durch Kurven 43; Erklärung —er Funktionen durch bestimmte Integrale 50; reelle —e Funktion (Begriffserklärung) 57; —e Kurve (Begriffserklärung) 58; —e Funktion von n unabhängigen Variablen 98; —e Fortsetzung bei Funktionen mehrerer Variablen 108; —es Funktionssystem 110; —es Gebilde n^{ter} Stufe bei $(n+r)$ Variablen 110; —e Funktion $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ mit nur außerwesentlich singulären Punkten 111; —e Form mehrerer Argumente 112; —e Darstellung von Modulfunktionen und Modulformen 416 ff.; —e Darstellung von g_2 und g_3 416; —e Darstellungen der Kleinschen Funktionen $\sigma_{\lambda\mu}$, X_α, Z_α, ... 418 ff.; —e Darstellungen für polymorphe Formen 438 ff.; —e Integrale bei linearen Differentialgleichungen an singulären Stellen (Anzahl solcher Integrale) 483.

Anormale Reihen bei linearen Differentialgleichungen 488.

Arithmetisch, —e Behandlung der algebraischen Funktionen (bei Dedekind und Weber) 125, 126; —e Repräsentanten für Transformation $n^{\text{t}\,n}$ Grades der elliptischen Funktionen 320; —e Erklärung von Gruppen linearer Substitutionen einer Variablen (Hauptkreisgruppen) 385.

Arithmetisch-geometrisches Mittel von Gauß 222, 224, Geschichtliches darüber 222, Zusammenhang mit dem elliptischen Integral 1. Gattung 223; Differentialgleichung des —n—s 224; Beziehung des —n—s zu den Thetanullwerten 225; —n— — von vier Elementen bei Borchardt 758.

Artbegriff bei linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten 511.

Assoziierte Differentialgleichgn. 514.

Asymptotisch, —e Formeln für die Ableitungen der Thetareihen nach ω 283; —e Bewegung des einfachen Pendels 338; —e Darstellung von Integralen linearer Differentialgleich. 489.

Ausartungen der elliptischen Gebilde 289 ff.

Ausgezeichnete Untergruppen der Modulgruppe und regulär verzweigte Riemannsche Flächen 387.

Außerwesentlich singuläre Stelle einer analytischen Funktion 18; — — — einer analytischen Funktion von n Argumenten 102; — — — bei linearen Differentialgleichungen 483.

Automorph, —e Funktion, allgemeiner Begriff 351; periodische Funktionen als —e Funktionen 353; Funktionen der regulären Körper als —e Funktionen 353; Geschichtliches über die Theorie der —en Funktionen 357 ff.; —e Gebilde, Begriff und Hauptsätze 394 ff.; Klassifikation der —en Funktionen 395 ff.; —e Formen, allgemeine Begründung 402; eindeutige —e Formen 402, deren Reihendarstellung 402 ff.; —e Formen des Geschlechtes Null 403; polfreie oder ganze —e Formen 407; —e Formen bei Gebilden mit beliebigem p 407; —e Primform 408, 414 ff; —e Elementarform 413; Produktdarstellung der —en Primform 415; —e Modulgruppen 450; mehrdeutige —e Funktionen 464; —e Funktionen von mehreren Variablen 466 ff.

Azygetisch, als Bezeichnung von Thetacharakteristiken 654; —e Charakteristiken bei $p = 2$ 743.

B

Begrenzung, Arten der — bei Bereichen 10

Benachbarte Funktionen (bei hypergeometrischen Funktionen) 541.

Bereiche T, B, T' in der z-Ebene 9 ff.; — B_n mit Randkurven 10; — bei n unabhängigen Variablen 97.

Bertinische Kurve 788.

Berührungsformen 718; reine — 718, 723.

Berührungsfunktionen 718.

Bestimmte Integrale zur Darstellung polymorpher Formen 439; — — zur Darstellung der hypergeometrischen Funktionen 545 ff.

Bestimmtheit, singuläre Stellen der — bei linearen Differentialgleichungen 478, zugehörige Gestalt der Differentialgleichungen 479, 485, speziell für

Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung 484.
Bewegliche Ecken eines Diskontinuitätsbereiches 368.
Biegsamer Faden, Gleichgewichtsfigur desselben 338.
Biharmonische Funktion 101.
Bilinearrelationen zwischen den Perioden Abelscher Integrale 134; — zwischen den Perioden hyperellipt. Integrale 1. Gattung bei Rosenhain 622; — zwischen den Perioden der Integrale 1. u. 2. Gattung bei Weierstraß 626; — zwischen den Perioden einer allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktion 826, 832; — zwischen den Elementen einer Riemannschen Matrix 827.
Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich 358, 855, 857.
Binomische Integrale 167.
Biquadratisches Reziprozitätsgesetz, mit elliptischen Funktionen bewiesen von Eisenstein 243.
Birationale Transformationen der Invarianten der Hauptkreisgruppen 373; — — als Darstellungen der Lösungen von Differentialgleichungen 571, 585 ff.
Bizirkulare Kurve 4. Grades, geliefert vom reellen und imaginären Bestandteile von $\mathrm{sn}\, u$ 335.
Bogenelement, Methode des —es beim Beweise des Grenzkreistheorems 452.
Borchardtsche Moduln nach Klein 799.
Briot-Bouquetsche Differentialgleichung 572.

C

Calcul des résidus als Quelle der Sätze über doppeltperiodische Funktionen 233.
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen 13, 55, ihr hydrodynamischer Ursprung 13; — —sche Differentialgleichungen bei Funktionen mehrerer Variablen 100 ff.
Cauchysche Integralsätze 14; —sche Integralformel 17; —scher Integralsatz bei Funktionen mehrerer Variablen 99; —sche Integralformel bei Funktionen mehrerer Variablen 100.
Cauchy-Taylorsche Reihe 22, bei Funktionen mehrerer Variablen 102.
Cayleysche Maßbestimmung, Beziehung zu den linearen Substitutionen 365.
Charakter eines kanonischen Diskontinuitätsbereiches 369, 373.
Charakteristik, Thetafunktionen mit gebrochener — (bei $p = 1$) 278; — einer Thetafunktion n^{ter} Ordnung (bei $p = 1$) 324, 324; — einer allgemeinen Thetafunktion 639; Thetafunktionen mit halben —en 649 ff., mit r^{tel} —en 676; — einer Prymschen Funktion 737, ausgezeichnete 738; Theorie der —en bei $p = 2$ 743, bei $p = 3$ 775, bei $p = 4$ (nach Noether) 784.
Charakteristische Gleichung bei Umläufen von Lösungen linearer Differentialgleichungen 476.
Charakteristischer Index bei singulären Stellen von linearen Differentialgleichungen 486.
Contour élémentaire, Bezeichnung von Puiseux 30.
Coupures im Sinne von Hermite 30.
Curva elastica von Gauß (Lemniskate) 345.
Cyklen von Zweigen einer algebraischen Funktion 118.

D

Dachziegelartige Überdeckung von Bereichen bei Abbildungsaufgaben 60, 62.
Definitionsbereich einer analytischen Funktion 39, bei mehreren Variablen 108.
Determinante von Brioschi u. Kiepert (bei Multiplikation der elliptischen Funktion) 303; unendliche —n bei Lösungen von Differentialgleichungen 495.
Determinierende Fundamentalgleichung oder Gleichung einer Differentialgleichung 480, Beziehung zur Fundamentalgleichung 482.
Diasymmetrische Riemannsche Fläche 172, 732.
Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann 13; — des Abelschen Theorems 161; — für Zähler u. Nenner der Jacobischen Transformationsformeln bei Jacobi selbst 241, bei Eisenstein 244; — der Thetafunktionen ($p = 1$) 241, 324 und der Sigmafunktion 275; — der Perioden ω_1, ω_2 und η_1, η_2 in bezug auf die Invarianten 275 ff.; lineare — 2. Ordnung u. auto-

morphe Funktionen 355 ff.; — der polymorphen Funktionen u. Formen 435 ff.; lineare homogene — 2. Ordnung für polymorphe Formen 436; hypergeometrische — für polymorphe Formen 436; invariante Gestalten der — für polymorphe Formen 437; lineare homogene —, durch Poincarésche Zetafunktionen gelöst 444; partielle — von Liouville 453; lineare — 474 ff.; lineare — mit rationalen Koeffizienten 496 ff.; algebraisch integrierbare lineare — 525; — für Integralperioden 553; lineare — von unendlich hoher Ordnung (Beziehung zu den Integralgleichungen) 558; — des Fuchsschen Typus auf Flächen mit $p = 1$ 560; nicht lineare — 1. Ordnung 566 ff.; — ohne verschiebbare Verzweigungspunkte 568; — 1. Ordnung mit endlich-wertigen allgemeinen Lösungen 574 ff.; —, deren allgemeine Lösungen algebraisch von den Integrationskonstanten abhängen 576; — höherer Ordnung, insbes. bei algebraischer Abhängigkeit der Lösungen von den Integrationskonstanten 585 ff.; — für die allgemeinen Thetafunktionen 638; — für die Sigmafunktionen nach Wiltheiß 805; — für Thetafunktionen mit zwei Variablen 807.

Differential, überall endliches — einer Riemannschen Fläche 399 ff.

Differentiationsprozesse D_ω u. D_η bei Modulformen 273 ff.; — zur Herstellung von automorphen Formen 403.

Dimension einer analytischen Funktion mehrerer Argumente 112.

Dirichletsches Prinzip 55, 129.

Diskontinuitätsbereich der Gruppe der Substitutionen $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ 265; — der Modulgruppe 266, 363; — einer Gruppe von Substitutionen 361; Existenz des —s bei einer Gruppe ohne infinitesimale Substitutionen 362; kanonischer — 369; —e bei Hauptkreisgruppen 371.

Diskriminante der Modulargleichung bei Hermite 240; — $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ 250, ihre Produktdarstellung 273, 281.

Diskriminantengleichung einer algebraischen Differentialgleichung 1. Ordnung 570.

Divergente Reihen als Lösungen linearer Differentialgleichungen 489.

Division der elliptischen Funktionen bei Abel 190, spezielle 200; — der ellipt. Funktionen bei Gauß 230; —sgleichungen s. Teilungsgleichungen; — der ellipt. Funktionen, systematisch entwickelt 306 ff.; — der Perioden Abelscher Funktionen 633; — der Thetafunktionen für $p = 2$ 818.

Divisor einer hyperelliptischen Fläche 871.

Doppelintegral einer analytischen Funktion $f(z_1, z_2)$ 98.

Doppelkern eines Fundamentalbereiches 507.

Doppelprodukte u. —reihen für die elliptischen Funktionen bei Abel 202, bei Weierstraß 259.

Doppelschleifenintegrale als Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichungen 538.

Doppelte Periodizität der ellipt. Funktionen bei Abel und Jacobi 196, 198, 200, bei Gauß 196 ff., 226.

Doppeltperiodische Funktionen, erste Untersuchungen über — — 232 ff.; Liouvillesche Sätze über — — 233; Puiseux' Behandlung der —n — 234; Behandlung der —n — bei Hermite, als Vorläufer von Weierstraß 236; — — 2. u. 3. Art 238, deren Reihenentwicklungen 238; independente Erklärung der —n — 264.

Doppelumlauf, Integrale mit — um zwei Verzweigungspunkte 51.

Doppelverhältnis λ der vier Verzweigungspunkte in der Theorie der elliptischen Funktionen 249, Zusammenhang mit dem Modul k^2 282; die sechs Gestalten des —es λ 284; Gleichung 6. Grades zwischen dem — λ und der absoluten Invariante J 288.

Dreiecksfunktionen 355; Beziehung der — zu den Minimalflächen 356; Transformation der — 428.

Dreiecksnetz der Modulgruppe 363 ff.; in projektiver Gestalt 367.

E

Eigentlich zur n-Stufe gehörende Modulformen 313; —e Transformation n^{ten} Grades der elliptischen Funktionen 318; — diskontinuierliche Gruppen 362; — automorphe Formen 408; —e Transformation n^{ten} Grades der Modulfunktionen 421.

Eindeutige Bestimmtheit der Potenzreihe einer analytischen Funktion 23; — Funktionen einer Riemannschen Fläche 125; — Transformationen eines algebraischen Gebildes in sich 171; — Transformationen einer Riemannschen Fläche in sich 387; — Funktionen mit linearen Transformationen in sich 447.

Einfaches Pendel, mit elliptischen Funktionen behandelt 338 ff.

Einheitswurzel, achte — bei der linearen Transformation der Thetafunktionen 285, deren Bestimmung durch Gaußsche Summen 285; 24. — bei der linearen Transformation der Wurzel $\sqrt[24]{\Delta}$ der Diskriminante 286; —n bei linearer Transformation der Heckeschen Thetafunktionen 861.

Einpolige Poincarésche Reihen 412.

Elastische Kurve, Beziehung zu den elliptischen Integralen 345.

Elektromagnetische Anwendung der ellipt. Integrale 3. Gattung 347.

Elementarcharakteristik bei Abelschen Funktionen nach Klein 657, 727.

Elementardreieck der Modulgruppe 363.

Elementare Kurven zur Darstellung der algebraischen Funktionen 144.

Elementarformen, automorphe 413.

Element eines algebraischen Gebildes 120.

Elément simple, s. Elementarformen.

Elliptische Differentiale, erstes Auftreten bei Wallis, Wreen, Pascal usw. 182.

Elliptische Funktionen, Begriff der —n — bei Legendre 187, bei Abel und Jacobi 197 ff., 210; allgemeine — — bei Gauß 228; Spaltung der —n — in Quotienten ganzer transzendenter Funktionen bei Gauß 228; — — bei Eisenstein als Vorläufer von Weierstraß 244 ff.; — — bei Cayley 245, bei Riemann 246 ff., bei Weierstraß 246 ff.; — — als Funktionen von drei Argumenten 272; — — n^{ter} Stufe nach Klein 278; — — 2. Stufe 279 ff.

Elliptische Gebilde, Gegenüberstellung mit den algebraischen Gebilden des Geschlechtes eins 286 ff.

Elliptische Integrale, allgemeine Erklärung 182; — — als selbständige Gebilde bei Euler 184, bei Legendre 188; Normalformen der —n — bei Euler 184, bei Legendre 189, bei Riemann und Weierstraß 253; Zusammenstellung der Normalformen der —n — 253; —s — 1. Gattung als uniformisierende Variable 257; Normalformen der —n — 2. u. 3. Gattung bei Weierstraß 258; — — 3. Gattung, durch die σ-Funktion dargestellt 271; Reduktion Abelscher Integrale auf — — 166, 840.

Elliptische Modulformen, s. „Modulformen".

Elliptische Modulfunktionen, s. „Modulfunktionen".

Elliptische Normalkurven 247, 329; Herstellung von Modulformen mittelst der —n — nach Klein 418 ff.

Elliptische Substitutionen einer Variablen 361.

Elliptisch-hyperelliptische Funktionen nach Schottky 787, 845 ff.

Endliche Gruppen linearer Substitutionen 353, 358, 366, bei den Kleinschen Funktionen X_α, z_α, ... 419.

Entwicklung einer Funktion $f(z)$ in eine Potenzreihe 22 ff.; — — — in der Nähe einer isolierten singulären Stelle 28; — — ganzen — in ein unendliches Produkt 77 ff.; — — — nach Polynomen 89 ff.; — — — in einen Kettenbruch 91.

Ergänzungsrelationen bei Kreisbogenpolygonen 508.

Erlaubte Abänderungen bei Diskontinuitätsbereichen 369; — Wertepaare bei homogenen binären Variablen 401.

Erniedrigung der Modulargleichung 240; — — — bei den Transformationsgraden 5, 7, 11 der ellipt. Funktionen 430.

Erweiterter Riemann-Rochscher Satz 400, 414.

Erweitertes Umkehrproblem nach Clebsch-Gordan 808, frühere Ansätze im hyperelliptischen Gebiete 811, Weiterführungen 812.

Erweiterte Umkehrung des Abelschen Theorems bei Heranziehung von Integralen 2. u. 3 Gattung 163.

Erzeugung der Modulgruppe 364; — beliebiger Gruppen linearer Substitutionen einer Variablen 369; — der Gruppe der linearen ganzzahligen

Transformationen bei Abelschen Funktionen 633 ff.
Eulersche Differentialgleichung und ihre Lösung bei Euler selbst 183 ff., bei Legendre 189 ff.; — Substitution bei Herstellung der elliptischen Normalintegrale 188; — Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers 340; — Winkel bei den Drehungen eines starren Körpers 340; — Transformierte einer linearen Differentialgleichung (nach Schlesinger) 559.
Existenzbeweis der Greenschen Funktion eines Bereiches 59; — der Funktionen einer Riemannschen Fläche 62 ff.; — der doppeltperiodischen Funktionen 267; — der automorphen Funktionen 393 ff.; mittelst funktionentheoretischer Methoden nach Klein 394, nach Poincaré 395; —e der Lösungen linearer Differentialgleichungen 473 ff., für singuläre Stellen der Bestimmtheit 479 ff.; —e polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen s. „Fundamentaltheorem".

F

Fadenkonstruktionen des Ellipsoids, durch hyperelliptische Funktionen abgeleitet 756.
Familie von Hauptkreisgruppen 374; — von linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten 512; — von Formenscharen 513 ff.
Fermats Satz über die Darstellung jeder Zahl als Summe von vier Quadraten 331.
Feste Ecken (elliptische oder parabolische) eines Diskontinuitätsbereiches 368.
Fixpunkt einer linearen Substitution einer Variablen 360.
Flächengeschlecht bei algebraischen Funktionen zweier Variablen 174.
Fonctions intermédiaires bei Hermite 235, 238, bei Briot u. Bouquet 834.
Formen, die $p - \varphi$ in homogenen ternären Variablen 133; — φ nach arith. Methoden aufgestellt 139; — φ zur invarianten Darstellung der Wurzelformen verwandt 725; s. auch „automorph" u. „Modulformen".
Formenscharen, linear-polymorphe auf Riemannschen Flächen 400 ff.
Fouriersche Reihen für die ellipt. Funktionen bei Jacobi 215; — — der Weierstraßschen Funktionen $\wp$, $\wp'$, ζ 261.
Fuchssche Funktionen 359.
Fuchsscher Typus linearer Differentialgleichungen 497.
Functiones contiguae (hypergeometrische Funktionen) 541.
Fundamentalbereich als Verallgemeinerung einer Riemannschen Fläche 69, zugehörige Gruppen 70, zugehörige Funktionen 71 ff.; symmetrische —e 74; — als Mittel zur Erklärung zugehöriger Funktionen 355, 393; Begriff des „funktionentheoretischen —s" 393; — bei linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung 506.
Fundamentalflächen und —komplexe bei der Kummerschen Fläche 749.
Fundamentalgleichung bei Umläufen von Lösungen linearer Differentialgleichungen 476; determinierende — 480.
Fundamentalinvarianten der Gruppe einer Differentialgleichung 499; die — als Funktionen der Parameter der Differentialgleichungen 501 ff.
Fundamentalsatz der Algebra, Beziehung zum Cauchyschen Integralsatze 14.
Fundamentalsubstitutionen beim Riemannschen Problem 519.
Fundamentalsystem von Lösungen linearer Differentialgleichungen 474; — von Periodencharakteristiken 657; — von Thetacharakteristiken 659.
Fundamentaltetraeder bei der Kummerschen Fläche 751.
Fundamentaltheorem, —e über Existenz polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen 360, 445 ff.; allgemeinstes — 448.
Funktionalgleichungen zur Erklärung u. Fortsetzung analytischer Funktionen 48 ff.
Funktionen eines komplexen Argumentes 10; analytische — 12 ff.; holomorphe — 12; ganze — 23; rationale — 28; mehrdeutige — 29; algebraische — 34; — mit Transformationen in sich 65; periodische — 66; — einer Riemannschen Fläche, durch Integrale dargestellt 135; s. auch „Abel-

sche Funktionen", „Automorph", „Doppeltperiodische Funktionen", „Dreiecksfunktionen", „elliptische Funktionen", „Modulfunktionen" usw.
Funktionentheoretische Repräsentanten für Transformation n^{ten} Grades der elliptischen Funktionen 320

G

Galoissche Theorie, Bedeutung Puiseux' für dieselbe 51; —r Satz über Erniedrigung der Modulargleichung bei den Transformationsgraden 5, 7 und 11 der elliptischen Funktionen 240, 391, 430, Geschichtliches darüber 391; — Gruppe der allgemeinen Teilungsgleichung der elliptischen Funktionen 307 ff., der speziellen Teilungsgleichung der $\wp$- u. $\wp'$-Funktionen 314; — Gruppe der Modulargleichung, Zerlegung im Falle eines Primzahlgrades 390 ff.; — Hauptmoduln 429; — Probleme bei ausgezeichneten Untergruppen im Gebiete der elliptischen Funktionen 429; — Probleme vom Grade 168 bei Transformation 7. Grades 429, vom Grade 660 bei Transformation 11. Grades 430; — Resolvente der Modulargleichung 429.
Gammafunktion, mit Schleifenintegralen behandelt 51.
Ganze automorphe Formen 407.
Ganze Funktion 23; Existenzsatz —r —en von Weierstraß 78, ihre Darstellung durch Produkte von Primfunktionen 78.
Ganzzahligkeit der Entwicklungskoeffizienten der In egrale 1. Gattung eines automorphen Gebildes 417.
Gattungen der Abelschen Integrale 133, der elliptischen Integrale bei Legendre usw. 189 ff.; — der Hauptkreisgruppen 374.
Gaußsche Summen bei der linearen Transformation der Thetafunktionen 285, 286; p-fache — — bei Transformation der Thetafunktionen mit p-Argumenten 648; — — eines Zahlkörpers 861.
Gaußsche Transformation der elliptischen Funktionen 193, 224, 322.
Gelenkmechanismen u. —viereck, mit elliptischen Funktionen behandelt 346 ff.
Geodätische Linien auf dem Ellipsoid 346, Darstellung durch Thetafunktionen 755.
Geometrische Deutung analytischer Funktionen durch Kurven 43 ff., der algebraischen Gebilde durch Kurven usw. 143 ff.
Geschlecht einer Riemannschen Fläche 122; Erhaltung des —es p bei eindeutiger Transformation 126; — eines algebraischen Gebildes, auf Grund der Formen φ erklärt 138; —er 0 und 1 der algebraischen Funktionen 141; — eines Diskontinuitätsbereiches 369.
Geschlechtszahlen einer algebraisch. Fläche 174.
Geschlossene Flächen, die einem Diskontinuitätsbereiche entsprechen 368.
Gitterpunkte in einem Parallelogrammnetze 257; — bei $2p$-fach periodischen Funktionen 823.
Gleichgewicht der Elektrizität auf Kreiszylindern mit parallelen Achsen 356.
Gleichmäßige Konvergenz gegen einen Grenzwert 20; Weierstraß' Erklärung der —n — 20, 77; — — einer Reihe analytischer Funktionen 21, einer Potenzreihe 21; — — unendlicher Produkte 78; — — bei Funktionen und Reihen mit n unabhängigen Argumenten 102.
Gleichmäßiges Verhalten einer Funktion im Großen 12.
Gleichungen 5. Grades, Hermite's Untersuchungen über deren Lösung durch ellipt. Funktionen 240; — 6. Grades im Zusammenhang mit dem Formenprobleme der Borchardtschen Moduln 800; Zurückführung der Lösung algebraischer — auf Zweiteilung der hyperelliptischen Funktionen 801, zugehörige Sätze von Lindemann 801.
Göpelsche Relationen bei Thetareihen mit zwei Argumenten 619, 744; — Gruppen von Periodencharakteristiken 661, 680, im Falle $p = 2$ 744; — Systeme von Thetacharakteristiken 661, 681; — Tetraeder 748.
Goursatscher Beweis des Cauchyschen Integralsatzes 15.
Grenze, natürliche einer Funktion 36.
Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen (nach Dedekind) 281, 286.

Grenzformel von Kronecker 332 ff., Beweis durch Zetafunktionen bei Epstein 866.
Grenzkreisgruppen 379.
Grenzkreistheorem 445.
Grenzkurven bei Polygonnetzen 380 ff.
Grenzlösungen bei Differentialgleichungen 1. Ordnung 584.
Grenzpunkte einer Gruppe linearer Substitutionen 361.
Grenzstellen bei analytischen Gebilden von mehreren unabhängigen Variablen 110.
Groupe abélien bei Jordan 665.
Grundformen bei automorphen Gebilden des Geschlechtes 0 405; — für die Gruppen der regulären Körper und die Modulgruppe 405; — bei automorphen Gebilden mit beliebigem Geschlechte 408.
Grundtheorem bei Kreisbogenvierecken und zugehörigen Differentialgleichungen 534.
Gruppe, zu einem Fundamentalbereich gehörig 70; — aller Substitutionen $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ 265, deren Erzeugende 265, deren Diskontinuitätsbereich als Normalsechseck 265; — der linearen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 (Modulgruppe) 266; — der 256 Additionstheoreme 301; — einer automorphen Funktion 351; —n linearer Substitutionen einer Variablen 351, deren Klassifikation 374; — der doppeltperiodischen Funktionen 377, ihre symmetrischen Spezialfälle 378; endliche —n linearer Substitutionen bei elliptischen Modulformen nach Klein und Hurwitz 419; — G_{168} ternärer Substitutionen 429; — G_{360} ternärer Substitutionen 431, ihre Resolventen 431 ff.; — G_{504} als Kongruenzgruppe 2. Stufe der Signatur (0, 3; 2, 3, 7) 432; — einer linearen Differentialgleichung 499; —n von Periodencharakteristiken bei Thetafunktionen 660, 680, adjungierte und konjugierte —n dieser Art 661; 680.
Gruppencharakteristiken bei Abelschen Funktionen 657.
Gützlaffsche Modulargleichung 242, 424.

H

Hadamardsche Sätze über ganze Funktionen 86 ff.
Halbe Umkehrung der Riemannschen Thetaformel 673, ihre Verallgemeinerung 683.
Halbmetazyklische Gruppen 390, 421.
Halbraum, Äquivalenzen und Diskontinuitätsbereiche im —e nach Poincaré 362.
Harmonischer Fall der elliptischen Gebilde 243, 288.
Harnacksche Sätze bei konformen Abbildungen 56.
Hauptformen bei automorphen Gebilden des Geschlechtes 0 404.
Hauptfunktion (einwertige Funktion) einer Fläche oder eines Bereiches vom Geschlechte 0 302.
Hauptkongruenzgruppe n^{ter} Stufe 272, 795.
Hauptkreis, automorphe Funktionen mit oder ohne — 359.
Hauptkreisgruppen 366 ff., ihre systematische Betrachtung 370 ff.; Gattungen der — 374; Familien u. Kontinua der — 374.
Hauptkreispolygone, ihre verschiedenen Arten 371; Transformations- u. Invariantentheorie der — 372 ff.
Hauptkreistheorem 446.
Hauptmoduln 16. Stufe $\varphi(\omega) = \sqrt[4]{k}$ und $\psi(\omega) = \sqrt[4]{k'}$ bei Hermite 353.
Hauptreihe von Thetacharakteristiken 658.
Haupttangentenkurven bei der Kummerschen Fläche 749.
Hauptteil einer Funktion in der Nähe einer isolierten singulären Stelle 28.
Haupttransformation n^{ten} Grades der elliptischen Funktionen 320, 320.
Heinesche Reihe (Verallgemeinerung der hypergeometrischen Reihe) 549.
Henkelfläche als Riemannsche Fläche im Raume 63.
Hermitesches Prinzip bei Gauß 229, bei Hermite selbst 235, Beziehung zum Riemann-Rochschen Satze 235, 328; — — für Thetafunktionen n^{ter} Ordnung 324, 642.
Hermitesche φ-Funktion $\left(\sqrt[4]{k}\right)$, Verhalten bei linearer Transformation 239; — Formen als Quelle zur Erklärung von Polyedergruppen 384.
Himmelsmechanik, Verwendung der

elliptischen Funktionen durch Gylden 342 ff., Kritik Burkhardts 343.
Höhe einer ganzen Funktion 79, zugehörige Hadamardsche Sätze 87.
Holomorphe Funktion 12.
Homogene binäre lineare Substitutionen 401, ihre Gruppen 401.
Homogene Variable, Gebrauch derselben bei analytischen Funktionen 112 ff.; — — und Formen auf Riemannschen Flächen 397.
Homomorphe Formen 442, ihre Darstellung durch Poincarésche Zetareihen 445.
Homomorphe Funktionen 397, 442.
Humberts singuläre Funktionen (Thetafunktionen für $p = 2$ mit komplexer Multiplikation) 855.
Hurwitzsche Korrespondenztheorie 169; — Sätze über eindeutige Transformationen algebraischer Gebilde in sich 171.
Hyperbolische Substitutionen einer Variablen 361.
Hyperelliptische Flächen 123, 870; — Integrale, algebraische Darstellung der Integranden 136; — Integrale 167, 168, ihre Reihenentwicklungen und ihre Berechnung 168, ihre Kettenbruchentwicklung 168; — Funktionen mit $p = 2$ 743 ff.; — Funktionen mit beliebigem p 760 ff.; — Thetafunktionen, deren Verschwinden bei beliebigem p 760; — Sigmafunktionen von Klein 790; — Funktionen 1. Stufe bei $p = 2$ 794, 2. Stufe 797.
Hyperfuchssche Funktionen 466.
Hypergeometrische Differentialgleichungen für die normierten Perioden der elliptischen Integrale 277; die Perioden der elliptischen Integrale als — Funktionen der absoluten Invariante 277; algebraische Spezialfälle der —n Reihe 356; Transformation der —n Funktionen 428; — Differentialgleichung bei polymorphen Formen 436; — Funktionen durch Integrale dargestellt 439; — Integrale u. Reihen zur Darstellung polymorpher Formen 439; — Funktionen als eindeutige Modulfunktionen nach Wirtinger 440 ff.; — Differentialgleichung 537, deren Geschichte 538 ff; — Reihe 537; — Funktion 537; Transformation der —n Differentialgleichung in sich 542, Nullstellen der —n Funktion 548; — Reihen höherer Ordnung 549, deren Differentialgleichung 550, deren Darstellung durch mehrfache Integrale 550; — Funktionen mehrerer Variablen 551; — Reihen zweier Argumente 552, weitere Theorie dieser Funktionen 552 ff.

I

Immersionskoeffizent bei Riemannschen Matrizen 829.
Implizite Funktionen, Erklärung solcher Funktionen durch analytische Gleichungen 103.
Index der Multiplikabilität und — der Singularität bei Riemannschen Matrizen 828.
Ineinanderschiebung, Methode der — bei Diskontinuitätsbereichen von Gruppen 381, 448.
Infinitesimale Substitutionen 362.
Integral, Begründung des bestimmten —s nach Cauchy 11; eigentliche bestimmte —e als analytische Funktionen 22; —e algebraischer Funktionen 127, Gattungen derselben 132; transzendent normierte — 134; — 2. Gattung 149; —e bei algebraischen Funktionen mehrerer Variablen 175; bestimmte —e zur Darstellung polymorpher Formen 439; —e linearer Differentialgleichungen 474 ff., ihre Abhängigkeit von den Parametern der Differentialgleichungen 499 ff., von den singulären Stellen 504; s. auch „Abelsche Integrale", „elliptische Integrale" u. „Hyperelliptisch".
Integraldarstellungen bei analytischen Funktionen, dem Fourierschen Integral entsprechend 26.
Integralformel von Cauchy 17.
Integralgleichungen zur Lösung des Riemannschen Problems 522
Integralsätze von Cauchy 14
Integro-Differentialgleichungen nach Schlesinger 559
Invariante Darstellung der algebraischen Funktionen 126; — — des Integrals 3. Gattung, speziell im hyperelliptischen Falle 154; — — der hyperelliptischen Theta- u. Sigmafunktionen 155; — — des Additionstheorems der elliptischen Funktionen 297; — — des elliptischen Integrals 3. Gattung 298; — — der Differentialgleichung der polymorphen Formen 437 ff.; — — li-

nearer Differentialgleichungen 498; — — von Wurzelformen 725.
Invarianten von Cayley-Boole in der Hermiteschen Normalform des elliptischen Integrals 1. Gattung 237; — der biquadratischen binären Verzweigungsform, irrationale 249, rationale 250; Darstellung der rationalen — g_2, g_3 durch Reihen 260; — der Hauptkreispolygone 373.
Inversion des elliptischen Integrals 1. Gattung bei Abel u. Jacobi 196, bei Gauß 196ff.; — des lemniskatischen Integrals bei Gauß 226; — an einem Kreise 361.
Irrationale Modulargleichungen, siehe „Modularkorrespondenzen“ und „Thetarelationen“.
Irreguläre Integrale bei linearen Differentialgleichungen 492.
Isolierter nicht-analytischer Punkt einer Funktion, Charakter u. Arten 18, zugehörige Beweise 18.
Isolierte Riemannsche Matrizen 829.
Isomorphe Riemannsche Matrizen 828.
Isothermische Koordinaten 14.
Iterierendes Verfahren von Koebe beim Beweise des Rückkehrschnitttheorems 459ff.

J

Jacobische Determinante 19, 103ff., Fall ihres Verschwindens 104; — Bezeichnungen der elliptischen Funktionen sin am u usw. 208ff.; — Modulargleichungen 209; — Funktionen n^{ter} Ord. bei Hermite 235; Zusammenhang der —n elliptischen Funktionen mit den Weierstraßschen 282ff.; —s Umkehrproblem vor Riemann 609ff.; — Funktion im Sinne von Weierstraß bei der Umkehrung hyperelliptischer Integrale 626; Lösung des —n Umkehrproblems im hyperelliptischen Falle 770; — Funktionen im Sinne Kleins in der Theorie der Abelschen Funktionen 804; — Funktionen im Sinne von Frobenius 834; — Funktionen von p Variablen 835; — Fläche (Speziallfall hyperelliptischer Flächen) 871.
Jordanscher Satz über die Zerlegung einer Ebene durch eine geschlossene Kurve 10; — Beweis des Cauchyschen Integralsatzes 14; — Kurve 52.
Joubertsche Modulargleichungen 242.

K

Kanonisch, —es Schnittsystem einer Riemannschen Fläche 123; —e Differentialform nach Klein 153ff.; —e Kurven nach Klein 154, 734; —e Diskontinuitätsbereiche 369, für Hauptkreisgruppen 372; —e Fundamentalsysteme bei linearen Differentialgleich. 476.
Kartesische Ovale, geliefert vom reellen und imaginären Bestandteile der Funktion $\wp(u)$ 335.
Keplersches Problem 45.
Kern eines Fundamentalbereiches 506.
Kettenbruchentwicklungen analytischer Funktionen 90ff.; — für die Exponentialfunktion, gewisse Quotienten hypergeometrischer Reihen usw. 93; — bei hyperelliptischen Integralen 168; — zur Aufstellung der Multiplikationsformeln der elliptischen Funktionen 304ff., 306; — bei pseudoellipt. Integralen 343; — für Quotienten hypergeometrischer Reihen 541.
Kiepertsche Determinante bei Multiplikation der ellipt. Funktionen 303.
Kinematische Mechanismen zur Berechnung der elliptischen Funktionen 347.
Klasse, Begriff einer — algebraischer Funktionen im Sinne Riemanns 126; Begriff einer — von Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten 512, bei Riemann 513; —n äquivalenter (nichtlinearer) Periodentransformationen 635.
Klassenmodulu, Zusammenhang der $(3p-3)$ — mit $\log \vartheta(\!(0)\!)$ 690; Beziehung der — zu den Thetanullwerten im allgemeinen Falle 773; speziell im hyperelliptischen Falle 774; — bei $p=3$ nach Weber 778.
Klassenzahlrelationen, allgemeiner Ansatz 331ff., 426; — 1. Stufe 426; — höherer Stufen 427.
Kleinsche kanonische Differentialform 153ff.; — kanonische Kurven 154; — Primform 156, 398; — Mittelform 157; — Stufentheorie zur Ordnung der verschiedenen Gestalten der Theorie der elliptischen Funktionen 247, 277; — Funktionen $\sigma_{\lambda\mu}(u/\omega_1, \omega_2)$ 278; —

Funktionen 359; — Funktionen $\sigma_{\lambda\mu}$, X_α, z_α usw. 417 ff.; — Sigmafunktion im hyperelliptischen Falle 788 ff.
Koinzidenzen einer Korrespondenz 169.
Kombinatorische Methoden von Schwarz u. a. bei Abbildungen 59, 62.
Komplementäre Riemannsche Matrizen 829.
Komplementärer Modul des elliptischen Integrals 1. Gattung 189; Funktionen des —n —s bei Jacobi 210; — — als Thetanullwert 221.
Komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen, von Abel entdeckt 205, bei Gauß 231; — — bei Thetafunktionen von höherem p 852 ff., speziell für Thetafunktionen zweier Variablen 855 ff.
Komposition der Hauptkreisgruppen 372.
Konfigurationen bei der Kummerschen Fläche 749, bei ihren Verallgemeinerungen 872.
Konforme Abbildung im kleinen 19, im großen 52; — — einfach zusammenhängender Bereiche auf die Kreisfläche 55, 56, der Kreisfläche auf sich selbst 56; — — analytisch begrenzter Bereiche auf die Kreisfläche 59; — — mehrfach zusammenhängender Bereiche nach Riemann u. Schottky 64.
Kongruenzgruppen n^{ter} Stufe 277
Kongruenzmoduln in der Theorie der Modulfunktionen 392.
Kongruenzuntergruppen der n^{ten} Stufe 277, 389, deren Diskontinuitätsbereiche 278; — der Modulgruppe 386 ff., 389 ff.
Kontinua der Hauptkreisgruppen 374.
Kontinuierliche Gruppe eindeutiger Transformationen $u' = u + v$ einer Fläche des Geschlechtes 1 in sich 296.
Kontinuitätsmethode beim Beweise der Fundamentaltheoreme 449 ff.; — bei der Lösung des Riemannschen Problems 521.
Kontinuum, Erklärung eines —s in der z-Ebene 9.
Konvergenz der Thetareihe 637.
Konvergenzerzeugende Faktoren in unendlichen Produkten 78.
Konvergenzexponent bei Produktentwickelungen ganzer Funktionen 79.
Konvergenzkreis einer Potenzreihe 23.
Konvergenzradius einer Potenzreihe, aus den Koeffizienten abgeleitet 83.
Körper der rationalen Funktionen 125; — der eindeutigen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche 125.
Korresiduale Punktsysteme auf einer Riemannschen Fläche (einem algebraischen Gebilde, einer Kurve) 142.
Korrespondenzen auf algebraischen Gebilden 168; Wertigkeits— 170; singuläre — 170.
Korrespondenzformel 170, von Cayley-Brill 170.
Korrespondenzprinzip von Chales 169; Verallgemeinerung von Cayley u. Brill 169.
Korrespondenztheorie von Hurwitz 169.
Krazer-Prymsche Fundamentalformel bei Thetafunktionen mit rationalen Charakteristiken 684 ff.
Kreisbogenpolygone, allgemeine Ansätze bei mehrdeutigen automorphen Funktionen 465; — als Fundamentalbereiche bei linearen Differentialgleichungen 508.
Kreiselbewegung 339 ff.; — als Relativbewegung zweier Poinsotbewegungen 340; — mit polymorphen Funktionen vom Grenzkreistypus behandelt 464.
Kreisring als Bereich einer eindeutigen analytischen Funktion 27.
Kreisscheibentheorem von Klein 536.
Kreisverwandtschaft 250, 360; indirekte — 361.
Kroneckersche Grenzformel 332 ff., Beweis bei Epstein 866.
Kubisches Reziprozitätsgesetz, mit elliptischen Funktionen bewiesen von Eisenstein 243.
Kugelfunktionen X_n, aus der Lagrangeschen Reihe gewonnen 45; Auftreten der — bei der Kettenbruchentwicklung analytischer Funktionen 94 ff.
Kummersche Fläche, durch Thetafunktionen mit $p = 2$ dargestellt 747; — — als Spezialfall der hyperelliptischen Flächen 747, 870; Ausartung der —n — bei Reduzierbarkeit des hyperelliptischen Gebildes 751, 843.
Kurve als Deutung eines analytischen Gebildes 43 ff.; algebraische —n in mehrdimensionalen Räumen als Grund-

lage der Theorie der algebraischen Funktionen 143 ff.; —n des Geschlechtes 1 und elliptische Funktionen 328, speziell —n 3. Grades 328, 330; — 4. Grades vom Geschlechte 1, durch sn, cn, dn dargestellt 329, 330; — 4. Grades in der Ebene mit 168 Kollineationen in sich 429; ebene — 6. Grades mit 360 Kollineationen in sich 431; ebene —n 4. Grades ohne Doppelpunkt auf Grund der Abelschen Funktionen $p = 3$ behandelt 777, Beziehung zur Kummerschen Fläche 779, 852.

Kurvengeschlecht bei algebraischen Funktionen zweier Variablen 174.

L

Lacet, Bezeichnung bei Briot-Bouquet 30.

Lagrangesche Reihe 45, 46, ihre Verallgemeinerung bei Laplace u. Darboux 47; — Substitution bei Herstellung der elliptischen Normalintegrale 188.

Lamésche Differentialgleichung, Behandlung bei Hermite durch elliptische Funktionen 237, 338, 341 ff., gruppentheoretisch-geometrische Behandlung durch Klein 342; verallgemeinerte — Differentialgleichung 561, 807; Kleins Theorie der —n Polynome 562.

Landensche Transformation 190, 322, bei Landen u. Legendre 191; bei Gauß 223, bei Richelot 241, Geschichtliches darüber 190 ff.; —r Satz über den Bogen einer gleichseitigen Hyperbel 191.

Laplacesche Differentialgleichung, ihre Invarianz bei Transformation 14; — — bei analytischen Funktionen 17, 54; Auftreten der —n — bei d'Alembert 17; — — bei Funktionen mehrerer Variablen 101; — —n (lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit linearen Koeffizienten) 555, später betrachtete Spezialfälle 555 ff.

Laplacesche Transformierte einer linearen Differentialgleichung 491, 557.

Laurentscher Satz 27.

Legendresche Normalintegrale der drei Gattungen 189, 254; —r Integralmodul 189, als Modulfunktion 353; — Relation 293, 270; — Modular- u. Multiplikatorgleichungen für Transformation 3. Grades 195, 424; — Anwendungen der elliptischen Funktionen 195.

Lemniskate, Teilung ihres Bogens in n gleiche Teile 226, speziell in 5, 7 u. 17 gleiche Teile 316.

Lemniskatische Funktionen 226, 288; —s Integral 226; Spaltung der —n Funktionen in Quotienten ganzer transzendenter Funktionen 226.

Ligne d'arrêt nach Cauchy 30.

Linear-automorphe Funktion, s. „automorph".

Lineare Differentialgleichungen, s. „Differentialgleichungen".

Lineare Substitutionen des Periodenquotienten der elliptischen Funktionen, erstes Auftreten bei Jacobi 213; Einteilung der —n — in elliptische, parabolische, hyperbolische u. loxodromische 361; — — 2. Art 361; — — und Raumbewegungen und -umlegungen 365; — — beim Fundamentalsystem von Lösungen einer linearen Differentialgleichung 475.

Lineare Transformation der Thetafunktionen bei Hermite 238, Bestimmung der zugehörigen 8. Einheitswurzel bei Jacobi u. Hermite 238; — — der Perioden ω_1, ω_2, von der Riemannschen Fläche abgeleitet 262 ff.; Verhalten der Weierstraßschen Funktionen und der η_1, η_2 bei —r — von ω_1, ω_2 264; — — der Jacobischen Funktionen 284 ff.; — — der Thetafunktionen 285, der elliptischen Funktionen 317; — — der Perioden bei den Abelschen Funktionen 648; Gruppe der mod. 2 inkongruenten —n —en 663; elementare — — 1., 2. u. 3. Art bei Thetafunktionen von n Variablen 636, 684.

Linearitätssatz beim Beweise eines Fundamentaltheorems 456.

Linear-polymorphe Formen, s. „polymorph".

Linear-polymorphe Funktionen, s. „polymorph".

Linear-unabhängige Lösungen von Differentialgleichungen 474.

Liouvillesche Sätze über doppeltperiodische Funktionen 233; — Differentialgleichung 453.

Logarithmenfreie Integrale bei linearen Differentialgleichungen, Auftreten bei singulären Stellen 482.

Logarithmische Normalreihen bei linearen Differentialgleichungen 488.
Logarithmus der Diskriminante Δ, von Dedekind untersucht 392
Loxodromische Substitutionen einer Variablen 361.

M

Majorantenmethode beim Beweise der Uniformisierungssätze 457; — bei Lösung linearer Differentialgleichungen 474.
Matrix, Riemannsche — bei $2p$-fach periodischen Funktionen 827.
Mehrdeutige automorphe Funktionen 464.
Mehrdeutige Funktionen 29.
Mehrfach periodische Funktionen, Auffassung Jacobis 612, spätere Begriffsentwicklung 614 ff., 822 ff.
Messung eines Nullpunktes oder Poles in einem Fundamentelbereiche 403.
Méthode d'exhaustion bei den Grundsätzen über doppelt periodische Funktionen 233.
Minimalflächen von Schwarz u. Weierstraß, durch hyperelliptische Integrale dargestellt 773.
Mittag-Lefflerscher Satz 80, Erweiterungen 81 ff.
Mittelform von Klein 734.
Mittelwertsätze, auf komplexe Funktionen übertragen 12.
Modularfunktionen und -integrale (Bezeichnungen Gudermanns für elliptische Funktionen und Integrale) 240.
Modulargleichungen für Transformation 3. u. 5. Grades der elliptischen Funktionen 209; Differentialgleichung für die Jacobischen — 212; Lösungen der — für primzahligen Transformationsgrad bei Jacobi 214; — von Sohnke 242, von Joubert 242, von Schlaefli 242 ff., von Gützlaff 242; — als Resolventen der speziellen Teilungsgleichung 315; — 1. Stufe 326; — 16. Stufe 326; — der Galoisschen Hauptmoduln 326, 423; — m^{ter} Stufe für Transformation n^{ten} Grades 420, speziell für die 1. Stufe 421; Kleins Theorie der — 1. Stufe für die Fälle mit $p = 0$ 422, Erweiterung auf $p > 0$ 423; irrationale — 424; — von Schroeter 424.
Modulkorrespondenzen 242, 326; — m^{ter} Stufe für Transformation n^{ten} Grades 423; — 8. u. 16. Stufe 424 ff.; invariantentheoretische Behandlung der — 425.
Modul der elliptischen Integrale 189; komplementärer — 189.
Moduln einer Klasse algebraischer Funktionen 127, 147 ff.; Ausdruck der — in den Thetanullwerten 221; — der Hauptkreispolygone 373; — hyperelliptischer Thetafunktionen, Relationen zwischen ihnen 763, 763; — der Riemannschen Thetafunktionen, Aufstellung ihrer Relation für $p = 4$ durch Schottky 786; Borchardtsche — nach Klein 799.
Modulformen 273.
Modulfunktionen, neuere Theorie 272 ff., 287, 352, 362 ff., 417 ff.; Auftreten der — bei Gauß 353, bei Abel und Jacobi 354, bei Hermite, Eisenstein u. Weierstraß 354, 355, bei Dedekind u. St. Smith 357; — von mehreren Variablen und deren Anwendung auf Zahlentheorie 467, 467, 863.
Modulgruppe 266, 352, ihre Erzeugung 266, 364, ihr Diskontinuitätsbereich 363; — in projektiver Gestalt 366; automorphe —n 450.
Modulketten bei wiederholter Landenscher Transformation 192.
Monodrome, fonction — 12.
Monodromie der Verzweigungspunkte, insbesondere bei $p = 2$ u. 3 665 ff.
Monodromiegruppe, Bedeutung Puiseux' für die — 30; — einer algebraischen Funktion 121; — der allgemeinen Teilungsgleichung der elliptischen Funktionen 307 ff.; der speziellen Teilungsgleichung der $\wp$- und $\wp'$-Funktionen 314; — einer linearen Differentialgleichung 499, in projektiver und in unimodularer Gestalt 500, Methode zu ihrer numerischen Aufstellung 501; Fälle der Unabhängigkeit der — von den singulären Stellen 504; geometrische Interpretation der projektiven — bei Differentialgleichungen 2. Ordnung 506; Bestimmung der Differentialgleichung bei gegebener — 517; — der speziellen Teilungsgleichung bei den Abelschen Funktionen 818.

Monogène analytische Funktion 40, von mehreren Variablen 103.
Monogène, fonction — 12.
Monogeneität eines algebraischen Gebildes 120.
Monotrope, fonction — 12.
Moyenne isotropique nach Cauchy 17.
Multiplikation Abelscher Integrale 165; — der elliptischen Funktionen bei Abel 199, 202; komplexe — der elliptischen Funktionen, von Abel entdeckt 205; — der elliptischen Funktionen bei Jacobi 212, 305, bei Gauß 230; komplexe — der elliptischen Funktionen bei Gauß 231; — der elliptischen Funktionen, systematisch entwickelt 302ff.; — der Perioden Abelscher Funktionen 632; komplexe — bei höherem p 852ff., speziell bei Thetafunktionen von zwei Variablen 862.
Multiplikative Formen 158; — — auf Riemannschen Flächen 399, 400; unverzweigte — — 400; algebraische — — 400.
Multiplikator einer linearen Substitution einer Variablen 360; erzeugende —en bei homogenen Gruppen 406.
Multiplikatorgleichungen von Jacobi 243, 327; — nach Klein 327; — für $\sqrt[12]{\Delta}$ 327, für die Sigmateilwerte 327; allgemeiner Begriff der — nach Klein 425; — für g_2, g_3 und die Wurzeln aus Δ 426, für die $\sigma_{\lambda\mu}$ 426; — bei Modulfunktionen mehrerer Variablen 864.
Multiplikatorsysteme, theoretisch mögliche — bei homogenen Gruppen 407ff., Existenz zugehöriger Formen 407ff.

N

Nachbarschaft eines Punktes 10.
Nähe eines Punktes 10.
Näherungsdarstellungen analytischer Funktionen, allgemeine Bemerkungen 87ff., durch Polynome 88, durch Kettenbrüche 88, 90ff., nach Mittag-Leffler 88, nach Runge 89, nach Hilbert 90, mittels gebrochener rationaler Funktionen 92.
Natürliche Diskontinuitätsbereiche der Hauptkreisgruppen 371.
Natürliche Grenze einer Funktion 36, 356.
Nebenpunkte bei linearen Differentialgleichungen 483.
Nichtanalytische Grenzkurven bei Polygongruppen 380ff.
Nichtanalytische Stelle bei einer analytischen Funktion 18.
Nichteuklidische Maßbestimmung in ihrer Beziehung zu den linearen Substitutionen 365.
Nichtrotationsgruppen 374; —, die Polygongruppen sind 379ff.
Noetherscher Satz über Relationen zwischen Wurzelformen bei beliebigem p 728.
Normalcharakteristik einer Thetafunktion von p Argumenten 641.
Normale Diskontinuitätsbereiche der Hauptkreisgruppen 371.
Normalintegrale, elliptische — bei Euler 184, bei Legendre 188, bei Abel 197, bei Hermite 237, 253, bei Eisenstein u. Riemann 253, bei Weierstraß 253; — linearer Differentialgleichungen 486; s. auch „Elliptische Integrale“ und „Hyperelliptische Integrale“.
Normalkombinationen von Integralen 2. Gattung 149.
Normalkurve der Formen φ 144; —n (Normalformen) zur Erklärung algebraischer Gebilde 146ff.; elliptische —n 247, 329.
Normalreihen bei linearen Differentialgleichungen 488.
Normierung der Integrale einer Riemannschen Fläche (transzendent normierte Integrale) 134; — der Perioden der elliptischen Integrale 275ff.
Nullpunkte m^{ter} Ordnung bei Funktionen 24; — einer analytischen, insbesondere einer ganzen Funktion 84ff., obere Grenze für ihre Anzahl 85; — der hypergeometrischen Funktion 548; — der Riemannschen Thetafunktion 687.
Numerische Berechnung der elliptischen Integrale durch wiederholte Landensche Transformation bei Legendre 192, Literatur darüber 192; — — des Periodenquotienten ω aus dem Modul k^2 durch das arithmetisch-geometrische Mittel 223ff., 294; — — der elliptischen Funktionen 291ff., des Integrals 1. Gattung 291ff., der vollständigen Integrale K, K' 293.

O

Obertheoreme von Klein 536, als Erweiterung der Fundamentaltheoreme 465.

Ordinäre Transformation der Perioden Abelscher Funktionen 629.

Ordnung einer ganzen Funktion nach Hadamard 87; — der Verzweigungsstelle einer Riemannschen Fläche 118; — des Nullpunktes oder Poles einer Funktion auf einer Riemannschen Fläche 124; — einer hyperelliptischen (Riemannschen) Fläche 124; — einer Periodentransformation 630; — einer Thetafunktion 641; — einer Riemannschen Matrix 827.

Orthogonales System zur Aufstellung der Grundformeln der elliptischen Funktionen 341.

Orthogonalsysteme bei Thetarelationen für $p = 2$ 746.

Orthosymmetrische Riemannsche Flächen 172, 732.

Oszillationstheoreme von Klein 465 ff., 535 ff.

P

Painlevésche Sätze über nichtlineare Differentialgleichungen 1. Ordnung 566 ff.; — Transzendente 599 ff., Beziehung zu den doppeltperiodischen Funktionen 601 ff.

Parabolische Substitutionen einer Variablen 361.

Parallelogrammatischer Rahmen bei Abbildung einer Riemannschen Fläche durch ein Integral 617.

Parallelogrammnetz der doppeltperiodischen Funktionen 257.

Parallelotop bei $2p$-fach periodischen Funktionen 823.

Parameter, —darstellung im kleinen bei analytischen Funktionen mehrerer Variablen 106; akzessorische — in einer linearen Differentialgleichung 497.

Partialbruchzerlegung der doppeltperiodischen Funktionen 270; — der automorphen Funktionen 413 ff.

Pendel, sphärisches u. einfaches, mit elliptischen Funktionen behandelt 337, 338 ff.

Pentaeder als Diskontinuitätsbereich der Picardschen Gruppe 365, in ebenflächiger Gestalt 367.

Periode, Begriff einer primitiven — 66; —n (Periodizitätsmoduln) der Abelschen Integrale 127, die zwei Arten der —n 127; zu einem kanonischen Schnittsystem gehörende —n 128; Relationen zwischen den —n Abelscher Integrale 133, 150; —n der elliptischen Integrale, nach Riemann eingeführt 252; —n des Weierstraßschen Normalintegrals 2. Gattung 258, ihre Reihenentwicklung 261; Differentialgleichungen der —n ω_1, ω_2 und η_1, η_2 in bezug auf die Invarianten 275 ff.

Periodencharakteristiken bei p-fach unendlichen Thetareihen 639, 651 ff., ihre Beziehung zu den Thetacharakteristiken 654; eigentliche und uneigentliche — 652, 680; — $(s)_r$ 678.

Periodenparallelogramm, Auftreten bei Liouville 233.

Periodenstreifen 66.

Periodensysteme, zusammengehörige oder simultane 822, unabhängige 822, primitive 823.

Periodenwege auf einer Riemannschen Fläche 128.

Periodische Funktionen, Liouvillesche Sätze 29, 66; — — mehrerer Variablen, allgemeines 822, zugehörige Bezeichnungen bei Jacobi, Hermite u. Riemann 823, zugehörige Sätze von Riemann u. Weierstraß 826; Darstellung der $2p$-fach —n — durch Thetafunktionen 831; vierfach — — nach Hecke 857 ff.; s. auch „Doppeltperiodische Funktionen".

Periodizität, doppelte — der elliptischen Funktionen bei Abel u. Jacobi 196, 198, 210, bei Gauß 196 ff., 226.

Periodizitätsmoduln, Differentialgleichungen für die — 553, bezügliche Sätze von Fuchs 554; s. auch „Periode".

Permanenz, Prinzip der — bei Funktionalgleichungen 57.

Physikalische Deutungen analytischer Funktionen 55.

Picardscher Satz 76, 461, Verallgemeinerungen durch Landau, Hurwitz, Carathéodory u. a. 462, 463; — Differentialgleichungen, Verallgemeinerung von Hermites Behandlung der Laméschen Differentialgleichung 342; — Gruppe 364; — Fläche (Spezialfall hyperelliptischer Flächen) 871.

Pochhammersche Differentialgleichung 551.

Poincarésche Reihen 409 ff., Poincarés eigene Benennungen 409, ihre Konvergenzbedingung 410; — Reihen der Dimensionen — 2 u. — 1 und deren Konvergenzbedingungen 411; Verhalten der —n Reihen in parabolischen Zipfeln 412; einpolige — Reihen 412; polfreie — Reihen 412; — Thetareihen 409; — Zetareihen 443.

Poinsotbewegung 339.

Polarkern eines Fundamentalbereiches 507.

Pol einer Funktion 18; — m^{ter} Ordnung einer Funktion 24; —e einer Funktion auf der Peripherie des Konvergenzkreises 84.

Polfreie automorphe Form 407; — Poincarésche Reihen 412.

Polyedergruppen 374.

Polygonecken, feste und bewegliche oder zufällige 368; Vermeidbarkeit loxodromischer und hyperbolischer — 368.

Polygongruppen 374.

Polymorphe Funktionen 359; — Formen auf Riemannschen Flächen mit beliebigem p 407, 435, im Falle $p = 0$ ausführlich 432 ff.; — Funktionen auf Riemannschen Flächen 432 ff.; — Formenscharen, speziell für $p = 0$ 434, mit unimodularen Substitutionen 434; Differentialgleichungen der —n Funktionen und Formen 435 ff; — Formen als eindeutige Modulformen dargestellt 439 ff., deren Potenzreihen nach Wirtinger 440 ff.

Ponceletsche Polygone 335, Beziehung zum Pentagramma mirificum von Gauß 335; Beziehung der —n — zu den geodätischen Linien des Ellipsoids 336; Verallgemeinerung der —n — 336.

Potential auf einer Riemannschen Fläche 131 ff.; mehrwertige —funktionen im Raume 108.

Potenzreihen, nach linearen Funktionen von z fortschreitend 25; — für die Jacobischen Funktionen sn u, . . . 240, für die Weierstraßschen Funktionen $\wp(u)$, . . . 259; — für automorphe Funktionen 393, für automorphe Formen 402, für Modulfunktionen 417 ff., für polymorphe Formen 438 ff.

Primäre Relationen zwischen den Erzeugenden einer Gruppe 370.

Primcharakteristiken bei Abelschen Funktionen nach Klein 657, 727.

Primform von Klein 156, 734; — einer Riemannschen Fläche 398; Schar von —en bei automorphen Gebilden mit $p = 0$ 404; automorphe — 408; Darstellung der Thetafunktionen durch die — 735; — von Ritter 741.

Primfunktion von Weierstraß 78, 155, 700, ihre Darstellung durch Thetafunktionen 704.

Primitive Periode 66; —s Periodenpaar 66, 264; — Fundamentalsysteme bei der Lösung des Riemannschen Problems 522; — Periodensysteme bei $2p$-fach periodischen Funktionen 823.

Prinzipale Transformation der Thetafunktionen mehrerer Variablen 852 ff.

Prinzipaluntergruppe n^{ter} Stufe bei den hyperelliptischen Funktionen mit $p = 2$ 795.

Prinzip der Symmetrie 38, 356.

Produktdarstellung ganzer Funktionen 78, der Γ-Funktion 78; einfach unendliche —en der elliptischen Funktionen bei Abel 203, bei Jacobi 214; —en für k, k' und K bei Jacobi 214; — automorpher Primformen nach Schottky 414 ff.; — von automorphen Formen und Modulfunktionen 415, der Diskriminante Δ 418.

Projektiv-geometrische Methoden bei Behandlung der Gruppen linearer Substitutionen 365; —e Maßbestimmungen und lineare Substitutionen 365, 506 ff.; —e Gestalt der Modulgruppe und ihres Dreiecksnetzes 367.

Prymsche Funktionen, Beziehung zum Riemannschen Problem 523; — — 1. Ordnung 737, höherer Ordnung 737; Beziehung der —n — zu den Abelschen Integralen und den Thetafunktionen 738 ff., zur Kleinschen Primform 740.

Pseudoelliptische Integrale 343 ff.

Q

Quadratische Formen, Sätze über Darstellung ganzer Zahlen durch — — 331; Äquivalenz und Reduktion der —n — 333.

Quaternäre quadratische Formen als Mittel zur Erklärung von Polyedergruppen 386.
Quaternionentypus bei Substitutionen 385.
Querschnitt einer Riemannschen Fläche 34, 122; kanonisches —system 122, 369; Änderung des —systems und lineare Transformation der Perioden 662.

R

Ramification, point de —, 118.
Rang, Weierstraß' Bezeichnung für Geschlecht 139; — einer Unbestimmtheitsstelle bei linearen Differentialgleichungen 489; — einer hyperelliptischen Fläche 871.
Rational, —e Funktion 28; — integrierbare lineare Differentialgleichungen 510.
Rationalitätsgruppe einer linearen Differentialgleichung 510.
Raumkurve 4. Ordnung 1. Spezies und elliptische Funktionen 329.
Räume positiver quadratischer Formen bei Gruppenuntersuchungen 468ff.
Realitätsverhältnisse der Formen φ 733.
Reduktion hyperelliptischer und Abelscher Integrale auf solche niederen Geschlechtes, speziell auf elliptische 166, (bei Legendre) 195, 344ff., 838, bezüglicher Satz Wirtingers 840, im Falle $p = 2$ 841; — der Diskontinuitätsbereiche von Gruppen linearer Substitutionen 450; — nicht-linearer ganzzahliger Transformationen bei Abelschen Funktionen 635.
Reduktionssatz bei Scharen äquivalenter Stellen auf Riemannschen Flächen 142.
Reduktionstheoreme von Abel 164
Reduzibilität einer linearen Differentialgleichung 509.
Reduziertes Periodenparallelogramm 265.
Reguläre Kurve 9; — Funktion 12; — Ecke eines Fundamentalbereiches 71; — Riemannsche Flächen 171, 388, zugehörige Galoissche Resolventen 171, entsprechende ausgezeichnete Untergruppen der Modulgruppe 387, 429, Spezialfälle der Gruppen G_{96}, G_{168} usw. 388; Theorie der —n Körper 358; Gruppen der —n Körper 376; Gleichungen der —n Körper bei der Transformation der elliptischen Funktionen 429; — Riemannsche Flächen und Thetafunktionen von höherem p 843ff.
Reihe von Lagrange 45, 46; —n für die Lösungen linearer Differentialgleichungen bei singulären Punkten 477; s. auch „Potenzreihen".
Rektifikationen ebener Kurven, die zu den ersten Ansätzen über elliptische Integrale führten 182, 187.
Relationen zwischen den Perioden algebraischer Integrale 133, 150; primäre und sekundäre — zwischen den Erzeugenden einer Gruppe 370; s. auch „Klassenzahlrelationen" und „Thetarelationen".
Repräsentanten für Transformation n^{ten} Grades der elliptischen Funktionen 318, zweite Auswahl 319ff., funktionentheoretische und arithmetische — 320; — für Transformation n^{ten} Grades der Modulfunktionen 421, — m^{ter} Stufe 423; — nichtlinearer Periodentransformationen 635, 649.
Residuenkalkul 16.
Residuensatz, Weierstraßsche Gestalt 139; — über doppeltperiodische Funktionen 267.
Residuum einer analytischen Funktion in einem Punkte 16; — einer analytischen Funktion mehrerer Variablen (Punkt- und Kurvenresiduen) 99ff.
Resolvente, Galoissche — einer regulären Riemannschen Fläche 171; Modulargleichungen als —n der Teilungsgleichungen 315; besondere —n 5., 7. und 11. Grades der Modulargleichungen 240, 430.
Reziproke multiplikative Formen auf Riemannschen Flächen 400.
Reziprozitätsgesetz, kubisches und biquadratisches, aus der Theorie der elliptischen Funktionen abgeleitet von Eisenstein 243.
Reziprozitätssatz von Brill u. Noether 145.
Riemannsche Fläche 31; — Erklärung einer analytischen Funktion 54; — Fläche als Definition zugehöriger Funktionen 62; — Fläche als geschlossene Fläche im Raume 63; zweidimensionale — Mannigfaltigkeit 69;

—r Raum bei mehrdeutigen Funktionen mehrerer Variablen 108; — Fläche einer algebraischen Funktion 120; — Kugelfläche 121; Funktionen auf einer —n Fläche 124; — Fläche als Erklärung einer Klasse algebraischer Funktionen 129; geschlossene — Flächen im Raume 130; allgemeinste Gestalt einer —n Fläche, — Bereiche und Mannigfaltigkeiten 130ff.; reguläre — Flächen 171, 388; zweiblättrige — Fläche mit vier Verzweigungspunkten als Grundlage der Theorie der elliptischen Funktionen 247; — Normalformen der elliptischen Integrale 253; — P-Funktion (hypergeometrische Funktion) 355, 543; — Formenscharen auf beliebigen algebraischen Gebilden 445; — Formensysteme 514; —s Problem bei linearpolymorphen Formenscharen bzw. linearen Differentialgleichungen 519, Beweise der Lösbarkeit 519ff., Verallgemeinerung durch Birkhoff 524; — Thetaformel 670ff., Folgerungen aus derselben 675, Verallgemeinerungen 682; — Thetafunktion 687; — Thetafunktionen (im Gegensatz zu den allgemeinen) 690, 786; reguläre — Flächen und Thetafunktionen mit höherem p 843ff.

Riemann-Rochscher Satz 135, 135ff., 142, Erweiterung für multiplikative Formen 158; erweiterter — — — 400.

Riccatische Differentialgleichung 568ff.

Ringfläche als Riemannsche Fläche des Geschlechtes 1 63.

Rittersche Primform 399, 741.

Rodrigues, Koordinaten von — bei den Drehungen eines starren Körpers 340.

Rosenhainsche Gruppen von Charakteristiken bei $p = 2$ 744; — Tetraeder 748; — Differentialformeln, für beliebige hyperelliptische Funktionen verallgemeinert 772.

Rotationsgruppen, elliptische, parabolische und hyperbolische 374ff.

Rückkehrschnitte auf einer Riemannschen Fläche 122.

Rückkehrschnittheorem 446.

S

Schar äquivalenter Stellen auf einer Riemannschen Fläche (einer Kurve) 142.

Scheinbar singuläre Punkte bei linearen Differentialgleichungen 483.

Schlaeflische Modulargleichungen 242.

Schlechthin kanonische Differentialsysteme 499, 504 — — — mit Monodromiegruppe, die unabhängig ist von einer als Parameter aufgefaßten singulären Stelle 597.

Schleifenintegrale um zwei Verzweigungspunkte 51.

Schleifenwege um Verzweigungspunkte 30.

Schlichtheit einer Abbildung 456, 458.

Schließungsproblem 335, insbesondere im Falle zweier Kegelschnitte 336.

Schließungssätze von Staude für konfokale Flächen 2. Grades 756.

Schottkysche Relation zwischen den 10 Thetamoduln bei $p = 4$ 690, 786.

Schraubungsgruppen 374, 375.

Schwingungsdauer des einfachen Pendels 339.

Schwarzscher Differentialausausdruck 61, 435, 506.

Schwarzsche s-Funktionen 508.

Sekundäre Relationen zwischen den Erzeugenden einer Gruppe 370.

Semitranszendent, Differentialgleichungen mit Lösungen, die — von den Integrationskonstanten abhängen 587ff.

Sigmafunktion von Weierstraß 268, ihre Reihen- u. Produktdarstellungen 269, ihre Periodeneigenschaften 269, ihre Invarianz gegenüber linearen Transformationen der Perioden 270; Schottkysche — bei $p = 3$ 782; — von Klein, allgemeine Bedeutung 789ff., im hyperelliptischen Falle 790ff.; Differentialgleichungen und Reihenentwicklungen der Kleinschen — nach Wiltheiß u. a. 805; — von Krause 807.

Signatur eines kanonischen Diskontinuitätsbereiches 369, 373.

Simultancharakter zweier Riemannschen Matrizen 828.

Simultanperioden 614, 822.

Singuläre Stellen einer Funktion (wesentliche und außerwesentliche) 18; — Stellen auf der Peripherie eines Konvergenzkreises 83ff.; — Stellen bei analytischen Funktionen von n Argumenten 102; — Korrespondenzen auf algebraischen Gebilden 170; — Koordinaten bei elliptischen Normalkurven

331, 418; die Modularkorrespondenzen als — Korrespondenzen 424; — Moduln für komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen 427; — Punkte einer linearen Differentialgleichung 474, falls sich nur ein Teil der Integrale bestimmt verhält 486; — Stellen der Bestimmtheit bei linearen Differentialgleichungen 478, zugehörige Gestalt der Differentialgleichungen 479; — Stellen von Differentialgleichungen (feste und verschiebbare) 565, für Differentialgleichungen 1. Ordnung 566; — Transformation der Perioden Abelscher Integrale 629; — Riemannsche Matrizen 828; — Funktionen nach Humbert (Thetafunktionen für $p = 2$ mit prinzipaler Transformation) 855.

Smithsche Kurve, aus der Modulargleichung 1. Stufe hergeleitet 427.

Sohnkesche Modulargleichungen 242.

Spezialfälle der elliptischen Gebilde (harmonischer oder lemniskatischer und äquianharmonischer Fall) 288 ff.

Spezialfunktionen auf einer Riemannschen Fläche 143, 145.

Spezialschar äquivalenter Stellen auf einer Riemannschen Fläche (einer Kurve) 143, 145, 689.

Spezielle Teilungsgleichung der elliptischen Funktionen bei Abel 201; — — der Funktionen $\wp$ und $\wp'$ 314, ihre Nichtauflösbarkeit durch Wurzelzeichen im allgemeinen Falle 315, ihr Zusammenhang mit der Modulargleichung 315; Lösbarkeit der —n — durch Radikale in den Fällen der komplexen Multiplikation 316; — — der Abelschen Funktionen 817 ff.

Sphärische Trigonometrie, Beziehung zu den Additionstheoremen der elliptischen Integrale, von Lagrange bemerkt 186, 346, bei Study 301; —s Pendel, mit elliptischen Funktionen behandelt 337; — Kettenlinie 338.

Spiegelung an einem Kreise 361.

Starrer Körper, Bewegung eines —n —s, mit elliptischen Funktionen behandelt 339 ff., insbes. kräftefreie Bewegung 340, ihre Darstellung durch lineare Substitutionen 341.

Steinersche Polygone bei Kurven 3. Grades 330; — Gruppen von Doppeltangenten bei ebenen Kurven 4. Grades 779, 852.

Stereographische Projektion der z-Ebene auf die Kugelfläche 27, zugehörige geschichtliche Notizen 27.

Stetigkeit der algebraischen Funktionen bei stetiger Änderung der Riemannschen Fläche 132.

Stetigkeitsbereich einer analytischen Funktion 39.

Stieltjessche Sätze über Kettenbruchentwicklungen analyt. Funktionen, Verallgemeinerung von van Vleck 95 ff.; — Grenze bei Parametern linearer Differentialgleichungen 533.

Stufentheorie von Klein bei den elliptischen Funktionen 247, 277, bei den hyperelliptischen Funktionen 794.

Substitutionen, lineare einer Variablen 360, ihre Einteilung in elliptische, parabolische usw. 361.

Supplementäre Transformationen der Perioden Abelscher Funktionen 632.

Symmetral und Symmetralfunktionen von Schottky 845.

Symmetrie, Prinzip der — 38, 57.

Symmetrielinien auf Riemannschen Flächen 172, 732.

Symmetrische Riemannsche Flächen 172, 732; — elliptische Gebilde 289 ff.; — Riemannsche Flächen mit $p = 1$ 290.

Synectique, fonction — 12.

Systeme von Thetacharakteristiken 661, adjungierte 661, Göpelsche 661.

Syzygetisch, als Bezeichnung von Periodencharakteristiken 653, 680, von Thetacharakteristiken 654, 680; —e Charakteristiken bei $p = 2$ 743.

T

Taylorscher Lehrsatz, Geschichte 22; — Reihe 22, bei Funktionen mit n-Argumenten 102.

Teilbarkeitssätze von analytischen Funktionen von n-Argumenten 106.

Teilschar äquivalenter Stellen auf einer Riemannschen Fläche (Kurve) 143.

Teilung Abelscher Integrale 165; — der elliptischen Funktionen bei Abel 199, bei Gauß 230; spezielle — der elliptischen Funktionen bei Abel 200;

— der Abelschen Funktionen 814, spezielle 816; Zurückführung der allgemeinen Teilung auf die — 817; Reduktion der speziellen — 818.

Teilungsgleichung, allgemeine der elliptischen Funktionen bei Abel 199, spezielle 201; algebraische Lösung der speziellen — für komplexe Multiplikation bei Abel 201; —en des Lemniskatenbogens 230; allgemeine — der elliptischen Funktionen, systematisch entwickelt 307 ff., spezielle 313 ff.; allgemeine —en der Abelschen Funktionen 814, spezielle 817, deren Reduktion und Monodromiegruppe 818.

Teilwerte der elliptischen Funktionen bei Abel 200, der Weierstraßschen Funktionen $\wp, \wp'$ 308; die — $\wp_{\lambda\mu}$, $\wp'_{\lambda\mu}$ als ganze Modulformen 310, 416; — der σ-Funktion 417, ihre Beziehung zur Funktion ϑ_1 417.

Ternäre Variable zur Darstellung der Abelschen Integrale 138; — Gruppe $\Gamma^{(u,\omega)}$ der elliptischen Funktionen 272; indefinite — Formen als Quelle zur Erklärung von Gruppen 383 ff., ihre Äquivalenz und Reduktion 384; — Gruppen G_{168} 429, G_{360} 431, deren Resolventen 6., 10. u. 15. Grades 431 ff.; — Hermitesche Formen, zugehörige Gruppen und Funktionen 466.

Theorema generale von Jacobi, Umkehrtheorem bei hyperelliptischen Integralen 612.

Thetacharakteristik bei p-fach unendlichen Thetareihen 639, 653 ff.; Beziehung der —en zu den Periodencharakteristiken 654; —en $[\varepsilon]_r$ 680.

Thetaformel von Riemann 670 ff., Folgerungen aus ihr 675, Verallgemeinerung derselben 682.

Thetafunktionen, Einführung der — bei Jacobi 216, ihre Grundeigenschaften 217, ihre Reihenentwicklungen 218; Ausdruck der elliptischen Funktionen durch die — 217; die Reihen der vier — 219; Additionsformeln der — 220; — bei Gauß 229; — n^{ter} Ordnung bei Hermite 235; — bei Rosenhain 241; Potenzreihen und bestimmte Integrale für die — 282 ff.; — n^{ter} Ordnung 323 ff.; — für $p = 2$ von Göpel u. Rosenhain 619 ff.; — mit p Argumenten 636 ff., ihr erstes Auftreten 637, ihre Differentialgleichungen 638; — höherer Ordnung mit p Argumenten 641 ff.; Transformation der — 643 ff.; — höherer Ordnung mit halben Charakteristiken, Anzahl der linear-unabhängigen 666 ff.; — höherer Ordnung mit r^{tel} Charakteristiken 676; Riemannsche — 687; Riemannsche — und allgemeine — 690; Einführung der — bei Clebsch und Gordan 695, bei Weierstraß 703; Darstellung der — durch die Primform nach Klein 735; Beziehung der — für $p = 2$ zum algebraischen Gebilde 754; Anwendungen der — für $p = 2$ 755 ff.; mechanisches Problem mit — zweier Variablen behandelt 757; Verschwinden der hyperelliptischen — 760; Wirtingersche — von p-Variablen und $3p$-Parametern 849.

Thetaprodukte, vollständige 682, bei Clebsch-Gordan 697.

Thetaquotienten, Darstellung durch Wurzelfunktionen im hyperelliptischen Falle 766, 768.

Thetareihen von Poincaré 409.

Thetarelationen bei Jacobi 220, bei Gauß 231, bei Schröter 242; — bei Transformation n^{ter} Ordnung 326, 424; — bei beliebigem p, Mannigfaltigkeit M_p als Verallgemeinerung der Kummerschen Fläche 668 ff.; — bei den $\vartheta[\varepsilon]_r(\langle v \rangle)$ 682; Lösungen von — bei beliebigem p 728; — bei $p = 2$ 744, 753, bei $p = 3$ 776.

Transformation eines algebraischen Gebildes in sich 147 ff., 171; — Abelscher Integrale 165; erstes Auftreten des —sproblems der elliptischen Funktionen bei Euler und Lagrange 186 ff.; — der elliptischen Funktionen bei Abel 204, 206 ff.; erste Ansätze über — der elliptischen Funktionen bei Jacobi 209, allgemeine Behandlung Jacobis 211; supplementäre — bei Jacobi 211; — der elliptischen Funktionen im harmonischen Falle bei Eisenstein 243; systematische Behandlung der — der elliptischen Funktionen 316 ff.; algebraische Gestalt des —sproblems 316; — n^{ten} Grades der $\wp$-Funktion 321 ff.; — einer ellipt. Funktion höherer Stufe 322.; — n^{ten} Grades der Thetafunktionen 323; — durch reziproke Radien 361; — der

Hauptkreispolygone 372 ff.; —en einer Riemannschen Fläche in sich 387; —sproblem bei den automorphen Funktionen 420, 428; — n^{ten} Grades der Modulfunktionen, speziell einer Hauptfunktion 420 ff.; — der hypergeometrischen Funktionen 428; — der hypergeometrischen Differentialgleichung in sich 542, 547; — der Thetafunktionen von zwei Variablen bei Hermite 627 ff.; — der Perioden Abelscher Funktionen 629, Zusammensetzung dieser —en 631, 633 ff.; Reduktion nichtlinearer ganzzahliger —en bei Abelschen Funktionen 635; Zusammensetzung der —en Abelscher Funktionen nach Krazer und Prym 635; — der Thetafunktionen mit p Argumenten 643 ff., ganzzahlige — dieser Funktionen 645, lineare ganzzahlige — dieser Funktionen 648; prinzipale — der Thetafunktionen von mehreren Argumenten 852.

Transformationsgleichungen der elliptischen Funktionen, allgemein angesetzt 320; — der Thetafunktionen 325; — für g_2 und g_3 327; — bei Modulfunktionen mehrerer Variablen 864.

Transformationsketten von Gauß und Jacobi 454.

Transzendent normierte Integrale eines algebraischen Gebildes 134.

Trigonometrische Funktionen als ausgeartete elliptische Funktionen 290.

U

Überall endliches Differential einer Riemannschen Fläche 399 ff.

Überlagerungsfläche, Methode der — beim Beweise der Fundamentaltheoreme 454 ff.; Herstellung der einfach zusammenhängenden — bei beliebiger Riemannschen Fläche 455.

Überschiebungsprozesse bei Darstellung linearer Differentialgleichgn. 498.

Ultraelliptische Funktionen u. Integrale 619.

Umgebung eines Punktes 10, bei n unabhängigen Variablen 97.

Umkehrproblem von Fuchs bei Differentialgleichungen 2. Ordnung 531; —, das auf eindeutige automorphe Funktionen führt 531 ff.; Jacobisches — vor Riemann 609 ff.; — der hyperelliptischen Integrale bei Weierstraß 622; Riemanns Behandlung des —s 688; — bei Clebsch-Gordan 698, bei Weierstraß 698 ff.; Lösung des —s 711; zweite Form der Lösung des —s 715; Noethersche Lösung des —s 730; Lösung des —s im hyperelliptischen Falle 770, im Falle $p = 3$ nach Wirtinger 803; erweitertes — nach Clebsch-Gordan 808; erweiterte —e im hyperelliptischen Falle 811; verallgemeinertes — nach Lindemann 813; mehrdeutige —e nach Weierstraß 836.

Umkehrung einer analytischen Funktion 52; — des Abelschen Theorems 162; — des elliptischen Integrals 1. Gattung bei Abel und Jacobi 196 ff., bei Gauß 196 ff.; — des lemniskatischen Integrals bei Gauß 226; — eines einzelnen Abelschen Integrals 615 ff.

Unbestimmtheitsstelle, allgemeinste bei linearen Differentialgleichungen 495.

Unendlich fern, Verhalten einer Funktion in einem — —en Punkte 26.

Unendliche Determinanten bei Lösung von linearen Differentialgleichungen 495.

Unendlich werden einer ganzen Funktion für $z = \infty$ (Sätze von Hadamard u. a.) 86 ff

Uniformisierende Variable (Parameter) bei algebraischen u. analytischen Gebilden 74 ff., 395, 445, 447.

Uniformisierung von Funktionen einer Riemannschen Fläche durch eine polymorphe Funktion 396 ff., 445; allgemeiner —ssatz 397; — durch $\lambda(\omega)$ 397, 397; —ssätze 396, 446; allgemeinste —ssätze 455, 456.

Unimodulare ganzzahlige Substitutionen 352, 401.

Unimultiplikative Formen bei automorphen Gebilden mit höherem p 412, ihre Darstellung durch Poincarésche Reihen 414.

Unitätssatz beim Beweise der Fundamentaltheoreme 449.

Unreine Riemannsche Matrix 829.

Unverzweigte automorphe Formen, Darstellung durch die Prim- und Grundformen bei $p = 0$ 406, allgemein 408.

Unverzweigte Funktionen auf einer Riemannschen Fläche 125.

Unverzweigte multiplikative Formen auf Riemannschen Flächen 400.
Unverzweigtheit der automorphen Formen 402.

V

Valenz, Bezeichnung Dedekinds für die Modulfunktion $J(\omega)$ 357.
Vereinfachte Differentialgleichung bei Differentialgleichungen ohne verschiebbare Verzweigungspunkte oder Unbestimmtheitsstellen 592.
Verschiebbare Unbestimmtheitsstellen bei Differentialgleichungen höherer Ordnung 588 ff.; Differentialgleichungen höherer Ordnung ohne — — und Verzweigungspunkte 590 ff.
Verschwinden der Thetafunktionen, Riemanns Satz darüber 688.
Vertauschung von Parameter und Argument bei Integralen 3. Gattung 148, 151, bei elliptischen Integralen 3. Gattung 194, 271.
Verwandte hypergeometrische Funktionen 541.
Verzerrungssatz von Koebe 452, 460.
Verzweigung, —spunkt einer Riemannschen Fläche 31, Verhalten einer Funktion daselbst 31; —slinie 33, —sschnitte einer Riemannschen Fläche 33, 121; —sstellen, —swerte einer algebraischen Funktion 118; —sform der zweiblattrigen Fläche mit vier —spunkten 248, ihre Normalgestalten 249 ff.; Zusammenhang der Abelschen Normalgestalt der —sform mit der Oktaedergleichung 251; —ssatz zur geometrischen Erklärung von Untergruppen der Modulgruppe 387.
Vierfach periodische Funktionen von Hecke 857 ff.
Vollschar äquivalenter Stellen auf einer Riemannschen Fläche (einer Kurve) 142.
Vollständige Integrale, ellipt. der 1. u. 2. Gattung bei Legendre 193, zugehörige Differentialgleichungen 193, ihre Reihenentwicklungen 194; — — K und K' bei Jacobi 209, 210, ihre Darstellung durch Thetanullwerte 221.
Vollständig reduzible Differentialausdrücke 510.
Vorgeschichte der Funktionentheorie, Notizen 11.

W

Wahrer Konvergenzkreis einer Potenzreihe 23.
Webersche Bezeichnung der Modulfunktionen 281.
Wechsel der unabhängigen Variablen bei analytischen Gebilden mehrerer Argumente 111.
Weddlesche Fläche (Spezialfall hyperellipt. Flächen) 747, 751, Zusammenhang mit der Kummerschen Fläche 752.
Weierstraßscher Satz über Produktdarstellung einer ganzen Funktion 78, Erweiterung durch Picard 81; — Satz über Existenz von Funktionen mit beliebigem Definitionsbereiche 82; — Satz über analytische Funktionen von n Argumenten 105; — Theorie der algebraischen Funktionen 139 ff.; — Lückensatz 141; — Stellen auf einem algebraischen Gebilde 141, 146; — Funktionen $H(x,y;x',y')$ bei algebraischen Gebilden 140, 150; — Periodenrelationen 150; —s Normalintegral 1. Gattung 253, 2. Gattung 258, 260 ff..; — Funktionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ 257, 258, deren Potenzreihen und Teilbruchreihen 259; — Bezeichnung der Perioden 258; — Sigmafunktion 268, deren Reihenentwicklung u. Produktdarstellungen 269; — Funktionen $\sigma_k(u/\omega_1, \omega_2)$ 279, deren partielle Differentialgleichung 279, deren Produktdarstellungen 280; Zusammenhang der — ellipt. Funktionen mit den Jacobischen 282 ff.; — Behandlung des Umkehrproblems im hyperelliptischen Falle 622; — Theorie der Abelschen Funktionen 698 ff.; Übertragung der —n $\wp$-Funktion auf Gebilde mit $p > 1$ durch Bolza 794.
Wertigkeit einer doppeltperiodischen Funktion 266.
Wertigkeitskorrespondenzen auf algebraischen Gebilden 170.
Wesentlich singuläre Stelle einer Funktion 18, einer Funktion von n Argumenten 102.
Wiltheißsche Funktion Th in der Theorie der hyperelliptischen Funktionen 794, der Abelschen Funktionen mit $p = 3$ 802.
Windungspunkt 31.
Winkeltreue Abbildung, s. „Abbildung“ und „Konforme Abbildung“.

Wirkliche Ordnung einer ganzen Funktion 79.
Wirtingersche Lösungssätze beim Nullsetzen eines Systems Jacobischer Funktionen 837; — Thetafunktionen von p Veränderlichen und $3p$ Parametern 849.
Wurzelformen 158, 721, ihre Beziehung zu den Thetacharakteristiken 722, im hyperelliptischen Falle 764; — 2. u. 3. Dimension bei $p = 3$ 779.
Wurzelfunktionen 157; die drei — $\sqrt{\wp(u) - e_k}$ 279; — als multiplikative Formen auf Riemannschen Flächen 406; — bei Riemann 690; — u. Thetaquotienten 717; Beziehung der — zu den Periodencharakteristiken 717 ff., im hyperelliptischen Falle 763.
Wurzeln der Diskriminante Δ, die eindeutige Modulformen sind 286, speziell $\sqrt[24]{\Delta}$ 286, 392; — des Integralmoduls k^2 und der Diskriminante Δ, die Kongruenzmoduln sind 392.

Z

Zahlentheoretische Funktionen als Entwicklungskoeffizienten bei Modulformen 417.
Zetafunktionen 359; — und Zetareihen von Poincaré 443, Lösung des Riemannschen Problems durch solche 519; — eines imaginären quadratischen Zahlkörpers 865; — eines beliebigen Zahlkörpers 867 ff.
Zufällige Ecken von Diskontinuitätsbereichen 368.
Zusammenfall mehrerer Werte einer Funktion, Puiseux' Behandlung bei algebraischen Funktionen 30.
Zusammenhang einer Riemannschen Fläche 122.
Zusammensetzung der Transformationen der Perioden Abelscher Integrale nach Krazer und Prym 635.
Zweig einer analytischen Funktion 41, einer algebraischen Funktion 118.
Zweiteilung der Abelschen Funktionen 820.
Zwischenfunktionen (fonctions intermédiaires) im Sinne von Poincaré 834.
Zyklen von Ecken eines Diskontinuitätsbereiches 368.
Zykliden und Zyklidensysteme, durch hyperelliptische Funktionen mit $p = 2$ dargestellt 756, Beziehung zur Kummerschen Fläche 757.
Zyklische Gruppen linearer Substitutionen 374.

Ergänzung zum Referat II B, 3:

Wegen der Beziehung zwischen den rationalen und irrationalen Kovarianten der biquadratischen binären Form einerseits und den zwischen den vier Thetafunktionen bestehenden Gleichungen andererseits ist noch zu nennen: *E. Study*, On the connection between binary quartics and elliptic functions, Amer. J. 17 (1895), p. 216.

Neuere Werke aus dem Gebiete der Mathematik

Euleri opera omnia, I 7: Commentationes Algebraicae ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes. Ed. L. G. du Pasquier. [LVIII u. 580 S.] 4. 1923. Kart. n. Schwz. Frs. 65.—

———— I 8: Introductio in Analysin infinitorum. Ed. A. Krazer et F. Rudio. [X u. 392 S.] 4. 1923. Kart. n. Schweiz. Frs. 40.—

———— I 14: Commentationes Analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes. Ed. C. Boehm et G. Faber. [IX u. 617 S.] 4. 1925. Kart. n. Schweiz. Frs. 60.—

Feigl, G., Vorlesungen z. Einführung i. d. Studium d. höh. Mathem. [U. d. Pr. 1926.]

Fricke, R., Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. I. Teil: Die funktionentheoretischen u. analyt. Grundlagen. Mit 83 Textfig. [X u. 500 S.] gr. 8. 1916. Geh. n. *M* 12.60, geb. n. *M* 14.60 II. Teil. Die algebraischen Ausführungen. Mit 40 in den Text gedr. Fig. [VIII u. 546 S.] gr. 8. 1922. Geh. n. *M* 14.—, geb. n. *M* 16.—

———— Lehrbuch d. Differential- u. Integralrechnung u. ihrer Anwendg.

I. Band: Differentialrechnung. 2. u. 3. Aufl. Mit 129 in d. Text gedruckten Fig., einer Sammlung von 253 Aufgaben und einer Formeltabelle. [X u. 388 S.] gr. 8. 1921. Geh. n. *M* 10.60, geb. n. *M* 12.60

II. Band: Integralrechnung. 2. u. 3. Aufl. Mit 100 in den Text gedruckten Figuren, einer Sammlung von 242 Aufgaben und 1 Formeltabelle. [IV u. 406 S.] gr. 8. 1921. Geh. n. *M* 10.80, geb. n. *M* 12.80

Fueter, R., Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. I. Teil. Mit 16 Fig. im Text. [VIII u. 142 S.] gr. 8. 1924. Geh. n. *M* 5.—, geb. n. *M* 7.—. II. Teil. [In Vorb. 1926.]

Graßmann, H., Projekt. Geometrie d. Ebene. II. Bd. Ternäres. 2. Teil. [U. d. Pr. 1926.]

Handbuch d. angewandt. Mathem. Hrsg. v. H. E. Timerding. In 6 Teil M. Textfig. 8.

I. Praktische Analysis, von H. v. Sanden. 2., verb. Aufl. Mit 32 Fig. [XVIII u. 195 S.] 1923. Kart. n. *M* 5.60

II. Darstellende Geometrie, von J. Hjelmslev. Mit 305 Abb. i. Text. [IX u. 320 S.] 1914. Geh. n. *M* 9.—, geb. n. *M* 10.60

III. Grundzüge der Geodäsie, von M. Näbauer. Mit 277 Figuren. [XVI u. 420 S.] 1915. Geh. n. *M* 11.60, geb. n. *M* 13.60

Heffter, L., Die Grundlagen der Geometrie als Unterbau für die analytische Geometrie. Mit 11 Fig. im Text. [IV, 27 u. VIII S.] gr. 8. 1921. Geh. n. *M* 1.20

———— Lehrbuch der analytischen Geometrie. II. Bd.: Geometrie im Bündel und im Raum. Mit 101 Fig. i. Text. [XII u. 423 S.] gr. 8. 1923. Geh. n. *M* 10.60, geb. n. *M* 12.60

Helmert, F. R., Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit Anwendungen auf die Geodäsie, die Physik und die Theorie der Meßinstrumente. 3. Aufl., mit 1 Anhang, besorgt von H. Hohenner. Mit 24 Fig. [XVIII u. 597 S.] 1924. gr. 8. Geh. n. *M* 18.—, geb. n. *M* 20.—

Hilb, E., u. M. Riesz, Neuere Untersuchungen üb. trigonometrische Reihen. Sonderausg. a. d. Enzykl. d. math. Wissensch. [III S., S. 1189-1228.] gr. 8. 1924. Geh. n. *M* 2.20

Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. 2. Aufl. [XXVI u. 282 S.] gr. 8. 1924. Geh. n. *M* 10.—, geb. n. *M* 11.40

Kamke, E., Das Lebesguesche Integral. Eine Einführung in die neuere Theorie der reellen Funktionen. Mit 9 Fig. i. T. [IV u. 153 S.] gr. 8. 1925. Kart. n. *M* 6.—

Kommerell, V., Aufgaben zur synthetischen Geometrie aus d. Württemberg. Referendarprüfung f. Mathematiker. Mit 81 Fig. i. Text. [IV u. 136 S.] gr. 8. 1925. Geh. n. *M* 6.40, geb. n. *M* 8.—

Kowalewski, G., Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl. Mit 31 Textfig. [IV u. 416 S.] gr. 8. 1923. Geh. n. *M* 12.40, geb. n. *M* 14.40

Kultur der Gegenwart, Die. Herausg. von P. Hinneberg. III. Teil. Abt. I. Die mathematischen Wissenschaften. Unter Leitung von F. Klein. In 3 Lieferungen:

Liefg. 1: A. Voß, Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart. H. E. Timerding, Die Verbreitung mathem. Wissens u. mathem. Auffassung. [VI u. 161 S.] gr. 8. 1914. Geh. n. *M* 6.—

Liefg. 2: H. G. Zeuthen, Die Mathematik im Altertum u. im Mittelalter [IV u. 95 S.] gr. 8. 1912. n. *M* 3.80

Liefg. 3: A. Voß, Über die mathematische Erkenntnis. [VI u. 148 S.] gr. 8. 1914. n. *M* 4.—

Lichtenstein, L., Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Mit einem Vorwort v. E. Hilb. Sonderausgabe aus der Enzyklopädie der math. Wissenschaften. [66 S.] gr. 8. 1924. Geh. n. *M* 3.20

Lie, S., Gesammelte Abhandlungen. 7 Bände. Herausgegeben von Fr. Engel u. P. Heegaard. Bd. III: Abhandlungen zur Theorie der Differentialgleichungen. 1. Abt. Hrsg. von Fr. Engel. Neudruck. [In Vorb. 1926.]
Bd. V: Abhandlungen über die Theorie der Transformationsgruppen. 1. Abt. Hrsg. von Fr. Engel. [XII u. 776 S.] gr. 8. 1924. Geh. n. *M* 20.—. Bd. VI: Abhandlungen üb. d. Theorie d. Transformationsgruppen. 2. Abt. Hrsg. v. Fr. Engel. [U. d. Pr. 1926.]

Netto, E., Die Determinanten. 2., verb. Aufl., besorgt von L. Bieberbach. [V u. 123 S.] 8. 1925. Kart. *M* 4.40

UNIVERSITY OF MAINE
3 7550 01697238 3

Neuere Werke aus dem Gebiete der Mathematik

Osgood, W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie. I. Bd. 4. Aufl. Mit 158 Figuren. [XII u. 766 S.] gr. 8. 1923. Geh. n. ℳ 22.—, geb. n. ℳ 24.—. II. Bd. 1. Lieferung. Mit 9 Figuren. [VI u. 242 S.] gr. 8. 1924. Geh. n. ℳ 8.—, geb. n. ℳ 10.— 2. Lieferung. [In Vorb. 1926.]

Perry, J., Höhere Mathematik für Ingenieure. Autor. deutsche Bearbeitung von R. Fricke und F. Süchting. 4. Aufl. Mit 106 Fig. i. T. [XVI u. 450 S.] 8. 1923. Geh. n. ℳ 15.40, geb. n. ℳ 17.40

Pringsheim, A., Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre.

Bd. I. Zahlenlehre. In 3 Abt. Abt. I. Reelle Zahlen und Zahlenfolgen. 2. Aufl. [XII u. 292 S.] gr. 8. 1923. Geh. n. ℳ 12.40, geb. n. ℳ 14.20. Abt. II. Unendliche Reihen mit reellen Gliedern. 2. Aufl. [VIII S., S. 293–514.] gr. 8. 1923. Geh. n. ℳ 9.80, geb. n. ℳ 11.40. Abt. III. Komplexe Zahlen. Reihen mit kompl. Gliedern. Unendliche Produkte und Kettenbrüche. [IX u. S. 515—976.] gr. 8. 1921. Geh. n. ℳ 19.60, geb. n. ℳ 21.60

Bd. II. Funktionenlehre. 1. Abt. Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Mit 25 Fig. im Text. [XVI u. 624 S.] gr. 8. 1925. Geh. n. ℳ 26.—, geb. n. ℳ 29.—

Repertorium der höh. Mathematik. II. Bd. 2. Hälfte: Raumgeometrie. Von H. E. Timerding. 2., umgearb. Aufl. Mit 12 Fig. i. T. [XII S., S. 535—1165.] 8. 1922. Geh. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 16.—

Bisher liegen vor: I. Bd.: Analysis. 1. Hälfte. 2. völlig umg. Aufl. [XV u. 527 S.] 8. 1923. Geb. n. ℳ 14.—. 2 Hälfte. [3. Aufl. u. d. Pr. 1926.] — II. Bd.: Geometrie. 1. Hälfte. 3. Aufl. Mit 54 Fig. i. T. [XVI u. 534 S.] 8. 1910. Geb. n. ℳ 14.—

Rosenthal, A., Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen. Nach den Referaten von L. Zoretti, P. Montel u. M. Fréchet. Sonderausgabe aus der Enzyklopädie der math. Wissenschaften. [S. 851—1202.] gr. 8. 1924. Geh. n. ℳ 17.—

Salmon, G., u. W. Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes. Neu hrsg. von K. Kommerell.

I. Teil. Die Elemente und die Theorie der Flächen 2. Ordnung. 5. Aufl. Mit 71 Fig. [X u. 612 S.] gr. 8. 1922. Geh. n. ℳ 17.60. Auch geteilt: 1. Lieferung. Mit 48 Fig. [X u. 366 S.] gr. 8. 1922. Geh. n. ℳ 9.40. 2. Lieferung. Mit 23 Fig. [IV u. 246 S.] gr. 8. 1923. Geh. ℳ 6.40

Schrutka, L., Zahlenrechnen. [X u. 146 S.] 8. 1923. Kart. n. ℳ 3.60

Severi, F., Vorlesungen über algebraische Geometrie, Geometrie auf einer Kurve, Riemannsche Flächen, Abelsche Integrale. Berechtigte deutsche Übersetzung von E. Löffler. Mit einem Einführungswort von A. Brill u. 20 Figuren. [XVI u. 408 S.] gr. 8. 1921. Geh. n. ℳ 8.—, geb. n. ℳ 10.—

Simon, M., Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung. Herausgegeben von K. Fladt. Mit 125 Fig. i. Text und 1 Titelbild. [XVIII u. 115 S.] gr. 8. 1925. Geh. ℳ 8.—

Staude, O., Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte. Mit 58 Fig. i. Text. [VIII u. 242 S.] gr. 8. 1913. Geh. ℳ 6.—, geb. ℳ 8.—

Strohal, R., Die Grundbegriffe d. reinen Geometrie in ihrem Verhältnis zur Anschauung. Unters. z. psychol. Vorgeschich. d. Definitionen, Axiome u. Postulate. Mit 13 Fig. i. Text. [IV u. 137 S.] 8. 1925. (Wiss. u Hyp. Bd. XXVII.) Geb. n. ℳ 6.40

Teubners technische Leitfäden. 8. Kart. — Mathematische Bände:

1. R. Fricke, Analytische Geometrie. 2. Aufl. Mit 96 Fig. [VI u. 135 S.] 1922. n. ℳ 3.—
2. M. Großmann, Darstellende Geometrie. Bd. I. 2., durchges. Aufl. Mit 134 Fig. und 100 Übungsaufgaben im Text. [VI u. 81 S.] 1922. n. ℳ 1.90
3. —— Darstellende Geometrie. Bd. II. 2., umg. Aufl. Mit 114 Fig. i. T. [VI u. 154 S.] 1921. n. ℳ 3.40
4. L. Bieberbach, Differentialrechnung. 2., verm. u. verb. Aufl. Mit 34 Fig. im Text. [VI u. 131 S.] 1922. n. ℳ 3.—
5. —— Integralrechnung. 2., verb. Aufl. Mit 25 Fig. [IV u. 152 S.] 1923. n. ℳ 3.40

14. —— Funktionentheorie. Mit 34 Fig. [IV u. 118 S.] 1922. n. ℳ 2.80

18. V. Happach, Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in ihr. Anwend. a. Physik, Maschinenbau, Elektrotech. u. Geodäsie. Mit 7 Fig. [IV u. 74 S.] 1923. n. ℳ 1.70

21/23. R. Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. 3 Bde. Bd. I. Differentialrechnung u. Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen. Mit 155 Fig. im Text. [VII u. 185 S.] 1925. n. ℳ 5.—. Bd. II. Integralrechnung, Unendliche Reihen, Vektorrechnung nebst Anwendungen. Bd III. Raumkurven u. Flächen, Linienintegrale u. mehrfache Integrale, Gewöhnliche u. partielle Differentialgleich. nebst Anwendungen. [Bd. II u. III in Vorb. 1926.]

Tschuprow, A. A., Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie. [VI u. 153 S.] gr. 8. 1925. Geh. n. ℳ 6.40, geb. n. ℳ 8.—

Weber, H., u. J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bdn. gr. 8.

I. Bd. Arithmetik, Algebra u. Analysis. Neubearb. v. P. Epstein. 4. Aufl. Mit 28 Fig. [XVI u. 568 S.] 1922. Geb. n. ℳ 16.60

II. Bd. Elemente der Geometrie. 3. Aufl. Mit 237 Textfig. [XII u. 596 S.] 1915. Geb. n. ℳ 17.—

III. Bd. Angewandte Elementarmathematik. In 2 Teilen. 3. Aufl. 1. Teil. Mathematische Physik. Mit 254 Fig. i. Text. [X u. 536 S.] gr. 8. 1923. Geb. n. ℳ 15.60 2. Teil. Darstellende Geometrie, graphische Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, politische Arithmetik und Astronomie. Mit 271 Fig. i. Text. [XII u. 671 S.] gr. 8. 1924. Geb. n. ℳ 19.60

Ausführliche Kataloge und Verzeichnisse vom Verlag (Leipzig, Poststraße 3) erhältlich.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin